

Die Trägheitsbahn auf der Erdoberfläche.

Von

HEINRICH BRUNS in Leipzig.

Unter dieser Bezeichnung ist in der letzten Zeit mehrfach die Trajectorie eines Punktes untersucht worden, der gezwungen ist, sich auf der Erdoberfläche unter dem Einflusse der Schwere und der Erdrotation zu bewegen. Indem ich betreffs der Literatur auf die Selbstanzeige von: „Fr. Roth, die Trägheitsbahn auf der Erdoberfläche“ im Aprilheft 1883 der Zeitschrift der österr. Gesellschaft für Meteorologie verweise, will ich hier nur hervorheben, dass in den betreffenden Arbeiten die Erdoberfläche als vollkommen glatt vorausgesetzt, d. h. die Reibung ausser Ansatz gelassen wird. Diese Vernachlässigung erscheint nun als ein wesentlicher Mangel, sobald man die Aufgabe nicht etwa bloss als eine interessante Rechenübung, sondern zur besseren Einsicht in meteorologische oder hydrographische Vorgänge verwerthen will, denn es ist ausschliesslich Wirkung der Reibung, wenn die Geschwindigkeiten der relativen Bewegungen auf der Erde im Allgemeinen immer sehr viel kleiner als die absoluten Geschwindigkeiten sind. Im Folgenden soll nun gezeigt werden, wie sich das Resultat, auf welches es hierbei allein ankommt, gestaltet, wenn man die Reibung berücksichtigt.

Es seien (xyz) die rechtwinkligen Aequatorialcoordinaten für ein festes Axensystem, $(\xi\eta\xi)$ dieselben Grössen für ein analoges mit der Erde rotirendes Axensystem — der Nullpunkt im Schwerpunkt der Erde, die z -Axe nach dem Nordpol, die y -Axe 90° östlich von der x -Axe. Ist w die Umdrehungsgeschwindigkeit, so hat man bei passender Wahl des Zeitnullpunktes

$$\xi = x \cos wt + y \sin wt,$$

$$\eta = -x \sin wt + y \cos wt,$$

$$\xi = z.$$

Ferner wird, wenn die Ableitungen nach t durch Accente bezeichnet werden,

$$\begin{aligned}\xi'' &= x'' \cos wt + y'' \sin wt + 2w\eta' + w^2\xi, \\ \eta'' &= -x'' \sin wt + y'' \cos wt - 2w\xi' + w^2\eta, \\ \zeta'' &= z''.\end{aligned}$$

Ist nun V das Potential für die Gravitation, Q das für die Schwerkraft, also

$$Q = \frac{1}{2} w^2 (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} w^2 (\xi^2 + \eta^2) = \frac{1}{2} w^2 r^2,$$

so ist $V + Q = U$ die Kräftefunction der Erde, und längs der Erdoberfläche U constant. Hiermit werden die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}x'' &= \frac{\partial V}{\partial x} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x} + F, \\ y'' &= \frac{\partial V}{\partial y} + \lambda \frac{\partial U}{\partial y} + G, \\ z'' &= \frac{\partial V}{\partial z} + \lambda \frac{\partial U}{\partial z} + H,\end{aligned}$$

wo die F, G, H die von der Reibung abhängigen Terme bedeuten. Diese Gleichungen gehen für $\lambda = \mu - 1$ zunächst über in

$$x'' = -\frac{\partial Q}{\partial x} + \mu \frac{\partial U}{\partial x} + F, \text{ etc.,}$$

und ferner in

$$\begin{aligned}\xi'' &= 2w\eta' + \mu \frac{\partial U}{\partial \xi} + L, \\ \eta'' &= -2w\xi' + \mu \frac{\partial U}{\partial \eta} + M, \\ \zeta'' &= \mu \frac{\partial U}{\partial \zeta} + N,\end{aligned}$$

wo für die Reibungsterme L, M, N zu setzen ist

$$L = \frac{\xi'}{v} R, \quad M = \frac{\eta'}{v} R, \quad N = \frac{\zeta'}{v} R,$$

wenn v die Geschwindigkeit der relativen Bewegung und R den Widerstand in der Richtung der Tangente bedeutet.

Hieraus folgt nun zunächst

$$dv = R dt,$$

so dass also bei Vernachlässigung der Reibung v constant sein würde. Ist ferner ψ das von Nord über Ost gezählte Azimuth und l die geographische Länge, so folgt, wenn wir jetzt die Erde als Rotationskörper voraussetzen, aus

$$rv \sin \psi = r \cdot r \frac{dl}{dt} = \xi \eta' - \xi' \eta$$

durch Differentiiren und Einsetzen der obigen Ausdrücke für ξ'' , η'' :

$$\begin{aligned} & r'v \sin \psi + rv' \sin \psi + rv \cos \psi \psi' \\ &= -2wrr' + \mu \left(\xi \frac{\partial U}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + r \sin \psi \cdot R. \end{aligned}$$

Das Glied mit R hebt sich gegen das mit v' ; ferner verschwindet das von U abhängige Glied, sobald wir die Erde als Rotationskörper voraussetzen; endlich ist, wenn φ die Polhöhe bedeutet,

$$v \cos \psi \sin \varphi = -r,$$

so dass man schliesslich erhält:

$$\psi' = 2w \sin \varphi + \frac{v}{r} \sin \psi \sin \varphi.$$

Das zweite Glied rechts rührt von der Convergenz der Meridiane her, so dass die von der Erdrotation verursachte Azimuthänderung des bewegten Theilchens durch $2w \sin \varphi$ gegeben ist. Wir haben damit das im Voraus nicht zu erwartende merkwürdige Resultat, dass in unserem Falle die von der Erdrotation verursachte Azimuthdrehung *völlig unabhängig von der Reibung ist*.

Sternwarte Leipzig, 1883 April 9.

