SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE

DES

FONCTIONS MONOGÈNES UNIFORMES

D'UNE VARIABLE INDÉPENDANTE

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

À STOCKHOLM.

Les recherches dont je vais exposer ici l'ensemble, ont été publiées auparavant, quant à leurs traits les plus essentiels, dans le Bulletin (Öfversigt) des travaux de l'Académie royale des sciences de Suède, ainsi que dans les Comptes-rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences à Paris. Leur but est de faire parvenir, dans un certain sens, la théorie des fonctions analytiques uniformes d'une variable, à ce degré d'achèvement auquel la théorie des fonctions rationnelles est arrivée depuis longtemps.

Soit x une grandeur variable complexe à variabilité illimitée, et x' un point donné fini[1] dans le domaine de la variable x. Soit enfin R une quantité positive donnée. Je dis que l'ensemble des points x remplissant la condition $|x - x'| < R$, constitue le *voisinage* ou *l'entourage* ou les *environs du point* x'[2] *correspondant à* R. Chacun de ces points est dit *appartenir au voisinage* ou *à l'entourage* ou *aux environs* R, ou être

---

[1] C'est-à-dire représentant une valeur donnée finie.

[2] Cf.: *Zur Functionenlehre, von* K. WEIERSTRASS. Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, August 1880, pag. 4.

situé dans *le voisinage* ou dans *l'entourage* ou dans *les environs* R de x'. Conformément à ce qui précède, l'ensemble des points x remplissant la condition $\left|\frac{1}{x}\right| < R$, sera *le voisinage du point* $x = \infty$ *correspondant à* R. Considérons un ensemble $\mathfrak{A}$ d'un nombre infini de points différents x; je dirai d'abord que l'entourage d'un point appartient à $\mathfrak{A}$, si tout point de cet entourage est un point de $\mathfrak{A}$; maintenant, il peut arriver, relativement à cet ensemble $\mathfrak{A}$, qu'il existe un certain point dont l'entourage, convenablement choisi, appartient tout entier à $\mathfrak{A}$; s'il existe un tel point, je le désignerai par x_0, en prenant toutefois toujours pour x_0 le point ∞, s'il existe un entourage de ce point appartenant à $\mathfrak{A}$. Si, enfin, quelle que soit la valeur finie x_0' appartenant à $\mathfrak{A}$, on peut toujours trouver un nombre fini de points $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ tels, que dans la série $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu, x_0'$ on peut définir pour chaque point un entourage de telle manière que cet entourage appartienne tout entier à $\mathfrak{A}$ et que chaque point suivant appartienne à l'entourage du précédent, je dirai, suivant WEIERSTRASS, que le champ $\mathfrak{A}$ constitue un *continuum composé d'une seule pièce.* (¹)

Pour être plus bref, je désignerai fréquemment dans la suite seulement par *continuum* (²) un *continuum* de l'espèce qui vient d'être décrite.

Conformément à la définition qui précède, il existe toujours, pour chaque point x' appartenant à un *continuum* $\mathfrak{A}$, un voisinage correspondant, dont tous les points appartiennent égalément à $\mathfrak{A}$. En suivant la terminologie employée par WEIERSTRASS dans son cours, je dirai qu'un point pareil est situé *en dedans de* $\mathfrak{A}$, ou que le *continuum* $\mathfrak{A}$ contient ce point. Selon la même terminologie, x' est dit se trouver *sur la limite* de $\mathfrak{A}$, si, parmi les points d'un entourage, si petit qu'il soit, de x', il s'en trouve toujours quelques-uns qui appartiennent et quelques autres qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{A}$; et x' est dit situé *en dehors de* $\mathfrak{A}$, s'il se trouve un voisinage de x' ne comprenant pas de point appartenant à $\mathfrak{A}$. D'après ces définitions, il convient d'entendre, par la *limite complète* de $\mathfrak{A}$, l'ensemble de tous les points situés sur la limite de $\mathfrak{A}$. On peut encore

---

(¹) WEIERSTRASS: *Zur Functionenlehre,* p. 5.

(²) Suivant la terminologie de CANTOR (voir ce journal, T. 2, p. 407—408), l'ensemble $\mathfrak{A}$, tant que cet ensemble ne forme qu'une partie du champ total de la variable x, est un ensemble *imparfait continu;* il constitue, par suite, une espèce distincte de *semi-continuum,* mais n'est pas un *continuum parfait.*

dire que $\mathfrak{A}$ est parfaitement limité par l'ensemble de tous les points situés sur la limite.

Soit maintenant $F(x)$ une fonction monogène[1] uniforme de x. Une fonction pareille se comporte d'une façon *régulière*[2] dans le voisinage d'un point x', s'il existe une série procédant suivant les puissances entières et positives de $(x - x')$:

$$A_0 + A_1(x - x') + A_2(x - x')^2 + \ldots,$$

telle, que l'on ait,

$$F(x) = A_0 + A_1(x - x') + A_2(x - x')^2 + \ldots.$$

Cette égalité subsiste nécessairement dans toute l'étendue du domaine de convergence de la série. La définition est également valable pour $x' = \infty$, si l'on entend par $(x - x')$ l'expression $\frac{1}{x}$. Quand $F(x)$ se comporte d'une façon régulière dans l'entourage de deux points x_0 et x'_0, dont $x_0 = \infty$ dans le cas où $x = \infty$ est un point régulier de $F(x)$, il est toujours possible d'interpoler entre eux un nombre fini de points x_r $(r = 1, 2, \ldots, \nu)$, à chacun desquels correspond une série

$$A_0^{(r)} + A_1^{(r)}(x - x_r) + A_2^{(r)}(x - x_r)^2 + \ldots$$

telle, que l'on ait l'égalité

$$F(x) = A_0^{(r)} + A_1^{(r)}(x - x_r) + A_2^{(r)}(x - x_r)^2 + \ldots,$$

et que chaque point se trouve dans le domaine de convergence de la série relative au point précédent. L'ensemble de tous les points dans le voisinage desquels $F(x)$ se comporte d'une façon régulière, forme par conséquent un *continuum* $\mathfrak{A}$ tel qu'il a été défini ci-haut.

---

(1) J'entends alors par fonction *monogène* une fonction telle qu'elle a été définie par WEIERSTRASS: *Zur Functionenlehre.* Monatsbericht d. Königl. Akad. d. Wissenschaften zu Berlin, August 1880, p. 12.

(2) *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen, von* K. WEIERSTRASS. Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1876, p. 11.

Considérons maintenant un point x' tel, qu'il existe, dans chaque voisinage de x', des points pour lesquels $F(x)$ se comporte d'une façon régulière, mais pour lequel il n'existe aucun entourage où une égalité de la forme

$$F(x) = A_0 + A_1(x - x') + A_2(x - x')^2 + \dots$$

ait lieu; on dit alors que x' est un point *singulier* de la fonction $F(x)$, ou aussi que $F(x)$ se comporte d'une façon *singulière* au voisinage du point x'. [1] L'ensemble de tous les points singuliers de $F(x)$ constitue la limite complète du domaine $\mathfrak{A}$ dans lequel une fonction se comporte régulièrement.

Quand P est un ensemble infini donné, ne contenant qu'une fois chaque point spécial, CANTOR comprend par P' l'ensemble de tous les points tels, qu'il se trouve une infinité de points appartenant à P [2] dans un voisinage aussi rapproché que l'on voudra de chaque point en question. Si P est l'ensemble de tous les points singuliers de $F(x)$, et qu'il constitue en outre un ensemble infini, P contiendra nécessairement tous les points de P'. En effet, lorsque, au voisinage d'un point, aussi petit que l'on voudra, il existe une infinité de points singuliers d'une fonction, ce point est lui-même un point singulier de la fonction.

Soit maintenant P un ensemble quelconque, ne contenant qu'une seule fois chaque point spécial et embrassant de même tous les points de P'. Il peut arriver alors que P contienne des points qui ne sont pas compris en P'. Soit Q l'ensemble de tous ces points. A chaque point de Q appartient toujours, en ce cas, un si petit voisinage, qu'il ne s'y trouve pas d'autres points de Q. On dit alors d'un tel point qu'il est *isolé*. CANTOR [3] désigne par le terme d'*ensemble isolé* tout ensemble dont les points particuliers sont des points isolés qui diffèrent entre eux. En dérivant maintenant par la règle de CANTOR l'ensemble Q' de l'ensemble

---

(1) K. WEIERSTRASS: *Zur Theorie* etc., p. 11. La définition qui vient d'être donnée ici, diverge de celle de WEIERSTRASS en ceci que WEIERSTRASS n'ajoute pas la condition que $F(x)$ doive posséder des points réguliers dans chaque voisinage de $x = x'$. En lisant la suite de mon mémoire on reconnaîtra sans peine pourquoi j'ai été amené à faire ce changement dans la définition de WEIERSTRASS.

(2) Voir ce journal, T. 2, p. 343.

(3) Voir ce journal, T. 2, p. 373.

Q, on trouve que Q' est contenu en P', et, par conséquent, qu'il est aussi compris en P. Il est évident que les deux ensembles Q et Q' ne peuvent avoir aucun point commun. Soit S l'ensemble de tous les points qui sont contenus en P sans être compris en même temps ni en Q, ni en Q'. On obtient alors $P = Q + Q' + S$.(1) Un point de S n'étant compris ni en Q, ni en Q', il y a évidemment, à chaque voisinage d'un point pareil, d'autres points qui appartiennent de même à S. L'ensemble S est donc un ensemble tel, qu'il est toujours compris dans l'ensemble S' dérivé de S par la règle de CANTOR.

Supposez maintenant que P soit l'ensemble de tous les points singuliers d'une fonction $F(x)$. Si nous considérons $F(x)$ au voisinage d'un point a de Q, notre fonction pourra toujours, sur la base du théorème de LAURENT,(2) se mettre, dans un certain voisinage de a, sous la forme:

$$G\left(\frac{1}{x-a}\right) + \mathfrak{P}(x-a),$$

où $G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ désigne une série toujours convergente, procédant suivant les puissances entières et positives de $\frac{1}{x-a}$, s'annulant quand $\frac{1}{x-a} = 0$, et où $\mathfrak{P}(x-a)$ est une autre série procédant suivant les puissances entières et positives de $(x-a)$, et convergente dans le voisinage précité de $(x = a)$.(3) Il en sera de même pour $a = \infty$, à la condition que l'on entende $\frac{1}{x}$ par $(x - \infty)$.

Étant donné un *continuum* $\mathfrak{A}$ parfaitement limité par un ensemble isolé Q et l'ensemble dérivé Q', mais d'ailleurs arbitraire, adjoignant

---

(1) Un ensemble constituant la réunion de plusieurs autres qui ne possèdent aucun point commun, est désigné comme la somme de ceux-ci. (Voir ce journal, T. 2, p. 372.)

(2) J'ai montré dans les Mémoires de la société des sciences de Liège, 2e série, t. XII comment il est possible de prouver ce théorème sans avoir recours à la théorie des intégrales définies et sans sortir des principes élémentaires employés dans ce travail. Cette démonstration sera reproduite à la suite de ce mémoire.

(3) A l'instar de WEIERSTRASS: *Zur Theorie* etc. p. 26, je comprends toujours par $\mathfrak{P}(x-a)$ »une série procédant suivant les puissances entières et positives de $(x-a)$, et convergente dans un certain voisinage de $(x = a)$».

ensuite arbitrairement à chacun des points a qui constituent l'ensemble Q, une fonction

$$G\left(\frac{1}{x-a}\right)+g(x-a),$$

où $g(x-a)$ est une fonction rationnelle entière du degré m en $(x-a)$, et $G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ une série toujours convergente, procédant suivant les puissances entières et positives de $\frac{1}{x-a}$, et s'évanouissant lorsque $\frac{1}{x-a}=0$, est-il possible de former une expression analytique correspondante, représentant une fonction monogène et uniforme, qui, pour le voisinage immédiat de $(x=a)$, puisse se mettre sous la forme

$$G\left(\frac{1}{x-a}\right)+g(x-a)+(x-a)^{m+1}.\mathfrak{P}(x-a),$$

et qui, en outre, se comporte régulièrement au voisinage de chaque point situé en dedans du *continuum* $\mathfrak{A}$, parfaitement limité par l'ensemble $Q+Q'$?

Je vais montrer que c'est toujours possible, et qu'il existe une infinité d'expressions analytiques représentant des fonctions qui correspondent tant au *continuum* donné, qu'aux fonctions arbitraires $G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ et $g(x-a)$. Je ferai voir aussi que ces expressions peuvent être choisies de façon que la fonction qu'elles représentent ne s'évanouisse que pour des points donnés.

Je montrerai de même qu'une fonction monogène uniforme quelconque $F(x)$ étant donnée il est toujours possible de former une expression analytique correspondante ayant les propriétés indiquées et représentant la fonction considérée avec chaque approximation voulue, même en d'autres points que ceux qui appartiennent à Q.

Il a été supposé que l'ensemble $Q+Q'$ constitue la limite complète d'un *continuum* $\mathfrak{A}$ composé d'une seule pièce. L'ensemble isolé Q peut de même être choisi d'une manière complètement arbitraire, mais l'on obtient alors en général une expression analytique correspondante, représentant, dans des parties différentes du domaine de la variable x, des fonctions monogènes uniformes différentes.

On peut donner de la manière suivante un sens déterminé à ce que l'on entend en disant d'une expression pareille qu'elle se comporte d'une façon régulière au voisinage d'un point donné: Une expression analytique (¹) F_x se comporte d'une façon régulière dans l'entourage d'un point $(x = x')$ s'il y a une série

$$A_0 + A_1(x - x') + A_2(x - x')^2 + \dots$$

pour laquelle, en un certain voisinage du point $(x = x')$, a lieu l'égalité

$$F_x = A_0 + A_1(x - x') + A_2(x - x')^2 + \dots .$$

Il n'est toutefois pas nécessaire que cette égalité se produise dans tout le domaine de convergence de la série. Weierstrass (²) a donné en effet des exemples d'expressions analytiques où cette égalité ne subsiste que dans un entourage du point $(x = x')$ constituant une partie de ce domaine de convergence, et où l'expression analytique ne représente par conséquent que des *parties* de différentes fonctions monogènes. Les expressions analytiques qui seront principalement étudiées dans le présent mémoire, ne se comportent cependant pas de cette manière. Ces expressions représentent en général au moins *une* fonction monogène tout entière.

Je me contenterai de signaler, pour terminer, que les différents points d'un ensemble isolé peuvent toujours être ordonnés en une série $a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots$. (³) Pour exprimer cette propriété que la totalité des points appartenant à un ensemble isolé donné peut toujours être arrangée en une série $a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots$, Cantor dit que cet ensemble a la même puissance que la série des nombres $1, 2, \dots, \nu, \dots$. (⁴) Il n'est toutefois pas vrai que chaque ensemble doué d'une telle propriété soit aussi un ensemble isolé. (⁵) Si un ensemble ne se composant pas d'un nombre fini

---

(¹) Pour éviter la confusion qu'on trouve chez beaucoup d'auteurs sur la différence entre une expression analytique et une fonction monogène j'introduis dans la suite le signe F_x pour exprimer la première de ces notions.

(²) Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, August 1880 et Februar 1881.

(³) Voir ce journal, T. 2, p. 373.

(⁴) Voir ce journal, T. 2, p. 311.

(⁵) Je citerai comme exemple l'ensemble de tous les nombres rationnels.

de points, ne possède pas la même puissance que la série $1, 2, \ldots, \nu, \ldots$, on dit qu'il a une *autre puissance,* plus élevée que celle de cette série.

On considérera toujours dans ce qui suit $x = \infty$ comme un point dans le domaine de la variable x, la définition de »voisinage de $x = \infty$» faisant comprendre ce que l'on veut signifier en disant que ce point est situé, en dedans, sur la limite, ou en dehors d'un certain domaine; enfin, qu'on le rencontre parmi les points de l'ensemble P', déduit de la façon indiquée ci-haut, d'un ensemble donné P.

§ 1.

Ce paragraphe est consacré au développement d'un théorème principal, servant de base à toute la théorie qui suit.

A. »Soit Q un ensemble isolé appartenant au domaine d'une variable x à variabilité illimitée, et dont les points particuliers seront désignés par $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$. Soit ensuite

$$G_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right), \quad G_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right), \ldots, G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right), \ldots$$

une série de fonctions monogènes uniformes, où $G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ désigne une fonction entière rationnelle ou transcendante de $\frac{1}{x-a_\nu}$, s'évanouissant lorsque $\frac{1}{x-a_\nu} = 0$. Il est alors toujours possible de former une expression analytique qui se comporte partout d'une manière régulière, sauf au voisinage de chacun des points appartenant à $Q + Q'$, et qui, pour chaque valeur déterminée de ν, au voisinage de $(x = a_\nu)$, peut être mise sous la forme

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + \mathfrak{P}(x - a_\nu).»$$

Si l'ensemble Q ne contient qu'un nombre fini de points $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il n'existe pas d'ensemble Q', ce que CANTOR exprime par l'égalité $Q' = 0$. Le théorème que j'ai énoncé, ressort presque immédiatement en ce cas.

En effet, si l'on pose:

$$F_1(x) = G_1\left(\frac{1}{x - a_1}\right), \quad F_2(x) = G_2\left(\frac{1}{x - a_2}\right), \ldots, \quad F_n(x) = G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right),$$

la somme

$$F(x) = C + \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu(x)$$

est une fonction monogène uniforme et régulière dans un *continuum* $\mathfrak{A}$, que l'on obtient en excluant l'ensemble Q du domaine de la variable x. Au voisinage de chacun des points a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ appartenant à Q, $F(x)$ peut aussi se mettre sous la forme:

$$F(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) + \mathfrak{P}(x - a_\nu).$$

Il est de même toujours possible, d'autre part, d'exprimer sous la forme

$$F(x) = C + \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right),$$

chaque fonction monogène uniforme $F(x)$, dont les points singuliers sont $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Il suffit pour cela, suivant le théoréme de Laurent, de développer $F(x)$ en une série de puissances au voisinage de chaque point a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, d'où l'on obtient une fonction $G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ telle, que la différence

$$F(x) - G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) = \mathfrak{P}(x - a_\nu).$$

La différence

$$F(x) - \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$$

est alors nécessairement une constante donnée en même temps que la fonction $F(x)$. On a donc le théorème suivant, que l'on retrouve dans le mémoire de Weierstrass: *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen:*

»Soit Q un ensemble fini dans le domaine de la variable x à variabilité illimitée, dont les points particuliers sont $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Soient ensuite

$$G_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right),\ G_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right),\ \ldots,\ G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$$

des fonctions monogènes uniformes, où $G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ constitue une fonction entière de $\frac{1}{x-a_\nu}$, qui s'évanouit quand

$$\frac{1}{x-a_\nu}=0.$$

La somme

$$C+G_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right)+G_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right)+\ldots+G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$$

représente en ce cas une fonction monogène uniforme de la variable x, laquelle se comporte d'une manière régulière au voisinage de chaque point n'appartenant pas à l'ensemble Q, et qui, au voisinage de chaque point a_ν appartenant à cet ensemble, peut se mettre sous la forme

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)+\mathfrak{P}(x-a_\nu).$$

D'autre part, chaque fonction monogène uniforme de x qui se comporte partout d'une manière régulière, sauf au voisinage des points appartenant à l'ensemble Q, peut se mettre sous la forme d'une somme telle que celle qui a été dite.»

Supposons maintenant que l'égalité $Q'=0$ n'ait pas lieu, et que Q contienne par conséquent un nombre infini de points $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$. Il peut être prouvé qu'il est toujours possible, en ce cas, d'adjoindre à chaque point a_ν, qui n'est ni 0 ni ∞, un autre point b_ν, appartenant à Q', et pouvant être choisi de telle sorte, que $\lim\limits_{\nu=\infty}|a_\nu-b_\nu|=0$, ou qu'à chaque quantité positive θ corresponde un nombre entier positif n tel, que $|a_\nu-b_\nu|<\theta$ dès que $\nu\geqq n$. Cela n'exclut pas la supposition $b_\nu=\infty$, et l'on entend en ce cas par $(a_\nu-\infty)$ l'expression $\frac{1}{a_\nu}$. Faisons, en effet, désigner à b, l'un après l'autre, chacun des points appartenant à Q'. Il existe alors toujours, pour chaque ν donné, une limite inférieure ρ_ν du module $|a_\nu - b|$, laquelle n'est ni nulle, ni infinie. On voit également sans peine qu'il se trouve au moins un point b tel, que $|a_\nu - b| = \rho_\nu$. Je choisis arbitrairement un point pareil, que je désigne par b_ν. Soit maintenant θ une quantité positive quelconque. Il ne peut y avoir, parmi les points a_ν, un nombre infini de points $a_{\nu'}$ pour lesquels $\rho_{\nu'}$ soit supérieur ou égal à θ. Car, si c'était le cas, il y aurait toujours du moins un point b' tel, qu'il existât dans chaque voisinage de ce point une quantité infinie de points $a_{\nu'}$. Le point b' appartient à Q', et l'on aurait par suite, contrairement à la supposition admise, une quantité infinie de points $a_{\nu'}$ pour lesquels $|a_{\nu'} - b'|$, et par conséquent aussi $\rho_{\nu'}$, seraient inférieurs à une aussi petite quantité que l'on voudra, et dès lors aussi inférieurs à θ. Il existe donc nécessairement un nombre entier n tel, que $\rho_\nu < \theta$ ou $|a_\nu - b_\nu| < \theta$ dès que $\nu \geqq n$.[1]

Admettons ultérieurement une quantité positive arbitraire $\varepsilon < 1$, et en outre une série infinie de grandeurs

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3, \ldots$$

qui, arbitraires à tous autres égards, sont soumises aux deux conditions d'être toutes des quantités positives et d'avoir une somme finie.

Pour former l'expression analytique cherchée, on peut procéder de la manière suivante. Si $a_\nu = 0$, ou $a_\nu = \infty$, on pose

$$F_\nu(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right).$$

---

[1] Comme exemple d'un ensemble Q pour lequel l'égalité $Q' = 0$ ne se présente pas, je citerai l'ensemble qui constitue la réunion de tous les points

$$a_{nk} = \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)\cdot e^{\frac{2k\pi i}{n+1}}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Ici Q' se compose évidemment de la réunion de tous les points remplissant la condition $|x| = 1$. Les quantités b_{nk} peuvent être fixées de telle sorte, que $b_{nk} = e^{\frac{2k\pi i}{n+1}}$. On voit immédiatement la signification géométrique de a_{nk}, b_{nk} et Q'.

Si, au contraire, a_ν n'est ni zéro ni infini, il est toujours possible de développer $G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ en une série (¹)

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{a_\nu-b_\nu}{x-b_\nu}\right)^\mu,$$

qui converge dès que $\left|\frac{a_\nu-b_\nu}{x-b_\nu}\right| < 1$. On entend alors, quand $b_\nu=\infty$, par $\frac{a_\nu-b_\nu}{x-b_\nu}$ l'expression $\frac{x}{a_\nu}$. Le coefficient $A_0^{(\nu)}$ est toujours zéro quand b_ν n'est pas ∞, mais il possède en général une valeur différente de zéro quand $b_\nu=\infty$. Or, il existe toujours un nombre entier m_ν égal ou à -1, ou à zéro, ou à un nombre positif, assez grand pour que le module de la série

$$\sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{a_\nu-b_\nu}{x-b_\nu}\right)^\mu$$

soit $<\varepsilon_\nu$ dès que $\left|\frac{a_\nu-b_\nu}{x-a_\nu}\right| \leq \varepsilon$. Quand on a trouvé un nombre m_ν pareil, on pose:

$$F_\nu(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) - \sum_{\mu=0}^{m_\nu} A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{a_\nu-b_\nu}{x-b_\nu}\right)^\mu.$$

Si $m_\nu=-1$, on introduit dans cette expression le terme zéro au lieu de

$$\sum_{\mu=0}^{m_\nu} A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{a_\nu-b_\nu}{x-b_\nu}\right)^\mu,$$

de manière à obtenir dans ce cas

$$F_\nu(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right).$$

(¹) K. Weierstrass: *Zur Functionenlehre.* Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, August 1880, p. 7.

La série

$$F_x = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

est alors une expression pareille à celle dont je voulais prouver l'existence.

En effet, soit x_0 une valeur finie déterminée de x, n'appartenant pas à l'ensemble $Q + Q'$. Il est alors toujours possible de trouver une quantité positive ρ telle, qu'aucune des valeurs de x pour lesquelles $|x - x_0| \leqq \rho$ n'appartienne à $Q + Q'$. Si l'on fait prendre successivement à x toutes les valeurs remplissant la condition $|x - x_0| \leqq \rho$, et que, dans l'expression $|x - b_\nu|$, l'on fasse parcourir à ν la série $1, 2, 3, \ldots$, il existe évidemment une quantité positive l constituant la limite inférieure des valeurs obtenues de cette manière par $|x - b_\nu|$. On a donc, pour les valeurs de x qui remplissent la condition $|x - x_0| \leqq \rho$,

$$|x - b_\nu| \geqq l. \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Posons maintenant $\theta = \varepsilon l$. Il existe toujours, comme nous l'avons vu, un nombre entier positif n tel, que $|a_\nu - b_\nu| < \theta$ dès que $\nu \geqq n$. Par suite, l'on a aussi, pour $\nu \geqq n$,

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \frac{\theta}{l} = \varepsilon.$$

Rappelons-nous maintenant que

$$|F_\nu(x)| = \left| G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) - \sum_{\mu=0}^{m_\nu} A_\mu^{(\nu)} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu \right| \leqq \varepsilon_\nu$$

dès que

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| \leqq \varepsilon,$$

et que la série $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots$ possède une somme finie. On voit dès lors immédiatement que si δ est une quantité positive arbitraire, il est toujours possible de choisir le nombre n assez grand pour que l'on ait:

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \varepsilon;$$

$$|F_\nu(x)| < \varepsilon_\nu;$$

$$\sum_{\mu=\nu}^{\infty} |F_\mu(x)| < \delta,$$

à la condition

$$\nu \geqq n \text{ et } |x - x_0| \leqq \rho.$$

La série $\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$ est donc uniformément convergente pour le domaine $|x - x_0| \leqq \rho$. Chacune des fonctions $F_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ peut aussi pour ce même domaine être mise sous la forme d'une série $\mathfrak{P}(x - x_0)$. L'on a donc, en vertu d'un théorème[1] connu, pour $|x - x_0| \leqq \rho$,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x) = \mathfrak{P}(x - x_0).$$

On voit immédiatement qu'il en est de même quand $x_0 = \infty$, sans que ce point appartienne à $Q + Q'$, pourvu que l'on introduise $\frac{1}{x}$ à la place de $(x - x_0)$.

Soit maintenant a_λ l'un des points dont l'ensemble est Q. Prenons la quantité positive ρ assez petite, pour que, à l'exception de $(x = a_\lambda)$, aucune des valeurs de x pour lesquelles $|x - a_\lambda| \leqq \rho$ n'appartienne à l'ensemble $Q + Q'$.

De la même manière que lorsqu'il s'agissait plus haut de la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$ pour le domaine $|x - x_0| \leqq \rho$, on comprendra sans peine que la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x) - F_\lambda(x)$ est uniformément convergente pour le domaine $|x - a_\lambda| \leqq \rho$, et l'on obtiendra ainsi

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x) - F_\lambda(x) = \mathfrak{P}(x - a_\lambda),$$

---

[1] K. Weierstrass: *Zur Functionenlehre*, p. 7.

d'où suit à son tour

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x) = G_\lambda\left(\frac{1}{x - a_\lambda}\right) + \mathfrak{P}(x - a_\lambda).$$

Il en est aussi évidemment de même de $(a_\lambda = \infty)$.

J'ai donc prouvé que l'expression analytique

$$F_x = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

possède les propriétés indiquées dans mon théorème.

La série

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu$$

donnée plus haut, est convergente dès que $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < 1$. Il en suit qu'il est toujours possible de trouver un nombre m_ν assez grand pour que

$$\left|\sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu\right| < \varepsilon_\nu$$

tant que x remplit la condition $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \varepsilon < 1$. Comme il a déjà été dit, j'entends ici par $\frac{a_\nu - \infty}{x - \infty}$ l'expression $\frac{x}{a_\nu}$.

Je vais maintenant donner une méthode très simple pour le calcul de m_ν. On suppose à cet effet que les points a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, de même que les fonctions

$$G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

ont été choisis arbitrairement dans les limites données.

Je pose:

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)=\frac{c_{-1}^{(\nu)}}{x-a_\nu}+\frac{c_{-2}^{(\nu)}}{(x-a_\nu)^2}+\frac{c_{-3}^{(\nu)}}{(x-a_\nu)^3}+\cdots.$$

Je suppose en outre que a_ν n'est ni zéro, ni infini.

Si b_ν est une quantité finie, on obtient les coefficients $A^{(\nu)}$ par le système d'égalités:

$$A_0^{(\nu)}=0$$

$$A_1^{(\nu)}=\frac{c_{-1}^{(\nu)}}{a_\nu-b_\nu}$$

$$A_2^{(\nu)}=\frac{c_{-1}^{(\nu)}}{a_\nu-b_\nu}+\frac{c_{-2}^{(\nu)}}{(a_\nu-b_\nu)^2}$$

$$A_3^{(\nu)}=\frac{c_{-1}^{(\nu)}}{a_\nu-b_\nu}+\frac{2}{\lfloor 1}\,\frac{c_{-2}^{(\nu)}}{(a_\nu-b_\nu)^2}+\frac{c_{-3}^{(\nu)}}{(a_\nu-b_\nu)^3}$$

. . . .

. . . .

$$A_\mu^{(\nu)}=\frac{c_{-1}^{(\nu)}}{a_\nu-b_\nu}+\frac{\mu-1}{\lfloor 1}\,\frac{c_{-2}^{(\nu)}}{(a_\nu-b_\nu)^2}+\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{\lfloor 2}\,\frac{c_{-3}^{(\nu)}}{(a_\nu-b_\nu)^3}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-[r-1])}{\lfloor r-1}\cdot\frac{c_{-r}^{(\nu)}}{(a_\nu-b_\nu)^r}+\cdots$$

. . . .

. . . .

et si b_ν est infini on obtient les mêmes coefficients par le système d'égalités

$$A_0^{(\nu)} = -\frac{c_{-1}^{(\nu)}}{a_\nu} + \frac{c_{-2}^{(\nu)}}{a_\nu^2} - \frac{c_{-3}^{(\nu)}}{a_\nu^3} + \ldots + (-1)^r . \frac{c_{-r}^{(\nu)}}{a_\nu^r} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_1^{(\nu)} = -\frac{c_{-1}^{(\nu)}}{a_\nu} + 2\frac{c_{-2}^{(\nu)}}{a_\nu^2} - 3\frac{c_{-3}^{(\nu)}}{a_\nu^3} + \ldots + (-1)^r . r . \frac{c_{-r}^{(\nu)}}{a_\nu^r} + \ldots\ldots\ldots$$

$$A_2^{(\nu)} = -\frac{c_{-1}^{(\nu)}}{a_\nu} + 3\frac{c_{-2}^{(\nu)}}{a_\nu^2} - 6\frac{c_{-3}^{(\nu)}}{a_\nu^3} + \ldots + (-1)^r . \frac{r(r+1)}{\underline{|2}} . \frac{c_{-r}^{(\nu)}}{a_\nu^r} + \ldots$$

. . . .

. . . .

$$A_\mu^{(\nu)} = -\frac{c_{-1}^{(\nu)}}{a_\nu} + \frac{\mu+1}{\underline{|1}}\frac{c_{-2}^{(\nu)}}{a_\nu^2} - \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{\underline{|2}}\frac{c_{-3}^{(\nu)}}{a_\nu^3} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^r \frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+r-1)}{\underline{|r-1}}\frac{c_{-r}^{(\nu)}}{a_\nu^r} + \ldots$$

. . . .

. . . .

La suite $G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ étant, par rapport aux puissances de $\frac{1}{x-a_\nu}$, une série à convergence absolue et illimitée, la somme

$$\frac{|c_{-1}^{(\nu)}|}{\xi_\nu} + \frac{|c_{-2}^{(\nu)}|}{\xi_\nu^2} + \frac{|c_{-3}^{(\nu)}|}{\xi_\nu^3} + \ldots,$$

où la quantité ξ_ν peut être une quantité positive quelconque, possède toujours une valeur positive finie, qui peut être désignée par $g_\xi^{(\nu)}$. On aura donc $|c_{-r}^{(\nu)}| \leqq g_\xi^{(\nu)}\xi_\nu^r$. Quand b_ν est fini, on obtiendra par conséquent

$$|A_\mu^{(\nu)}| \leqq \frac{g_\xi^{(\nu)} . \xi_\nu}{|a_\nu - b_\nu|} . \left(1 + \frac{\xi_\nu}{|a_\nu - b_\nu|}\right)^{\mu-1},$$

et, dans le cas où b_ν est infini:

$$|A_\mu^{(\nu)}| \leqq \frac{g_\xi^{(\nu)} \cdot \xi_\nu}{|a_\nu|} \cdot \left(1 - \frac{\xi_\nu}{|a_\nu|}\right)^{-\mu-1}.$$

Posons maintenant deux quantités positives, α et β, remplissant les conditions

$$\beta < 1, \quad (1 + \alpha)\varepsilon < 1, \quad \frac{\varepsilon}{1-\beta} < 1.$$

Il existe toujours une quantité positive ε', telle que

$$(1 + \alpha)\varepsilon < \varepsilon' < 1, \quad \frac{\varepsilon}{1-\beta} < \varepsilon' < 1.$$

Choisissons ensuite, ce qui est toujours possible, les quantités ξ_ν correspondant à une quantité finie b_ν, de telle sorte que $\frac{\xi_\nu}{|a_\nu - b_\nu|} < \alpha$, et les quantités ξ_ν correspondant à $b_\nu = \infty$, de façon que $\frac{\xi_\nu}{|a_\nu|} < \beta$.

Quand b_ν est une quantité finie, et que $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \varepsilon$, on aura donc

$$\sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} |A_\mu^{(\nu)}| \cdot \left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right|^\mu \leqq \frac{g_\xi^{(\nu)} \cdot \alpha}{1 + \alpha} \cdot \varepsilon'^{m_\nu+1} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon'}.$$

Si, au contraire, $b_\nu = \infty$, et si $\left|\frac{x}{a_\nu}\right| < \varepsilon$, on obtient

$$\sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} |A_\mu^{(\nu)}| \cdot \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^\mu \leqq \frac{g_\xi^{(\nu)} \cdot \beta}{1-\beta} \cdot \varepsilon'^{m_\nu+1} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon'}.$$

On n'aura donc qu'à choisir le nombre m_ν de façon que, dans le premier cas,

$$\frac{g_\xi^{(\nu)} \cdot \alpha}{1 + \alpha} \cdot \varepsilon'^{m_\nu+1} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon'} < \varepsilon_\nu,$$

et, dans le second cas,

$$\frac{g_\xi^{(\nu)} \cdot \beta}{1 - \beta} \cdot \varepsilon'^{m_\nu+1} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon'} < \varepsilon_\nu;$$

qu'à poser ensuite

$$F_\nu(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) - \sum_{\mu=0}^{m_\nu} A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu,$$

quand a_ν est une quantité finie qui n'est pas zéro, et

$$F_\nu(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right),$$

lorsque a_ν est zéro ou infini, et à faire enfin

$$F_x = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x),$$

pour obtenir en F_x une expression analytique ayant les propriétés indiquées dans mon théorème.

La grande latitude que l'on possède dans le choix des quantités ε, ε_1, ε_2, $\varepsilon_3, \ldots$ et, dans certains cas, b_1, b_2, $b_3, \ldots$, laisse une infinité de moyens divers de former une pareille expression jouissant des propriétés requises.

Soient maintenant F_x une certaine expression de l'espèce considérée, et G_x une autre expression analytique se comportant d'une façon régulière, du moins au voisinage de chaque point n'appartenant pas à l'ensemble Q', mais pouvant être prise d'une manière parfaitement arbitraire à tous autres égards.

Ces deux choses-ci sont alors évidentes, savoir: que

$$\overline{F}_x = F_x + G_x$$

possède toujours les propriétés indiquées dans mon théorème, et que toutes les expressions analytiques jouissant de ces mêmes propriétés peuvent également être mises sous une forme pareille.

Si l'on met G_x sous la forme $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$, où, du moins au voisinage de chaque point n'appartenant pas à Q', chacune des fonctions

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_\nu(x), \ldots$$

se comporte d'une façon régulière et $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$ converge d'une manière uniforme, $\overline{F}_x$ pourra s'écrire

$$\overline{F}_x = \sum_{\nu=1}^{\infty}\{F_\nu(x) + f_\nu(x)\}.$$

On obtient p. ex. une expression pareille $\overline{F}_x$ en posant

$$f_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} B_\mu^{(\nu)}\left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu,$$

où $f_\nu(x)$ est une série toujours convergente par rapport aux puissances de $\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}$, et où $|f_\nu(x)| < \varepsilon'_\nu$ dès que $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| \leqq \varepsilon'$, ε' et $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_\nu, \ldots$ étant des quantités positives, et la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon'_\nu$ étant convergente.

On trouvera l'exposé et la démonstration du théorème qui vient d'être développé, dans le Bulletin (Öfversigt) des travaux de l'Académie royale des sciences de Suède pour le 7 Juin 1876, avec cette restriction cependant, que Q' ne contient que le point $x = \infty$, et que les fonctions

$$G_1\left(\frac{1}{x - a_1}\right), \quad G_2\left(\frac{1}{x - a_2}\right), \ldots, \quad G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right), \ldots$$

sont toutes des fonctions entières rationnelles. La démonstration dont je me suis servi à cette occasion-là, est toutefois différente à plusieurs égards de celle que je viens de donner. Quant à cette dernière, elle est conforme, dans des points essentiels, à celle employée par WEIERSTRASS dans son mémoire: »*Ueber einen functionentheoretischen Satz des Herrn* G. MITTAG-LEFFLER». (Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, August 1880.) J'avais déjà exposé la même démonstration dans mon cours à l'université d'Helsingfors (Finlande) au commencement de l'année 1879.[1] J'ai exposé ce fait que mon

---

[1] Voir outre le mémoire de WEIERSTRASS déjà cité, les mémoires suivants: »ULISSE DINI. *Alcuni teoremi sulle funzioni di una variabile complessa.* In me-

théorème est également valable quand Q' continue à se composer du seul point $x = \infty$, mais que les

$$G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

sont des fonctions entières *transcendantes*, dans le Bulletin (Öfversigt) des travaux de l'Académie royale des sciences de Suède pour le 12 Décembre 1877, et je l'ai démontré dans le Bulletin du 8 Février 1882 de la même Académie, ainsi que dans les Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences de France, 13 Février 1882.(1)

Dans ce qui précède, l'ensemble Q a pu être fixé arbitrairement. Si l'on exclut du champ de la variable x l'ensemble $Q + Q'$, il reste toujours un nombre de *continua* différents entre eux, et dont chacun se compose d'une seule pièce. L'ensemble de tous ces *continua* est un ensemble fini, ou possède la même puissance que la série des nombres $1, 2, \ldots, \nu, \ldots$ (2) Si l'on entend par $\mathfrak{A}$ un de ces *continua*, on peut montrer que l'expression $\overline{F}_x$ constitue toujours en dedans de $\mathfrak{A}$ la même fonction monogène. En effet on a le théorème: »Une expression analytique, qui se comporte d'une manière régulière au voisinage de chaque point appartenant à un *continuum* composé d'une seule pièce, représente toujours en dedans de ce *continuum* une même fonction monogène et uniforme». Ce théorème est une conséquence immédiate de la définition qui a été donnée aux expressions de »se comporter d'une manière régulière au voisinage d'un point», et »être un *continuum* composé d'une seule pièce».

---

moriam DOMINICI CHELINI Collectanea Mathematica nunc primum edita cura et studio L. CREMONA et E. BELTRAMI.»

»CH. HERMITE. *Sur quelques points de la théorie des fonctions.* Extrait d'une lettre de M. HERMITE à M. MITTAG-LEFFLER. Acta Societatis Scientiarum Fennicæ, T. XII», ainsi que »Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 91».

»E. SCHERING. *Das Anschliessen einer Function an algebraische Functionen in unendlich vielen Stellen.* Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. XXVII.»

(1) Voir aussi: F. CASORATI. *Aggiunte a recenti lavori dei Sig^i WEIERSTRASS e MITTAG-LEFFLER sulle funzioni di una variabile complessa.* Annali di Matematica pura ed applicata. Serie II^a. Tomo X°.»

(2) Voir ce journal, T. 2, p. 366.

Mettons maintenant que la limite complète du *continuum* $\mathfrak{A}$ dont j'ai parlé ci-dessus, consiste en un ensemble $Q_1 + Q_1'$, où Q_1 est un ensemble isolé contenu en Q, et tel, qu'aucune des fonctions

$$G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

correspondant à un point a_ν de Q_1 ne disparaisse identiquement. La fonction constituée par $\overline{F}_x$ en dedans de $\mathfrak{A}$ est alors une fonction monogène et uniforme qui ne peut pas être continuée au delà de $\mathfrak{A}$. C'est ce qui suit immédiatement de cette circonstance que chaque point de Q_1 est un point singulier de la fonction et que, par conséquent, chaque point de Q_1' est aussi un point singulier.

C'est une question de grand intérêt que de savoir si chacun des autres *continua* restant après que l'ensemble $Q + Q'$ a été exclu du champ de la variable x, constitue de même une fonction monogène et uniforme qui ne peut pas être continuée au delà de ce *continuum.* Cette question ne sera toutefois pas traitée ici.

Mais je ferai observer que si l'on apporte au choix de Q cette restriction que l'ensemble $Q + Q'$ doit constituer la limite complète d'un *continuum* composé d'une seule pièce, on obtient, au lieu du théorème ***A***, le théorème suivant:

B. »Soit Q un ensemble isolé dans le domaine de la variable x choisi de telle sorte, que $Q + Q'$ constitue la limite complète d'un *continuum* $\mathfrak{A}$. Soient ensuite $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ tous les points de l'ensemble Q, et

$$G_1\left(\frac{1}{x - a_1}\right), \quad G_2\left(\frac{1}{x - a_2}\right), \ldots, \quad G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right), \ldots$$

une série de fonctions monogènes uniformes, où $G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ désigne une fonction entière rationnelle ou transcendante de $\frac{1}{x - a_\nu}$, qui s'évanouit lorsque

$$\frac{1}{x - a_\nu} = 0,$$

sans toutefois être identiquement nulle: Il est toujours possible de former une expression analytique représentant une fonction monogène uniforme, laquelle se comporte d'une manière régulière au voisinage de chaque point situé en dedans de $\mathfrak{A}$, et qui, dans un entourage suffisamment petit d'un point a_ν appartenant à Q, peut être mise sous la forme

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + \mathfrak{P}(x-a_\nu).$$

Chaque point de $Q + Q'$ est un point singulier de cette fonction.»

Il a été montré de quelle manière on peut toujours former une expression analytique qui représente, en dedans de $\mathfrak{A}$, une fonction pareille. Si le *continuum* $\mathfrak{A}$ est tel qu'il existe des points situés en dehors de ce *continuum,* l'expression $\overline{F}_x$ a toutefois, même pour chacun de ces points, une signification déterminée, et s'y comporte d'une façon régulière. Les valeurs que $\overline{F}_x$ reçoit en de tels points situés en dehors de $\mathfrak{A}$, appartiennent néanmoins à d'autres fonctions que celle qui est constituée par $\overline{F}_x$ en dedans de $\mathfrak{A}$. [1] Si maintenant l'on supprime la condition que $\overline{F}_x$ doit se comporter d'une façon régulière même pour les points situés en dehors de $\mathfrak{A}$, il est possible d'indiquer, pour une expression pareille, une loi de formation encore plus générale que celle donnée précédemment. Cette condition manque aussi évidemment de toute signification,

---

[1] Si l'on part de l'ensemble Q donné dans l'exemple de la note page 11, et que l'on suppose qu'aucune des fonctions $G_{nk}\left(\frac{1}{x-a_{nk}}\right)$ n'est identiquement zéro, l'expression analytique $\overline{F}_x$ correspondant à l'ensemble Q et aux fonctions $G_{nk}\left(\frac{1}{x-a_{nk}}\right)$, représente, dans un cercle ayant l'origine pour centre et l'unité pour rayon, une certaine fonction monogène et uniforme qui se comporte d'une manière singulière dans l'entourage de chacun des points

$$a_{2p\,k} = \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)e^{\frac{2k\pi i}{2p+1}} \qquad p=0,1,2,\ldots;\ k=0,1,2,\ldots,2p$$

ainsi qu'aux environs des points situés sur la périphérie du cercle. Cette fonction est régulière au voisinage de chaque autre point appartenant au cercle. Elle ne peut pas être continuée au delà du cercle.

L'expression analytique $\overline{F}_x$ représente aussi une autre fonction monogène uniforme s'il s'agit simplement, soit de déduire, de certains éléments de détermination donnés, une fonction monogène, uniforme et régulière en dedans de $\mathfrak{A}$, soit aussi de trouver une telle expression d'une fonction monogène et uniforme donnée, que cette expression indique immédiatement la valeur de la fonction qui correspond à une valeur d'argument donnée.

Supposons par conséquent que le domaine $\mathfrak{A}$ soit tel qu'il existe des points situés en dehors.

Soient, dans ce cas, b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ des points situés en dehors de $\mathfrak{A} + Q$ ou sur la limite même de ce domaine, et désignons successivement par b les divers points appartenant à l'ensemble Q', ou, en d'autres termes, constituant la limite de $\mathfrak{A} + Q$. Entendons ensuite par β_ν la limite inférieure de $|b - b_\nu|$. Figurons-nous ultérieurement que nos points b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ont été choisis de manière que la limite supérieure des quantités β_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ soit une quantité finie déterminée β, et que

$$\lim_{\nu=\infty} (|a_\nu - b_\nu| - \beta_\nu) = 0,$$

ou que, à chaque quantité positive θ, réponde un nombre entier positif n, tel que $|a_\nu - b_\nu| - \beta_\nu < \theta$ dès que $\nu \geqq n$.

Le cas où $b_\nu = \infty$ n'est pas exclu dans le précédent, mais alors $a_\nu - \infty$ signifie $\frac{1}{a_\nu}$, et $b - \infty$ signifie $\frac{1}{b}$.

Si l'on choisit, dans l'ensemble Q', les points b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ de la même manière qu'à la page 11, la totalité de ces conditions sera remplie. Les quantités β_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ seront en ce cas toutes égales à zéro.

---

n'existant qu'en dehors du cercle mentionné, et qui ne peut par conséquent se continuer dans l'intérieur de ce cercle. Cette fonction se comporte d'une façon singulière au voisinage de chacun des points

$$a_{2p-1\,k} = \left(1 + \frac{1}{2p}\right) e^{\frac{2k\pi i}{2p}} \qquad p = 1, 2, \ldots;\ k = 0, 1, 2, \ldots, 2p-1$$

comme aussi dans l'entourage de chacun des points situés sur la périphérie du cercle.

Pour la première fonction, $\mathfrak{A} + Q$ est égal à l'intérieur d'une surface circulaire ayant l'origine pour centre et l'unité pour rayon. Pour la fonction mentionnée en dernier lieu, $\mathfrak{A} + Q$ est égal à la partie du plan tombant en dehors de la surface précitée. Pour les deux fonctions, la périphérie du cercle est égale à Q'.

On verra toutefois sans peine comment il est possible d'indiquer des cas où les quantités b_ν peuvent être choisies aussi d'une autre manière, de façon à remplir les conditions données. Soit, p. ex., comme c'est le cas de la première des fonctions mentionnées dans la note de la page précédente, le domaine $\mathfrak{A} + Q$ l'intérieur d'une ligne circulaire, elle-même égale à Q', et ayant $x = 0$ pour centre. Si l'on met alors $b_\nu = \infty$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), la totalité des conditions indiquées sera remplie. Ou aussi, comme c'est le cas de la dernière des fonctions données dans la note de la page précédente, soit $\mathfrak{A} + Q$ l'extérieur d'une ligne circulaire égale à Q', et dont le centre est $x = 0$. Toutes les conditions seront remplies, si l'on pose $b_\nu = 0$ ($\nu = 1, 2, \ldots$).

Fixons, maintenant, exactement de la même manière qu'en formant l'expression F_x du théorème $\boldsymbol{A}$, la série $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$, où chaque terme est une quantité positive, et où la somme de tous les termes a une valeur finie déterminée; mais, au lieu de la quantité $\varepsilon < 1$, introduisons une série infinie de grandeurs positives $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(\nu)}, \ldots$ soumises à la condition $\lim \varepsilon^{(\nu)} = 1$. Formons ensuite les fonctions $F_\nu(x)$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) comme auparavant, mais avec la modification que les nombres m_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) seront maintenant choisis de telle sorte, que le module de la série

$$\sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu$$

soit inférieur à ε_ν, dès que $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| \leqq \varepsilon^{(\nu)}$, tandis que m_ν n'avait besoin auparavant que de remplir la condition

$$\left| \sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu \right| < \varepsilon_\nu,$$

dès que $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| \leqq \varepsilon$.

La série $\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$ représente alors une fonction monogène uniforme et régulière en dedans de $\mathfrak{A}$, jouissant des propriétés indiquées au théorème $\boldsymbol{B}$.

La preuve peut être donnée exactement de la même manière que lorsque les fonctions $F_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ avaient été déduites d'après le mode de formation plus spécial indiqué auparavant, si l'on a réussi toutefois à établir préalablement qu'il existe toujours un nombre entier positif n tel que $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \varepsilon^{(\nu)}$, dès que $\nu \geqq n$, quand $|x - x_0| \leqq \rho$, où x_0 est un point donné de $\mathfrak{A} + Q$, et où ρ a été choisi de telle sorte, qu'il n'existe pas, dans le domaine $|x - x_0| \leqq \rho$, d'autre point appartenant à l'ensemble $Q + Q'$ que le point x_0 tout au plus.

On peut démontrer de la manière suivante qu'il existe toujours un nombre n de l'espèce indiquée ci-haut. Si l'on fait prendre successivement à x toutes les valeurs pour lesquelles $|x - x_0| \leqq \rho$, et que l'on fasse parcourir en outre à ν la série des nombres $1, 2, 3, \ldots$ dans l'expression $|x - b_\nu| - \beta_\nu$, il existera nécessairement une quantité positive déterminée l, constituant la limite inférieure de

$$|x - b_\nu| - \beta_\nu.$$

On aura donc

$$|x - b_\nu| \geqq \beta_\nu + l,$$

dès que $|x - x_0| \leqq \rho$. Vu la manière dont les quantités b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ont été fixées, il existe toujours, quand $\theta < l$ est une quantité positive déterminée, un nombre entier positif n' tel, que

$$|a_\nu - b_\nu| < \beta_\nu + \theta,$$

dès que $\nu \geqq n'$. Par conséquent,

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \frac{\theta + \beta_\nu}{l + \beta_\nu}.$$

Or, β constituant la limite supérieure de β_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, on a

$$\frac{\theta + \beta_\nu}{l + \beta_\nu} \leqq \frac{\theta + \beta}{l + \beta},$$

et par suite

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \frac{\theta + \beta}{l + \beta}.$$

Vu la condition $\lim \varepsilon^{(\nu)} = 1$; attendu, en outre, que β est une quantité finie déterminée, et que $\theta < l$, il est toujours possible de trouver un nombre entier positif n'' tel que

$$\frac{\theta+\beta}{l+\beta} < \varepsilon^{(\nu)}, \text{ dès que } \nu \geqq n''.$$

Or, si l'on désigne par n le plus grand des deux nombres n' et n'', on aura par conséquent

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \varepsilon^{(\nu)}, \text{ dès que } \nu \geqq n.$$

Nous avons donc obtenu, dans la nouvelle série

$$F_x = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x),$$

une expression qui représente en dedans de $\mathfrak{A}$ une fonction $F(x)$ ayant les propriétés indiquées au théorème $\boldsymbol{B}$. Si, maintenant, l'on entend par $G(x)$ une fonction monogène, uniforme et régulière en dedans de $\mathfrak{A} + Q$, mais arbitraire à tous autres égards,

$$\overline{F}(x) = F(x) + G(x)$$

a évidemment à tous égards les mêmes propriétés que celles qui ont été démontrées appartenir à $F(x)$, et, d'autre part, sous la forme $\overline{F}(x)$ sont comprises toutes les fonctions qui possèdent ces propriétés.

Pour obtenir les nombres m_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$, on peut employer avec une modification insignifiante la même méthode que dans le théorème $\boldsymbol{A}$. Au lieu des deux quantités fixes α et β, il suffit en effet d'introduire les quantités

$$\frac{\xi_\nu}{|a_\nu - b_\nu|} = \alpha_\nu,$$

et $\qquad\qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{\xi_\nu}{|a_\nu|} = \beta_\nu.$$

On choisit ensuite les quantités ξ_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ de telle sorte que

$$(1 + \alpha_\nu)\varepsilon^{(\nu)} < 1, \text{ et } \frac{\varepsilon^{(\nu)}}{1 - \beta_\nu} < 1.$$

A chaque indice ν correspond un nombre positif $\varepsilon^{(\nu)'}$ tel que

$$(1 + \alpha_\nu)\varepsilon^{(\nu)} < \varepsilon^{(\nu)'} < 1, \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon^{(\nu)}}{1 - \beta_\nu} < \varepsilon^{(\nu)'} < 1.$$

Si b_ν est une quantité finie, on choisit maintenant le nombre m_ν tel que

$$\frac{g_\varepsilon^{(\nu)} \cdot a_\nu}{1 + a_\nu} \cdot \left(\varepsilon^{(\nu)'}\right)^{m_\nu + 1} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon^{(\nu)'}} < \varepsilon_\nu,$$

et si $b_\nu = \infty$, on choisit m_ν de manière que

$$\frac{g_\varepsilon^{(\nu)} \cdot \beta_\nu}{1 - \beta_\nu} \cdot \left(\varepsilon^{(\nu)'}\right)^{m_\nu + 1} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon^{(\nu)'}} < \varepsilon_\nu.$$

Mon théorème ***B*** a été exposé et démontré dans le Bulletin (Öfversigt) des travaux de l'Académie royale des sciences de Suède pour le 12 Avril 1882, ainsi que dans les Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 10 Avril et 14 Août 1882. J'ai toutefois considéré spécialement, dans ces deux publications, le cas mentionné auparavant, où le domaine $\mathfrak{A} + Q$ se compose de l'intérieur d'une ligne circulaire égale elle-même à Q', et ayant $x = 0$ pour centre. Les quantités b_ν ont aussi toutes été supposées égales à ∞. Si l'on désigne alors par R le rayon du cercle $\mathfrak{A} + Q$, toutes les quantités β_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ seront égales à $\frac{1}{R}$. On pourra choisir les quantités $\varepsilon^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ de telle sorte que

$$\varepsilon^{(\nu)} = \left|\frac{a_\nu}{R}\right|.$$

La fonction $G(x)$ devient une série procédant suivant les puissances positives entières de x, et convergente du moins pour $|x| < R$. Si le domaine $\mathfrak{A} + Q$ se compose de la partie du domaine de la variable x, tombant en dehors d'une ligne circulaire elle-même égale à Q', ayant $x = 0$ pour centre et R pour rayon, toutes les quantités b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ peuvent être prises égales à zéro. Les quantités β_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ seront alors toutes égales à R. On peut prendre de même

$$\varepsilon^{(\nu)} = \left|\frac{R}{a_\nu}\right|.$$

La fonction $G(x)$ devient en ce cas une série procédant suivant les puissances positives entières de $\frac{1}{x}$, et convergente du moins pour $|x| > R$.

Soit maintenant $F(x)$ une fonction monogène uniforme donnée, pour laquelle l'ensemble P de tous ses points singuliers est tel que l'égalité $P - P' = Q = 0$ n'a pas lieu. En vertu du théorème $\boldsymbol{B}$ on peut toujours former une expression analytique, qui représente une fonction monogène uniforme, dont tous les points singuliers sont compris dans l'ensemble $Q + Q'$ et qui de plus est telle, que la différence entre elle et $F(x)$ est une nouvelle fonction monogène et uniforme, qui a les mêmes points réguliers que $F(x)$ mais qui en plus se comporte régulièrement aussi pour chaque point de l'ensemble $P - P' = Q$. On a par conséquent le théorème suivant.

$\boldsymbol{B}'$. Soit $F(x)$ une fonction monogène uniforme qui possède des points singuliers isolés. Il est toujours possible de former une expression analytique, représentant une autre fonction monogène uniforme telle, que la différence entre elle et $F(x)$ est une nouvelle fonction, qui se comporte régulièrement non seulement partout où c'est le cas pour la fonction proposée, mais aussi dans le voisinage de chaque point singulier isolé de cette dernière.

§ 2.

Pour pousser plus loin les recherches, exposées au § 1, il est nécessaire de commencer par développer quelques définitions et quelques théorèmes concernant les produits infinis.

On dit qu'un produit infini

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + v_\nu)$$

est convergent lorsque, après avoir fixé arbitrairement une quantité positive δ, il est toujours possible de trouver un nombre entier m tel, que le module de

$$\prod_{\nu=n}^{n+n'}(1 + v_\nu) - 1$$

pour chaque valeur positive de n', soit moindre que δ, aussitôt que $n \geqq m$.

Or, on peut démontrer que:

a »si $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + v_\nu)$ est un produit convergent, dans lequel chaque facteur est une quantité finie déterminée, différente de zéro, le produit $\prod_{\nu=1}^{n}(1 + v_\nu)$ tend vers une limite finie et déterminée lorsque n croît au delà de toute limite; autrement dit, il existe toujours une, et une seule, quantité finie et déterminée telle que, dans chaque voisinage de cette dernière, on trouve une infinité des valeurs que prend le produit $\prod_{\nu=1}^{n}(1 + v_\nu)$ pour les différentes valeurs de n.»

La définition suivante se trouve alors légitimée:

Un produit convergent $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + v_\nu)$ est accepté comme égal à la limite, vers laquelle converge le produit $\prod_{\nu=1}^{n}(1 + v_\nu)$ pour les valeurs croissantes de n.

Il est facile maintenant de démontrer les propositions suivantes:

b »un produit convergent ne peut être égal à zéro, à moins qu'un de ses facteurs ne soit égal à zéro;»

c »si $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + v_\nu)$ est un produit convergent, la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} w_\nu$$

où

$$\begin{aligned}
w_1 &= 1 + v_1 \\
w_2 &= (1 + v_1)v_2 \\
w_3 &= (1 + v_1)(1 + v_2)v_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
w_\nu &= (1 + v_1)(1 + v_2)\ldots(1 + v_{\nu-1})v_\nu \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

sera convergente aussi, et on aura de plus

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + v_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} w_\nu.»$$

On peut fixer les notions de la convergence *uniforme* et *absolue* des produits infinis tout à fait de la même manière qu'on le fait pour les séries infinies. [1] Pour le but que j'ai immédiatement en vue il suffit de bien formuler la définition de la convergence *uniforme.*

Un produit infini $\prod_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$, *dont les facteurs sont des fonctions d'un nombre quelconque de variables, converge* ***uniformément*** *dans une certaine partie* $\mathfrak{A}$ *de son domaine de convergence si à chaque valeur positive* δ, *fixée arbitrairement, correspond toujours un nombre entier* m *tel, que le module de*

$$\prod_{\nu=n}^{n+n} f_\nu - 1$$

est plus petit que δ, *pour tous les systèmes de valeurs des variables appartenant au domaine* $\mathfrak{A}$, *et pour chaque valeur positive de* n', *si tôt que* $n \geqq m$.

Or, on s'assure aisément que:

d »si le produit $\prod_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ est uniformément convergent dans le domaine $\mathfrak{A}$, c'est aussi le cas pour la série

$$f_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (f_{\nu+1} - 1) \prod_{\mu=1}^{\nu} f_\mu$$

et l'on a de plus

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} f_\nu = f_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (f_{\nu+1} - 1) \prod_{\mu=1}^{\nu} f_\mu.«$$

De là découle immédiatement le théorème important suivant: [2]

e »soient R et R' deux quantités positives données, telles que $R < R'$, et soient

$$P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x), \ldots$$

un nombre infini de séries, ordonnées suivant les puissances positives et négatives de x, lesquelles sont toutes convergentes, si tôt que

$$R < |x| < R'.$$

---

(1) K. Weierstrass: *Zur Functionenlehre,* p. 3 et 4.

(2) Voir Weierstrass: *Zur Functionenlehre,* p. 7.

Supposons de plus que

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} P_\nu(x)$$

soit uniformément convergent pour toutes les valeurs de x qui non seulement satisfont à la condition

$$R < |x| < R',$$

mais ont en outre toutes le même module. On peut toujours trouver dans ce cas une série, ordonnée suivant les puissances positives et négatives de x, laquelle est convergente et égale à

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} P_\nu(x)$$

pour toutes les valeurs de x remplissant la condition

$$R < |x| < R'.\text{»}$$

Ces quelques théorèmes empruntés à la théorie des produits infinis, que je viens d'exposer, suffisent pour le but que j'ai immédiatement en vue, et je puis maintenant passer à la démonstration d'un théorème nouveau, qui correspond complètement au théorème ***B*** du § précédent.

A. »Soit Q un ensemble isolé infini de points dans le domaine de la variable x, tel que l'ensemble $Q + Q'$ forme la limite complète d'un *continuum* $\mathfrak{A}$. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ les points différents de l'ensemble Q, et soit $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$ une série de nombres entiers positifs ou négatifs. Il est toujours possible de former une expression analytique représentant une fonction monogène uniforme, laquelle se comporte régulièrement à l'intérieur du domaine $\mathfrak{A}$, n'y devient pas zéro et qui en outre dans le voisinage de chaque point a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ peut être mise sous la forme

$$(x - a_\nu)^{n_\nu} e^{\mathfrak{P}(x - a_\nu)}.$$

Chaque point de Q' est un point singulier essentiel de cette fonction.»

Pour démontrer ce théorème on peut procéder de la manière suivante. De même que dans le § 1 on peut adjoindre à chaque point a_ν, qui n'est ni zéro ni infini, un nouveau point b_ν, placé en dehors ou sur la limite du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$; désignons par β_ν la limite inférieure de $|b_\nu - b|$ où b signifie l'un après l'autre tous les points de Q' et fixons, comme il est toujours possible de le faire, les quantités b_ν de manière que

$$\lim_{\nu=\infty}(|a_\nu - b_\nu| - \beta_\nu) = 0$$

et que la limite supérieure de β_ν soit une quantité finie. Choisissons de plus des quantités positives $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$ et $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(\nu)}, \ldots$ de la même façon qu'au § 1, c'est à dire de manière que $\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon_\nu$ ait une valeur finie et que $\lim_{\nu=\infty}\varepsilon^{(\nu)} = 1$.

Supposons que a_ν ne soit ni 0 ni ∞.

Si b_ν n'est point ∞, on a

$$\frac{n_\nu}{x - a_\nu} = \frac{n_\nu}{x - b_\nu} + \frac{n_\nu}{x - b_\nu}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu$$

équation qui a lieu, si tôt que

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < 1.$$

Il en découle immédiatement

$$\left(1 - \frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^{n_\nu} = e^{-n_\nu \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu}\left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu}$$

aussitôt que $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < 1$. Cette équation a lieu même dans le cas où $b_\nu = \infty$, si par $\frac{a_\nu - \infty}{x - \infty}$ on entend l'expression $\frac{x}{a_\nu}\cdot$ On a en effet

$$\frac{n_\nu}{x - a_\nu} = -\frac{n_\nu}{a_\nu}\cdot\frac{1}{1 - \frac{x}{a_\nu}} = -\frac{n_\nu}{a_\nu}\cdot\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu$$

si tôt que $\left|\frac{x}{a_\nu}\right| < 1$ et par conséquent aussi:

$$\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)^{n_\nu} = e^{-n_\nu\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu}$$

si tôt que $\left|\frac{x}{a_\nu}\right| < 1$.

On voit par conséquent que

$$\left(1-\frac{a_\nu-b_\nu}{x-b_\nu}\right)^{n_\nu} e^{n_\nu\sum\limits_{\mu=1}^{m_\nu}\frac{1}{\mu}\left(\frac{a_\nu-b_\nu}{x-b_\nu}\right)^\mu} = e^{-n_\nu\sum\limits_{\mu=m_\nu+1}^{\infty}\frac{1}{\mu}\left(\frac{a_\nu-b_\nu}{x-b_\nu}\right)^\mu}$$

dès que $\left|\frac{a_\nu-b_\nu}{x-b_\nu}\right| < 1$. Le nombre m_ν désigne ici un nombre entier positif ou nul. Si $m_\nu = 0$, on doit remplàcer le facteur exponentiel

$$e^{n_\nu\sum\limits_{\mu=1}^{m_\nu}\frac{1}{\mu}\left(\frac{a_\nu-b_\nu}{x-b_\nu}\right)^\mu}$$

par l'unité.

Adjoignons à chaque point a_ν, qui n'est égal ni à 0 ni à ∞, un nombre m_ν assez grand pour que

$$\left|n_\nu\sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty}\frac{1}{\mu}\left(\frac{a_\nu-b_\nu}{x-b_\nu}\right)^\mu\right| < \varepsilon_\nu$$

si tôt que $\left|\frac{a_\nu-b_\nu}{x-b_\nu}\right| \leqq \varepsilon^{(\nu)}$ et posons

$$E_\nu(x) = \left(1-\frac{a_\nu-b_\nu}{x-b_\nu}\right)^{n_\nu} e^{n_\nu\sum\limits_{\mu=1}^{m_\nu}\frac{1}{\mu}\left(\frac{a_\nu-b_\nu}{x-b_\nu}\right)^\mu}$$

Dans le cas où a_ν est nul ou infini, j'entendrai par b_ν un point quelconque en dehors ou sur la limite du *continuum* $\mathfrak{X} + Q$. Si $a_\nu = 0$, je poserai

$$E_\nu(x) = \left(1+\frac{b_\nu}{x-b_\nu}\right)^{n_\nu}$$

où $E_\nu(x)$ pour $b_\nu = \infty$ désignera x^{n_ν}. Et enfin si $a_\nu = \infty$ je poserai de nouveau

$$E_\nu(x) = \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{b_\nu}}\right)^{n_\nu},$$

où $E_\nu(x)$ pour $b_\nu = 0$ désignera $\left(\frac{1}{x}\right)^{n_\nu}$.

Le produit $\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x)$ représente une fonction $f(x)$ dont les propriétés sont déterminées par le théorème $\boldsymbol{A}$.

Soit en effet x_0 un point à l'intérieur de $\mathfrak{A}$. Il est toujours possible de fixer une quantité positive ρ telle, que toutes les valeurs de x pour lesquelles $|x - x_0| \leqq \rho$ appartiennent également à $\mathfrak{A}$. D'après le § 1 on peut aussi toujours trouver un nombre entier n assez grand pour que $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \varepsilon^{(\nu)}$, si tôt que $\nu \geqq n$ en même temps que $|x - x_0| \leqq \rho$. (1)

Si δ est une quantité positive arbitraire, pourvu que l'on choisisse n assez grand, on aura par conséquent, si $|x - x_0| \leqq \rho$

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \varepsilon^{(\nu)}$$

$$\left| n_\nu \sum_{\mu = m_\nu + 1}^{\infty} \frac{1}{\mu}\left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^{\mu}\right| < \varepsilon_\nu$$

$$\sum_{k=\nu}^{\nu+\nu'} \left| n_k \sum_{\mu = m_k + 1}^{\infty} \frac{1}{\mu}\left(\frac{a_k - b_k}{x - b_k}\right)^{\mu}\right| < \delta$$

si tôt que $\nu \geqq n$, ν' étant un nombre entier positif quelconque. Mais on a aussi

$$\prod_{k=\nu}^{\nu+\nu_1} E_k(x) = e^{-\sum\limits_{k=\nu}^{\nu+\nu'} n_k \cdot \sum\limits_{\mu=m_k+1}^{\infty} \frac{1}{\mu}\left(\frac{a_k - b_k}{x - b_k}\right)^{\mu}}$$

(1) Voir p. 26 et 27.

En augmentant le nombre n on peut par conséquent rendre le module de la différence entre $\prod_{k=\nu}^{\nu+\nu'} E_k(x)$ et l'unité plus petit, que chaque quantité positive voulue. Le produit $\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x)$ est par conséquent uniformément convergent dans le domaine $|x - x_0| \leqq \rho$ et l'on a, en vertu du théorème ***e***

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) = \mathfrak{P}(x - x_0)$$

égalité qui a lieu au moins dans le domaine $|x - x_0| \leqq \rho$. Dans ce même domaine le produit $\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x)$ ne peut jamais être égal à zéro, selon le théorème ***b***; on peut donc poser (¹)

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) = e^{\mathfrak{P}(x - x_0)}.$$

Si a_λ est un point qui appartient à l'ensemble Q, on peut toujours fixer une quantité ρ de telle manière que l'inégalité $|x - a_\lambda| \leqq \rho$ n'ait lieu pour aucune valeur de x appartenant à l'ensemble Q, excepté pour $x = a_\lambda$. Il s'ensuit qu'on a

$$\frac{\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x)}{E_\lambda(x)} = e^{\mathfrak{P}(x - a_\lambda)}$$

et par conséquent

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) = (x - a_\lambda)^{n_\lambda} e^{\mathfrak{P}(x - a_\lambda)}$$

dans le voisinage immédiat de $x = a_\lambda$.

Le produit $\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x)$ représente par conséquent à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A}$ une fonction monogène uniforme, qui s'y comporte partout régulièrement et dont la valeur y est toujours différente de zéro (²) et qui de plus, dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_\nu$ de l'ensemble Q, peut être mise sous la forme $(x - a_\nu)^{n_\nu} e^{\mathfrak{P}(x - a_\nu)}$. Chaque point

(¹) Voir Weierstrass: *Zur Theorie* etc., p. 31.

(²) Voir page 21.

de Q' représente un point singulier essentiel de cette fonction, car dans chaque voisinage d'un point de Q' on trouve des pôles ou des points-zéros de la fonction. [1]

La fonction considérée n'existe par conséquent nulle part *en dehors* du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$, mais à l'intérieur de ce *continuum* elle possède toutes les propriétés que j'ai indiquées dans mon théorème.

Les mêmes propriétés appartiennent aussi évidemment à la fonction représentée à l'intérieur de $\mathfrak{A} + Q$ par

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x).F_0(x)$$

si l'on désigne par $F_0(x)$ une fonction qui est monogène, uniforme et régulière à l'intérieur de $\mathfrak{A} + Q$, et dont la valeur ne devient égale à zéro dans aucun point de ce domaine. D'un autre côté chaque fonction, jouissant des propriétés indiquées dans le théorème $\boldsymbol{A}$, peut être mise sous la forme:

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x).F_0(x).$$

Dans le cas où le *continuum* $\mathfrak{A} + Q$ constitue une surface simplement connexe, $F_0(x)$ peut toujours être mise sous la forme $e^{f_0(x)}$, en désignant par $f_0(x)$ une fonction monogène, uniforme et régulière à l'intérieur de $\mathfrak{A} + Q$. [2]

Il convient de remarquer encore, que si l'on prend tous les points b_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) sur la limite du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$, auquel cas il est aussi possible de remplacer par une seule valeur $\varepsilon < 1$ la série de valeurs $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(n)}, \ldots$, le produit $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x)$ se comportera régulièrement dans l'entourage de chaque point situé en dehors du *continuum* considéré.

---

[1] Un point $x = a$ est un pôle ou un point-zéro d'une fonction monogène uniforme, si cette fonction peut être mise dans l'entourage du point $x = a$ sous la forme $(x-a)^n e^{\mathfrak{P}(x-a)}$, où n désigne un nombre entier positif ou négatif. Si n est positif $x = a$ est un point zéro, si n est négatif $x = a$ est un pôle ou autrement dit un point singulier non essentiel.

[2] Cf. WEIERSTRASS: *Zur Theorie* etc., p. 31.

Le théorème A a été énoncé par M. PICARD dans les Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 21 Mars 1881, pour le cas, où l'ensemble Q ne contient que des zéros de la fonction considérée et où le *continuum* $\mathfrak{A} + Q$ est composé du domaine de la variable indépendante renfermé tout entier soit à l'intérieur d'un certain cercle ayant $x = 0$ pour centre, soit à l'extérieur de ce cercle. Il choisit toujours les points b_ν sur la périphérie de ce cercle, de manière que $\lim_{\nu=\infty} |a_\nu - b_\nu| = 0$. Dans ce qui précède j'ai montré comment ces points b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ peuvent être choisis encore d'une infinité d'autres manières différentes. Si le domaine $\mathfrak{A} + Q$ est renfermé tout entier dans l'intérieur d'un certain cercle, qui est lui même égal à Q' et a $x = 0$ pour centre, on peut poser $b_\nu = \infty$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ et l'on obtient alors l'expression

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)^{n_\nu} e^{n_\nu \sum\limits_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu} \right\}$$

qui représente une fonction n'existant qu'à l'intérieur de $\mathfrak{A} + Q$.

Si d'un autre côté $\mathfrak{A} + Q$ constitue le domaine extérieur à un certain cercle, qui coïncide avec Q' et a $x = 0$ pour centre, on peut poser $b_\nu = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ et, dans ce cas, la fonction est représentée par l'expression

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{a_\nu}{x}\right)^{n_\nu} e^{n_\nu \sum\limits_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu} \left(\frac{a_\nu}{x}\right)^\mu} \right\}$$

Dans le cas où Q' se compose du seul point $x = \infty$, le théorème A coïncide avec le théorème remarquable, dont le développement constitue la partie essentielle du mémoire de WEIERSTRASS, que j'ai déjà cité à plusieurs reprises: *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen einer Veränderlichen.*

La convergence du produit $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x)$ est telle, que les facteurs qui le composent peuvent être transposés d'une manière arbitraire, sans changer la valeur du produit. Si l'on désigne par conséquent par $\Pi_{\nu'} E_{\nu'}(x)$ le produit de tous les facteurs, pour lesquels le nombre n_ν est un nombre entier positif, et par $\Pi_{\nu''} E_{\nu''}(x)$ celui de tous les facteurs, pour lesquels n_ν est un nombre entier négatif, on a

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) = \Pi_{\nu'} E_{\nu'}(x) . \Pi_{\nu''} E_{\nu''}(x).$$

Mais

$$\Pi_{\nu''} E_{\nu''}(x) = \frac{1}{\Pi_{\nu''} \overline{E}_{\nu''}(x)}$$

si l'on pose

$$\overline{E}_{\nu''}(x) = \frac{1}{E_{\nu''}(x)}$$

et l'on peut par conséquent écrire

$$(\mathrm{A}_1) \qquad \prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) = \frac{\Pi_{\nu'} E_{\nu'}(x)}{\Pi_{\nu''} \overline{E}_{\nu''}(x)}.$$

Chaque facteur $E_{\nu'}(x)$ est une fonction monogène uniforme qui n'a qu'un seul point zéro $x = a_{\nu'}$, et qu'un seul point singulier $x = b_{\nu'}$. Chaque facteur $\overline{E}_{\nu''}(x)$ est aussi une fonction monogène uniforme, qui n'a qu'un seul point zéro $x = a_{\nu''}$ et qu'un seul point singulier $x = b_{\nu''}$. Le produit $\Pi_{\nu'} E_{\nu'}(x)$ représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$ une fonction monogène, uniforme et régulière qui n'a pas dans ce *continuum* d'autres points-zéros que les points $x = a_{\nu'}$, et qui dans l'entourage de chacun de ces points $x = a_{\lambda'}$ peut être mise sous la forme $(x - a_{\lambda'})^{n_{\lambda'}} e^{\mathfrak{P}(x - a_{\lambda'})}$. Le produit $\Pi_{\nu''} E_{\nu''}(x)$ représente aussi à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$ une fonction monogène, uniforme et régulière, qui n'a pas dans ce *continuum* d'autres points-zéros que les points $x = a_{\nu''}$ et qui dans l'entourage de chacun de ces points $x = a_{\lambda''}$ est égale à $(x - a_{\lambda''})^{n_{\lambda''}} e^{\mathfrak{P}(x - a_{\lambda''})}$.

Je supposerai maintenant que tous les points b_ν ont été pris sur la limite du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$ et je montrerai que les produits $\Pi_{\nu'} E_{\nu'}(x)$ et $\Pi_{\nu''} E_{\nu''}(x)$ peuvent être transformés dans ce cas en d'autres expressions analytiques.

En vertu de la relation $\lim\limits_{\nu=\infty} |a_\nu - b_\nu| = 0$, le produit de tous les facteurs $E_{\nu'}(x)$, pour lesquels le même point $x = b_\lambda$ a été adjoint à des points différents $x = a_{\nu'}$, constitue une fonction monogène, uniforme et régulière qui n'a que le seul point singulier $x = b_\nu$ et pour laquelle ce point est un point singulier essentiel, si le nombre des facteurs est infini. Désignons cette fonction, qui est par conséquent une fonction entière rationnelle ou transcendante de $\frac{1}{x - b_\lambda}$ (1), par $G^{(\lambda)}\left(\frac{1}{x - b_\lambda}\right)$. Cette expression se réduit toujours à l'unité, si le point $x = b_\lambda$ ne se trouve pas parmi les points $x = b_\nu$, qui ont été adjoints aux points $x = a_{\nu'}$.

De la même manière, le produit de tous les facteurs $\overline{E}_{\nu''}(x)$, pour lesquels le même point $x = b_\lambda$ a été adjoint à des points différents $x = a_{\nu''}$, constitue une fonction entière rationelle ou transcendante de $\frac{1}{x - b_\lambda}$, que je désignerai par $\overline{G}^{(\lambda)}\left(\frac{1}{x - b_\lambda}\right)$. Cette fonction est nécessairement transcendante si le nombre des facteurs $\overline{E}_{\nu''}(x)$ dont elle est composée, est infiniment grand. Elle se réduit à l'unité si le point $x = b_\lambda$ ne se trouve pas parmi les points $x = b_\nu$, qui ont été adjoints aux points $x = a_{\nu''}$. Il est à remarquer encore, que si l'ensemble Q' ne remplit pas la condition $Q' = Q''$, (2) l'une des deux fonctions $G^{(\lambda)}\left(\frac{1}{x - b_\lambda}\right)$, $\overline{G}^{(\lambda)}\left(\frac{1}{x - b_\lambda}\right)$ est nécessairement transcendante, si tôt que le point $x = b_\lambda$ appartient à l'ensemble $Q' - Q''$. Ceci est une conséquence immédiate de ce que, en vertu de la relation $\lim\limits_{\nu=\infty} |a_\nu - b_\nu| = 0$, chaque point de $Q' - Q''$ a été adjoint un nombre infini de fois à des points différents $x = a_\nu$.

En supposant par conséquent que tous les points $x = b_\nu$ ont été choisis sur la limite du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$ on obtient l'égalité

$$(A_2) \qquad \prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} G^{(\nu)}\left(\frac{1}{x - b_\nu}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \overline{G}^{(\nu)}\left(\frac{1}{x - b_\nu}\right)}$$

(1) WEIERSTRASS: *Zur Theorie* etc., pag. 17, A.

(2) Si P est un ensemble de points quelconque, dans lequel chaque point particulier ne figure qu'une seule fois, on désigne par P'', d'après la notation de CANTOR, un ensemble de points déduit de P' de la même manière que P' a été déduit de P. Il faut remarquer toutefois que, tandis qu'il n'est pas nécessaire que P contienne aucun point de P', P' au contraire contient nécessairement tous les points de P''. (Acta Mathematica, T. 2, p. 350.)

où les fonctions $G^{(\nu)}\left(\frac{1}{x-b_\nu}\right)$ et $\overline{G}^{(\nu)}\left(\frac{1}{x-b_\nu}\right)$ ont les propriétés qui viennent d'être exposées dans ce qui précède. Si l'on suppose que Q' ne se compose que d'un nombre fini de points, la formule A_2 se transforme en une formule, qui se trouve dans le mémoire de WEIERSTRASS *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen* (¹) et de laquelle on peut dire, que, jointe au théorème cité page 10, elle constitue le résultat le plus général auquel l'étude des fonctions uniformes d'une variable a été amenée dans ce mémoire.

Le théorème $\boldsymbol{A}$ n'embrasse point le cas où Q est un ensemble fini de points $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

La fonction qui correspond à Q dans ce cas n'a pas de points singuliers essentiels, elle est toujours une fonction rationnelle de la variable indépendante x. (²)

Les nombres entiers $n_1, n_2, \ldots, n_p$ doivent par conséquent être choisis de manière que $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = 0$, mais pour le reste ils sont parfaitement arbitraires. Le théorème $\boldsymbol{A}$ peut être remplacé, dans le cas où Q est un ensemble fini de points, par le théorème élémentaire et bien connu suivant.

»Soient $a_1, a_2, \ldots, a_p$, p points différents dans le domaine de la variable x. Soient de plus $n_1, n_2, \ldots, n_p$, p nombres entiers positifs ou négatifs, assujettis à la condition $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = 0$. Désignons par C et par c deux quantités indépendantes de x, dont c est supposé différent de chacune des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

Posons

$$E_\nu(x) = \left(1 - \frac{a_\nu - c}{x - c}\right)^{n_\nu}$$

où dans le cas $a_\nu = 0$ et $c = \infty$ l'expression $E_\nu(x)$ signifiera x^{n_ν},

dans le cas $a_\nu = \infty$ et $|c| > 0$ on entend par $E_\nu(x)$ l'expression $\left(\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{c}}\right)^{n_\nu}$

et dans le cas $a_\nu = \infty$ et $c = 0$ on entend par $E_\nu(x)$ l'expression $\left(\frac{1}{x}\right)^{n_\nu}$.

(¹) Page 18, formule 2.

(²) WEIERSTRASS: *Zur Theorie* etc., p. 12 et 13.

Le produit $C\prod_{\nu=1}^{p} E_\nu(x)$ représente une fonction rationnelle, dont les pôles et les zéros sont $a_1, a_2, \ldots, a_p$ et qui dans l'entourage de chacun de ces points $x = a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ peut être égalée à $(x - a_\nu)^{n_\nu} e^{\mathfrak{P}(x-a_\nu)}$.

Chaque fonction rationnelle de la variable x peut aussi être mise sous la forme d'un produit pareil $C\prod_{\nu=1}^{p} E_\nu(x)$.»

Du théorème $\boldsymbol{A}$ découle comme corollaire immédiat un nouveau théorème, qui se rapporte à toutes les fonctions monogènes et uniformes qui possèdent des points-zéros et des pôles. Ce théorème correspond tout à fait au théorème $\boldsymbol{B'}$ du § 1.

$\boldsymbol{A'}$. »Soit $F(x)$ une fonction monogène uniforme de la variable x, possédant des zéros et des pôles. Il est toujours possible de former une expression analytique, qui représente une autre fonction monogène uniforme telle, que le quotient de $F(x)$ et de cette dernière fonction n'a ni points-zéros, ni pôles et de plus se comporte régulièrement dans l'entourage de chaque point régulier et de chaque point singulier non essentiel de $F(x)$.»

Ce théorème subsiste aussi dans le cas où $F(x)$ n'a qu'un nombre fini de zéros et de pôles $a_1, a_2, \ldots, a_p$. L'expression analytique en question peut être formée alors comme il a été indiqué à la page antérieure. Si $F(x)$ a des points singuliers essentiels, la relation $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = 0$ n'a pas nécessairement lieu. La constante c doit être choisie dans ce cas sur la limite ou en dehors du *continuum* composé par l'ensemble de tous les points réguliers de la fonction.

Le théorème $\boldsymbol{A}$ nous donne les moyens de généraliser dans diverses directions les théorèmes que j'ai déduits dans le paragraphe précédent.

Soit $F(x)$ une fonction monogène uniforme et soit $x = a$ ou un point régulier ou un point singulier isolé de cette fonction. Dans le voisinage immédiat de $x = a$, $F(x)$ peut toujours être mis sous la forme d'une série, procédant d'après les puissances positives et négatives de $x - a$. Cette série peut évidemment toujours être représentée comme la somme de deux autres:

$$(x - a)^n \mathfrak{G}\left(\frac{1}{x - a}\right) + (x - a)^n \mathfrak{P}(x - a)$$

où n désigne un nombre entier, positif, négatif ou nul, et $\mathfrak{G}\left(\frac{1}{x-a}\right)$ une fonction entière de $\frac{1}{x-a}$ s'évanouissant pour $\frac{1}{x-a} = 0$; le nombre n doit de plus être choisi de manière que $\mathfrak{G}\left(\frac{1}{x-a}\right)$ ne soit pas identiquement nulle dans le cas où $n \leqq 0$. Du reste n peut être fixé tout à fait arbitrairement, et à chaque n correspond une seule expression absolument déterminée

$$(x-a)^n \mathfrak{G}\left(\frac{1}{x-a}\right) + (x-a)^n \mathfrak{P}(x-a).$$

Je vais montrer dans ce qui suit, que le théorème ***B*** du § 1 peut être généralisé de telle manière, que l'on peut choisir arbitrairement les fonctions $(x-a)^n \mathfrak{G}\left(\frac{1}{x-a}\right)$, correspondant à chaque point a d'un ensemble de points isolé, et que l'on obtient toujours une fonction $F(x)$ correspondante. On retombe sur le théorème ***B*** du § 1 en supposant partout dans ce nouveau théorème $n = 0$.

B. »Soit Q un ensemble de points infini mais isolé appartenant au domaine de la variable x et choisi de manière que $Q + Q'$ forme la limite complète d'un *continuum* $\mathfrak{A}$. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ les différents points de l'ensemble Q, soit $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$ une série de nombres entiers, positifs, négatifs ou nuls, et soit

$$\mathfrak{G}_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right), \quad \mathfrak{G}_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right), \ldots, \mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right), \ldots$$

une série de fonctions telles, que $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ est une fonction entière rationnelle ou transcendante de $\frac{1}{x-a_\nu}$, s'évanouissant pour $\frac{1}{x-a_\nu} = 0$, mais n'étant pas identiquement nulle, si tôt que $n_\nu \leqq 0$.

On peut toujours former une expression analytique, qui représente une fonction monogène, uniforme et régulière à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A}$, laquelle dans l'entourage de chacun des points a_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) appartenant à l'ensemble Q, peut être mise sous la forme

$$(x-a_\nu)^{n_\nu} \mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + (x-a_\nu)^{n_\nu} \mathfrak{P}(x-a_\nu).«$$

On peut en effet, d'après le théorème $\boldsymbol{A}$, former un produit $\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x)$, dans lequel le facteur $E_\nu(x)$ sera remplacé par l'unité toutes les fois que $n_\nu = 0$. Dans l'entourage de chaque point $x = a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ l'égalité suivante a lieu:

$$\frac{(x-a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x)} = G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + \mathfrak{P}(x-a_\nu)$$

où $G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ représente une fonction entière rationnelle ou transcendante de $\frac{1}{x-a_\nu}$, s'évanouissant pour $\frac{1}{x-a_\nu} = 0$. Avec ces expressions $G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ comme éléments, on peut former, d'après le théorème $\boldsymbol{B}$ du § 1, une expression $\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$, dans laquelle, au cas où $G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ se reduit identiquement à zéro, le terme correspondant $F_\nu(x)$ s'évanouit aussi identiquement; et cette expression représentera, au moins à l'intérieur du *continuum* limité par $Q + Q'$, une fonction monogène, uniforme et régulière, qui, dans l'entourage de chacun des points $x = a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ pourra être mise sous la forme

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + \mathfrak{P}(x-a_\nu).$$

Le produit

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

est en effet, comme on le voit clairement, une expression analytique de la même nature que celle que j'ai considérée dans mon théorème. La même chose a lieu pour le produit

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x) + G(x) \right\}$$

dans laquelle $G(x)$ en dedans du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$ est une fonction monogène, uniforme et régulière de la variable x.

Chaque fonction ayant les propriétés désignées, peut aussi être représentée sous cette dernière forme.

Si chaque point $x = a_\nu$, pour lequel l'élément $(x - a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{G}\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ ne s'évanouit pas identiquement, est un point-zéro ou un point singulier de cet élément, la fonction correspondante a un point-zéro ou un point singulier dans chaque point de Q; chaque point de Q' est par conséquent un point singulier essentiel de la fonction considérée.

Le théorème $\boldsymbol{B}$, comme on s'en assure aisément, subsiste même dans le cas où l'ensemble de points Q est fini; mais dans ce cas on est assujetti à la restriction que les nombres entiers n_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ doivent être choisis de manière que leur somme soit égale à zéro.

Le théorème $\boldsymbol{B}$ nous donne les moyens nécessaires pour former, dans chaque cas où une certaine fonction monogène uniforme $F(x)$ est donnée, une expression analytique correspondante, qui représente une autre fonction monogène et uniforme, laquelle se comporte régulièrement partout où cela a lieu pour $F(x)$ et, pour un nombre infini de points isolés, peut représenter la fonction donnée avec chaque degré d'exactitude voulu.

Désignons en effet, de même que nous l'avons fait dans l'introduction à ce mémoire, par $\mathfrak{A}$ le *continuum* formé par l'ensemble de tous les points réguliers de la fonction $F(x)$. Ce *continuum* est limité par un ensemble de points P, qui embrasse l'ensemble dérivé P' et qui constitue l'ensemble de tous les points singuliers de $F(x)$. Si maintenant nous désignons par P_1 un ensemble de points qui embrasse l'ensemble dérivé P_1' et qui lui même est contenu dans P, on peut toujours, en vertu d'un théorème de BENDIXSON,(1) séparer du *continuum* $\mathfrak{A} + P - P'$ un ensemble de points isolés Q tel que $Q' = P_1$. Si l'on désigne par conséquent par $a_1, a_2, \ldots$ les différents points dont la totalité constitue Q, la fonction $F(x)$ pourra toujours être égalée, dans l'entourage de chacun de ces points $x = a_\nu$, à une expression de la forme

$$(x - a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) + (x - a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{P}(x - a_\nu),$$

(1) *Un théorème auxiliaire de la théorie des ensembles.* (Bihang till Kongl. Svenska Vet. Ak. Handlingar, Tome 9 N° 7.)

où $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ a la même signification que dans le théorème $\boldsymbol{B}$, et où n_ν désigne un nombre entier positif, négatif ou nul, qui peut d'ailleurs être choisi arbitrairement, pourvu seulement que $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ ne se réduise pas identiquement à zéro, dans le cas où $n_\nu \leqq 0$.

Si l'on définit par conséquent un certain ensemble de points Q, comme il est toujours possible de le faire d'une infinité de manières différentes, et que l'on fixe les nombres entiers $n_1, n_2, \ldots$, il est toujours possible, selon le théorème $\boldsymbol{B}$, de former une expression analytique $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$ telle, que la différence

$$F(x) - \prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A}$ une fonction monogène, uniforme et régulière et que dans l'entourage de chacun des points $x = a_\nu$, appartenant à Q, l'égalité

$$F(x) - \prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x) = (x - a_\nu)^{n_\nu} \mathfrak{P}(x - a_\nu)$$

ait lieu. Nous avons par conséquent le théorème suivant:

$\boldsymbol{B'}$. »Soit $F(x)$ une fonction monogène uniforme quelconque. Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des points réguliers, et P l'ensemble des points singuliers de cette fonction. Soit de plus Q un ensemble de points isolés, appartenant au *continuum* $\mathfrak{A} + P - P'$ et tel, que l'ensemble dérivé Q' soit contenu dans l'ensemble P. On peut toujours former une expression analytique, qui représente à l'intérieur de $\mathfrak{A}$ une fonction monogène, uniforme et régulière laquelle dans l'entourage de chacun des points de Q représente la fonction $F(x)$ avec chaque degré d'approximation voulu.»

Le théorème $\boldsymbol{B'}$ s'applique aussi au cas où l'ensemble Q n'est composé que d'un nombre fini de points $a_1, a_2, \ldots$. Dans ce cas pourtant on est assujetti à la restriction suivante: si P est aussi un ensemble fini de points et si Q embrasse tous les points de P, les nombres entiers $n_1, n_2, \ldots, n_p$ doivent être choisis de manière que leur somme

$n_1 + n_2 + \ldots + n_p$ soit égale à zéro. Dans chaque autre cas ces nombres peuvent être pris arbitrairement, mais la constante c,[1] qui entre dans l'expression $\prod_{\nu=1}^{p} E_\nu(x)$, doit être choisie à la limite ou en dehors du *continuum* $\mathfrak{A}$.

Si la fonction $F(x)$ a des points singuliers isolés, si nous désignons par Q la totalite de ces points et si nous prenons de plus tous les nombres $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$ égaux à zéro, le théorème $\boldsymbol{B'}$ se réduit au théorème $\boldsymbol{B'}$ du § 1.

Le théorème $\boldsymbol{B}$ nous apprend qu'il est toujours possible de former une expression analytique représentant une fonction, qui se comporte d'une certaine manière déterminée dans l'entourage de certains points désignés d'avance. Le théorème $\boldsymbol{B'}$ nous fait voir que chaque fonction monogène uniforme donnée peut toujours être représentée par une expression analytique semblable avec un degré d'approximation voulu.

Je vais montrer maintenant qu'il est toujours possible de choisir l'expression analytique en question de telle manière, que la fonction représentée par elle ait non seulement certains points-zéros prescrits d'avance, mais que sa valeur pour chaque autre point régulier soit différente de zéro.

Mais pour démontrer cette proposition, il est nécessaire d'établir le théorème suivant.

$\boldsymbol{f}$ »Soit $F(x)$ une fonction monogène uniforme de x, pour toutes les valeurs de cette variable assujetties à la condition $|x - a| < r$, où a et r désignent deux quantités indépendantes de x, dont r est nécessairement réel et positif. Supposons de plus que pour toutes les valeurs considérées de x, à l'exception de $x = a$, $F(x)$ se comporte régulièrement et ait une valeur différente de zéro.

On peut alors toujours et d'une seule manière représenter $F(x)$ sous la forme

$$F(x) = C.(x - a)^m e^{G\left(\frac{1}{x-a}\right) + (x-a)\mathfrak{P}(x-a)}$$

où C est une constante, indépendante de x, m un nombre entier positif,

---

[1] Voir page 41.

négatif ou nul, et $G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ une fonction entière rationnelle ou transcendante de $\frac{1}{x-a}$, qui s'annule pour $\frac{1}{x-a}=0$. La fonction $G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ est toujours identiquement nulle pour chaque valeur de x, si $x=a$ est un point régulier ou bien un pôle de la fonction $F(x)$.»

Cette proposition peut être démontrée de la manière suivante.[1] La fonction $\frac{F'(x)}{F(x)}$ se comporte régulièrement, si tôt que $|x-a|<r$, sans que $x=a$. Si a est une quantité finie, on a par conséquent, en vertu du théorème de LAURENT, si tôt que $|x-a|<r$

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{m}{x-a}+\frac{d}{dx}G\left(\frac{1}{x-a}\right)+\frac{d}{dx}(x-a)\mathfrak{P}(x-a)$$

où m est une quantité indépendante de x et $G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ a la même signification qu'auparavant.

Il s'ensuit que pour $|x-a|<r$

$$F(x)=C(x-a)^m e^{G\left(\frac{1}{x-a}\right)+(x-a)\mathfrak{P}(x-a)}$$

et cette dernière égalité montre que m doit être un nombre entier.

Si $a=\infty$, on a, si tôt que $\left|\frac{1}{x}\right|<r$,

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{m'}{x}+\frac{d}{dx}G(x)+\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$$

où m' est une quantité indépendante de x, et où $G\left(\frac{1}{x-\infty}\right)=G(x)$ a la même signification qu'auparavant. Il en résulte

$$F(x)=Cx^{m'}e^{G(x)+\frac{1}{x}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

ou, en posant $m'=-m$,

$$F(x)=C\left(\frac{1}{x}\right)^m e^{G(x)+\frac{1}{x}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

---

[1] Cf. WEIERSTRASS: *Zur Theorie* etc., pag. 48, 49.

si tôt que $\left|\frac{1}{x}\right| < r$. De cette égalité résulte évidemment que dans ce cas aussi m est un nombre entier.

Il est donc prouvé que quand $|x - a| < r$, l'égalité

$$F(x) = C(x - a)^m e^{G\left(\frac{1}{x-a}\right) + (x-a)\mathfrak{P}(x-a)}$$

a toujours lieu, aussi bien dans le cas où a est une quantité finie, que lorsque $a = \infty$. La fonction $F(x)$ ne peut être mise sous cette forme que d'une seule manière: en effet, il résulte d'une proposition démontrée dans les éléments de la théorie des fonctions, que l'égalité

$$1 = C(x - a)^m e^{G\left(\frac{1}{x-a}\right) + (x-a)\mathfrak{P}(x-a)}$$

ne peut avoir lieu autrement que si $C = 1$ et m, de même que tous les coefficients de $G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ et de $\mathfrak{P}(x-a)$, sont égaux à zéro. Il suit aussi, comme conséquence de cette proposition, que $G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ doit être identiquement nul, si $x = a$ est un point régulier ou un pôle, et de plus que $m = 0$ dans le cas où $x = a$ est un point régulier mais non un point-zéro.

La proposition auxiliaire que je viens d'établir sert à mieux comprendre le nouveau théorème suivant:

C. »Soit Q un ensemble infini de points isolés appartenant au domaine de la variable x et choisi de manière que $Q + Q'$ forme la limite complète d'un *continuum* $\mathfrak{A}$. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ la totalité des points de l'ensemble Q, soient $m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots$ et $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$ deux séries de nombres entiers positifs, négatifs ou nuls, et enfin

$$\mathfrak{G}_1\left(\frac{1}{x - a_1}\right), \quad \mathfrak{G}_2\left(\frac{1}{x - a_2}\right), \ldots$$

une série de fonctions telles, que $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ est une fonction entière rationnelle ou transcendante de $\frac{1}{x - a_\nu}$ qui s'évanouit pour $\frac{1}{x - a_\nu} = 0$, mais qui n'est pas identiquement nulle si $n_\nu \leqq 0$.

On peut toujours former une expression analytique qui représente, à *l'intérieur* du *continuum* $\mathfrak{A}$, une fonction monogène, uniforme et régulière, conservant partout dans ce *continuum* une valeur différente de zéro et qui, dans le voisinage de chaque point a_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) appartenant à l'ensemble Q, peut être égalée à

$$(x - a_\nu)^{m_\nu} \cdot e^{(x-a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + (x-a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{P}(x-a_\nu)}.»$$

On peut constituer cette expression analytique de la manière suivante. Formons d'après le théorème A un produit $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \overline{E}_\nu(x)$, dans lequel $\overline{E}_\nu(x)$ a la même signification que $E_\nu(x)$ dans ce théorème, sauf que m_ν est pris ici à la place de n_ν, et que ce nombre m_ν peut aussi être égal à zéro, auquel cas $\overline{E}_\nu(x) = 1$. Pour chaque indice ν on a l'égalité

$$\frac{(x-a_\nu)^{m_\nu} e^{(x-a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)}}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \overline{E}_\nu(x)} = e^{(x-a_\nu)^{n_\nu}\overline{\mathfrak{G}}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + (x-a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{P}(x-a_\nu)}$$

où $\overline{\mathfrak{G}}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ représente une fonction entière de $\frac{1}{x-a_\nu}$, qui s'évanouit pour $\frac{1}{x-a_\nu} = 0$, mais qui n'est pas identiquement nulle, si $n_\nu \leqq 0$.

Servons-nous maintenant des fonctions $(x-a_\nu)^{n_\nu}\overline{\mathfrak{G}}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ pour en former, de la même manière qu'au théorème B, une expression analytique

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

qui partout à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A}$ se comporte régulièrement et qui, dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_\nu$, peut être égalée à

$$(x-a_\nu)^{n_\nu}\overline{\mathfrak{G}}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + (x-a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{P}(x-a_\nu).$$

On a alors dans

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \overline{E}_\nu(x) . e^{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)}$$

une expression qui représente à l'intérieur de $\mathfrak{A}$ une fonction avec les propriétés indiquées.

Une fonction semblable est représentée aussi par

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \overline{E}_\nu(x) . e^{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)} . F_0(x)$$

si $F_0(x)$ à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A}$ est une fonction monogène, uniforme et régulière qui ne s'annule jamais et qui de plus dans le voisinage de chaque point $x = a_\nu$ peut se mettre sous la forme

$$e^{(x-a_\nu)^{n_\nu} \mathfrak{P}(x-a_\nu)}.$$

Toute fonction $F(x)$ qui possède les propriétés indiquées dans ce théorème, peut évidemment aussi être représentée sous la forme générale ci-dessus.

Si les nombres entiers n_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ sont tous positifs et que le *continuum* $\mathfrak{A} + Q$ forme une surface simplement connexe, on peut toujours choisir les expressions $F_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, de manière que la fonction considérée soit représentée par

$$F(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \overline{E}_\nu(x) . e^{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . \left[\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x) + f_0(x)\right]}$$

où la fonction $f_0(x)$ est monogène, uniforme et régulière à l'intérieur de $\mathfrak{A} + Q$.

En choisissant d'abord d'une manière déterminée le terme constant dans chacune des expressions $(x - a_\nu)\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$, on obtient

$$F(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \overline{E}_\nu(x) . e^{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} F'_\nu(x)} . F_0(x).$$

On a ici

$$F_0(x) = e^{\overline{f}_0(x)}$$

où $\overline{f}_0(x)$ est une fonction monogène, uniforme et régulière à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$. Dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_\nu$ on a

$$\overline{f}_0(x) = (x - a_\nu)^{n_\nu} \mathfrak{P}(x - a_\nu) + 2k_\nu \pi i$$

ou k_ν représente un nombre entier positif ou négatif ou bien zéro. On peut fixer le nombre k_ν d'une manière arbitraire pour un certain point $a_{\nu'}$; mais alors, en vertu du célèbre théorème de CAUCHY sur le nombre des racines[1] et en conséquence de ce que le *continuum* $\mathfrak{A} + Q$ forme une surface simplement connexe, ce nombre est nécessairement déterminé à sens unique pour chaque indice $\nu \gtrless \nu'$. D'après le théorème $\boldsymbol{A}$ on a par conséquent

$$\overline{f}_0(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu''(x) + f_0(x) \right]$$

où $f_0(x)$ a la même signification qu'auparavant.

En posant alors

$$F_\nu(x) = F_\nu'(x) + F_\nu''(x)$$

on obtient l'expression cherchée de la fonction considérée. Je l'ai communiquée dans le Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, série II, tome III, page 272.

Le théorème $\boldsymbol{C}$ subsiste même dans le cas où Q est un ensemble fini de points $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Mais alors, comme on le voit facilement, la restriction suivante doit avoir lieu: les nombres entiers $m_1, m_2, \ldots, m_p$ doivent être assujettis à la condition $m_1 + m_2 + \ldots + m_p = 0$. Les nombres entiers $n_1, n_2, \ldots, n_p$ doivent être également choisis de manière que $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = 0$. Si les nombres m_ν et n_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ remplissent ces conditions, les produits $\prod_{\nu=1}^{p} \overline{E}_\nu(x)$ et $\prod_{\nu=1}^{p} E_\nu(x)$ peuvent être formés d'après le théorème cité page 41.

Si tous les nombres entiers n_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ sont positifs et que de plus toutes les fonctions correspondantes $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ soient choisies de sorte qu'aucune d'elles ne contienne de puissance de $\frac{1}{x - a_\nu}$ supérieure

[1] Cf. G. MITTAG-LEFFLER: *Om skiljandet af rötterna till en synektisk funktion af en variabel.* Upsala Universitets Årsskrift, 1872.

à $\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)^{n_\nu}$, l'expression analytique formée suivant la manière indiquée représentera à l'intérieur de $\mathfrak{A} + Q$ une fonction monogène uniforme, qui dans ce domaine n'a pas de points singuliers essentiels et dont tous les pôles et tous les zéros sont contenus dans Q. Dans ce cas, on a dans le voisinage de chaque point $(x = a_\nu)$ de Q

$$(x - a_\nu)^{m_\nu} e^{(x-a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + (x-a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{P}(x-a_\nu)}$$
$$= (x - a_\nu)^{m_\nu}[g_\nu(x - a_\nu) + (x - a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{P}(x - a_\nu)]$$

où $g_\nu(x - a_\nu)$ est une fonction entière rationnelle de $(x - a_\nu)$ de degré $n_\nu - 1$, qui ne s'annule pas pour $x - a_\nu = 0$. Les coefficients de $g_\nu(x - a_\nu)$ sont des fonctions rationnelles entières de ceux de $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$. D'un autre côté, les coefficients de $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ sont aussi déterminés à sens unique par ceux de $g_\nu(x - a_\nu)$, si seulement, comme il est toujours possible de le faire, le coefficient de $\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)^{n_\nu}$ dans $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ est choisi de façon que l'égalité

$$e^{(x-a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + (x-a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{P}(x-a_\nu)} = g_\nu(x - a_\nu) + (x - a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{P}(x - a_\nu)$$

ait lieu pour $x = a_\nu$.

Si l'on exige, par conséquent, que la fonction représentée par l'expression cherchée se mette dans le voisinage de chaque point $x = a_\nu$ sous la forme

$$(x - a_\nu)^{m_\nu} g_\nu(x - a_\nu) + (x - a_\nu)^{m_\nu + n_\nu}\mathfrak{P}(x - a_\nu)$$

où les fonctions $g_\nu(x - a_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ sont choisies arbitrairement, il ne reste plus qu'à déterminer par le calcul les fonctions correspondantes $(x - a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ et à former une expression analytique analogue à celle du théorème $\boldsymbol{C}$.

Du théorème $\boldsymbol{C}$ découle immédiatement, par conséquent, le théorème nouveau qui suit:

$\boldsymbol{D}$. »Soit Q un ensemble infini de points isolés dans le domaine **de** la variable x, choisi de manière que $Q + Q'$ forme la limite complète d'un *continuum* $\mathfrak{A}$. Soit $a_1, a_2, \ldots$ la totalité des points de l'ensemble Q, soit $m_1, m_2, \ldots$ une série de nombres entiers positifs, négatifs ou nuls, et soit $n_1, n_2, \ldots$ une série de nombres exclusivement positifs. Soit de plus

$$g_1(x - a_1), \quad g_2(x - a_2), \ldots, g_\nu(x - a_\nu), \ldots$$

une série de fonctions entières telles, que $g_\nu(x - a_\nu)$ est une fonction entière rationnelle de $(x - a_\nu)$ du degré $n_\nu - 1$, qui ne s'évanouit pas pour $x - a_\nu = 0$.

Il est toujours possible de former une expression analytique représentant à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$ une fonction monogène uniforme, qui, à l'intérieur de $\mathfrak{A}$, se comporte partout régulièrement et a une valeur différente de zéro, et qui, dans le voisinage de chaque point $x = a_\nu$ appartenant à Q, peut se mettre sous la forme

$$(x - a_\nu)^{m_\nu} g_\nu(x - a_\nu) + (x - a_\nu)^{m_\nu + n_\nu} \mathfrak{P}(x - a_\nu).»$$

En supposant que l'expression $(x - a_\nu)^{m_\nu} \mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ dans le théorème $\boldsymbol{B}$ ait la forme $(x - a_\nu)^{m_\nu} g_\nu(x - a_\nu)$, on obtient aussi une expression analytique représentant à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$ une fonction monogène uniforme, qui se comporte régulièrement partout à l'intérieur de $\mathfrak{A}$ et qui dans le voisinage de chaque point $x = a_\nu$ de Q peut être égalée à

$$(x - a_\nu)^{m_\nu} g_\nu(x - a_\nu) + (x - a_\nu)^{m_\nu + n_\nu} \mathfrak{P}(x - a_\nu).$$

Mais cette dernière fonction se distingue pourtant de celle qui est formée d'après le théorème $\boldsymbol{D}$, en ce qu'elle peut avoir des zéros à l'intérieur de $\mathfrak{A}$, ce qui n'est jamais le cas pour l'autre.

Le théorème $\boldsymbol{D}$ contient une généralisation du théorème $\boldsymbol{A}$ qui mérite d'être remarquée. D'après le théorème $\boldsymbol{A}$, on peut former une expression analytique, représentant une fonction qui a certains zéros et certains pôles prescrits d'avance, de manière que l'ordre de chacun d'eux est fixé à volonté. Le théorème $\boldsymbol{D}$ nous permet de former une expression représentant une fonction qui non seulement possède la propriété exigée, mais satisfait de plus à la condition suivante: dans son développement en série de puissances, dans l'entourage de chacun des pôles et des zéros ainsi que d'un nombre infini d'autres points, un nombre voulu de coefficients obtiennent certaines valeurs fixées arbitrairement d'avance.

Le théorème $\boldsymbol{D}$ a déjà été énoncé par moi dans le Bulletin etc. (loc. cit.). Mais là j'ai supposé que Q' ne consiste qu'en un seul point $x = \infty$. (¹)

Soit maintenant $F(x)$ une fonction monogène uniforme quelconque, et désignons comme précédemment par $\mathfrak{A}$ l'ensemble de tous ses points réguliers et par P celui de tous ses points singuliers. Soit de plus $\mathfrak{B}$ l'ensemble de tous les points réguliers où cette fonction a une valeur différente de zéro, et $\mathfrak{P}$ celui des points-zéros et des points singuliers. On voit immédiatement que $\mathfrak{A}$ contient $\mathfrak{B}$ et que $\mathfrak{B} + \mathfrak{P} - \mathfrak{P}'$ contient $\mathfrak{A}$.

D'après le théorème $\boldsymbol{C}$, on peut former pour chaque fonction donnée $F(x)$ une expression analytique correspondante, qui représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{B}$ une nouvelle fonction monogène telle, que non seulement pour un nombre infini de points déterminés d'avance, cette dernière coïncide avec la fonction donnée suivant un degré d'approximation voulu, mais encore qu'elle se comporte régulièrement partout à l'intérieur de $\mathfrak{B}$ et n'y devienne jamais égale à zéro.

Soit en effet Q un ensemble infini de points isolés séparé du *continuum* $\mathfrak{B} + \mathfrak{P} - \mathfrak{P}'$ de sorte que Q' soit contenu dans $\mathfrak{P}$. Si nous désignons par $a_1, a_2, \ldots$ les différents points de Q, nous aurons pour l'entourage immédiat de chacun de ces points

$$F(x) = (x - a_\nu)^{m_\nu} e^{(x-a_\nu)^{n_\nu} \mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + (x-a_\nu)^{n_\nu} \mathfrak{P}(x-a_\nu)}$$

où $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ a la même signification qu'au théorème $\boldsymbol{C}$, m_ν est un certain nombre entier positif, négatif ou nul, et n_ν en est un autre nombre qu'on peut du reste choisir arbitrairement, pourvu que la fonction $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ ne soit pas identiquement nulle si $n_\nu \leqq 0$. Fixant avec les restrictions indiquées l'ensemble de points Q et les nombres $n_1, n_2, \ldots$, nous pouvons toujours former, d'après le théorème $\boldsymbol{C}$, une expression analytique

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \overline{E}_\nu(x) e^{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)}$$

(¹) Voir de plus E. SCHERING: *Das Anschliessen* etc., p. 4.

représentant à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{B}$ une fonction monogène uniforme, qui se comporte partout régulièrement et ne s'annule jamais et qui de plus est telle, que si nous la divisons par $F(x)$, le quotient peut, dans l'entourage de chaque point $x = a_\nu$ appartenant à Q, être égalé à

$$e^{(x-a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{P}(x-a_\nu)}.$$

J'ai obtenu par conséquent le théorème suivant:

C'. »Soit $F(x)$ une fonction monogène uniforme quelconque. Soit $\mathfrak{B}$ l'ensemble de tous ses points réguliers qui ne sont pas des points-zéros, et $\mathfrak{P}$ celui de tous les points-zéros et des points singuliers.

Soit de plus Q un ensemble infini de points isolés, contenu dans $\mathfrak{B} + \mathfrak{P} - \mathfrak{P}'$ et tel, que Q' est contenu dans $\mathfrak{P}$. On peut toujours former une expression analytique, représentant à l'intérieur de $\mathfrak{B}$ une fonction monogène uniforme, qui se comporte partout régulièrement et a une valeur différente de zéro et qui, de plus, dans l'entourage de chaque point de Q, coïncide avec la fonction $F(x)$ suivant un degré d'approximation voulu.»

Si $\mathfrak{P}$ est un ensemble fini de points $a_1, a_2, \ldots, a_p$, les nombres entiers correspondants $m_1, m_2, \ldots, m_p$ doivent nécessairement remplir la condition

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_p = 0.$$

Si Q est aussi un ensemble fini de points qui embrasse $\mathfrak{P}$, le théorème en question n'aura lieu qu'à la condition que les nombres entiers $n_1, n_2, \ldots$ soient choisis de manière que leur somme soit nulle. Dans tout autre cas, le théorème ***C*** subsiste sans aucune restriction par rapport au choix des nombres entiers n_ν, même si Q est un ensemble fini de points. Dans ce dernier cas pourtant, les constantes (¹) qui entrent dans les produits $\prod_{\nu=1}^{\infty} \overline{E}_\nu(x)$ et $\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x)$, doivent être choisies sur la limite ou en dehors du *continuum* $\mathfrak{B}$.

Les théorèmes que j'ai démontrés dans ce paragraphe sont les mêmes que ceux que j'ai annoncés à la fin de ma communication dans les Comptes Rendus etc. pour le 14 Août 1882.

(¹) Voir page 41.

§ 3.

Soit $F(x)$ une fonction monogène uniforme quelconque, $\mathfrak{A}$ le *continuum* formé par l'ensemble des points réguliers de cette fonction, et P l'ensemble de ses points singuliers. Si l'égalité $P - P' = 0$ n'a pas lieu et que par suite la fonction en question possède des points singuliers isolés, on obtiendra d'après le théorème $\boldsymbol{B'}$ du § 1 ou d'après le théorème $\boldsymbol{B'}$ du § 2, une expression représentant une fonction telle, que la différence entre elle et $F(x)$ constitue une nouvelle fonction monogène uniforme, qui se comporte régulièrement non seulement à l'intérieur de $\mathfrak{A}$ mais de même dans chaque point de $P - P'$. On pourrait procéder avec cette nouvelle fonction comme avec $F(x)$ et ainsi de suite. On obtiendrait ainsi, après chaque opération, une expression nouvelle, qui, additionnée à la somme de toutes les précédentes, représenterait une fonction telle que la différence entre elle et $F(x)$ serait une nouvelle fonction dépourvue d'un nombre de plus en plus grand des singularités appartenant à $F(x)$. Mais ici l'on se demande si ce procédé est illimité ou a une limite détérminée et s'il nous conduit finalement à une fonction telle, que la différence entre elle et $F(x)$ soit une nouvelle fonction, tellement plus simple que $F(x)$, qu'elle puisse être considérée comme une fonction d'une nature essentiellement différente et plus élémentaire? La même question se pose pour le procédé indiqué dans le théorème $\boldsymbol{C'}$. Ce n'est que tout récemment, et grâce aux recherches remarquables de Cantor, qu'il a été possible de répondre à ces questions par l'affirmative.

Le procédé indiqué a réellement dans chaque cas une limite déterminée; il aboutit toujours à une fonction jouant précisément le même rôle que la constante additive ou multiplicative, à laquelle on est amené lorsqu'on veut représenter une fonction rationnelle sous forme d'une somme de fractions partielles ou sous forme d'un produit.

Mais pour démontrer cette proposition, il faut rappeler certains résultats auxquels est arrivé Cantor. Je les signalerai ici de manière qu'on puisse suivre mon exposition, même sans avoir étudié les mémoires de CANTOR.

Soit P un ensemble infini de points quelconque, ne contenant chaque point particulier qu'une seule fois, et comme auparavant, P' l'ensemble de tous les points tels, que dans chaque entourage de chacun d'eux se trouvent une infinité de points appartenant à P. CANTOR désigne (¹) de même par $P^{(2)}$ l'ensemble de tous les points tels, que dans l'entourage de chacun de ces derniers il y a une infinité de points de P', et par $P^{(\nu+1)}$ l'ensemble de tous les points tels, que dans l'entourage de chacun d'eux se trouvent une infinité de points appartenant à $P^{(\nu)}$.

Dans la série $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(\nu)}, \ldots$ chaque ensemble qui précède contient tous les points des ensembles suivants. Il peut arriver qu'en procédant de gauche à droite dans cette série, on arrive à un ensemble $P^{(n)}$ *ne contenant qu'un nombre fini de points.* (²) Dans ce cas l'ensemble $P^{(n+1)}$ ne contient pas de points du tout, ce que l'on exprime par l'égalité $P^{(n+1)} = 0$. Il peut aussi arriver qu'en procédant dans la suite $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(\nu)}, \ldots$ on n'arrive jamais à un ensemble $P^{(n)}$ tel que $P^{(n+1)} = 0$. Dans ce cas, il existe toujours un ensemble, commun à toute la série

$$P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(\nu)}, \ldots$$

et CANTOR le désigne par $P^{(\omega)}$. (³)

(¹) Cf. page 40.

(²) Comme exemple, on peut citer l'ensemble des nombres, qu'on obtient de l'expression

$$\frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{m_1+m_2+\ldots+m_n}}$$

en faisant parcourir à chacune des quantités $m_1, m_2, \ldots, m_n$ toute la série des nombres entiers positifs. L'ensemble considéré est un ensemble isolé et, si on le désigne par P, $P^{(n)}$ ne contiendra que le seul point *zéro*.

(³) Comme exemple d'un ensemble de points P, pour lequel il n'existe pas de nombre entier positif n, tel que $P^{(n+1)} = 0$, on peut citer l'ensemble de tous les nombres, que l'on obtient de l'expression

$$\frac{1}{2^{n}} + \frac{1}{2^{n+m_1}} + \frac{1}{2^{n+m_1+m_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+m_1+m_2+\ldots+m_n}}$$

Il désigne ensuite par $P^{(\omega+1)}$ l'ensemble de tous les points tels, que dans l'entourage de chacun d'eux se trouvent une infinité de points appartenant à $P^{(\omega)}$, et par $P^{(\omega+\nu+1)}$ l'ensemble de tous les points tels, que dans l'entourage de chacun d'eux se trouvent une infinité de points appartenant à $P^{(\omega+\nu)}$. Il peut arriver qu'en parcourant la série

$$P^{(\omega)},\ P^{(\omega+1)}, \ldots, P^{(\omega+\nu)}, \ldots$$

on arrive enfin à un ensemble $P^{(\omega+n)}$ ne consistant qu'en un nombre fini de points de manière que $P^{(\omega+n+1)} = 0$.[1]

Mais il se peut tout aussi bien que l'on ne parvienne jamais à un ensemble $P^{(\omega+n+1)} = 0$. Dans ce dernier cas, on désigne par $P^{(2\omega)}$ l'ensemble commun à tous les ensembles $P^{(\omega)}$, $P^{(\omega+1)}, \ldots, P^{(\omega+\nu)}, \ldots$.[2]

---

en faisant parcourir à chacune des quantités $n, m_1, m_2, \ldots, m_n$ toute la série des nombres entiers positifs. Dans ce cas $P^{(\omega)}$ ne contient que le seul point zéro. L'ensemble considéré P est un ensemble de points isolés.

(1) Comme exemple d'un ensemble de points P, pour lequel $P^{(\omega+n)}$ contient un nombre fini de points, on peut citer celui qu'on obtient de l'expression

$$\frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{m_1+m_2+\ldots+m_n}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2+\ldots+m_n+p}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2+\ldots+m_n+p+q_1}}$$
$$+ \frac{1}{2^{m_1+m_2+\ldots+m_n+p+q_1+q_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{m_1+m_2+\ldots+m_n+p+q_1+q_2+\ldots+q_p}}$$

en y faisant parcourir à chacune des quantités $m_1, m_2, \ldots, m_n, p, q_1, q_2, \ldots, q_p$ toute la série des nombres entiers positifs. L'ensemble considéré est un ensemble isolé et $P^{(\omega+n)}$ ne contient que le seul point zéro.

(2) Soit P l'ensemble de tous les nombres, que l'on obtient de l'expression

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+m_1}} + \frac{1}{2^{n+m_1+m_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+m_1+m_2+\ldots+m_n}} + \frac{1}{2^{n+m_1+m_2+\ldots+m_n+p}}$$
$$+ \frac{1}{2^{n+m_1+m_2+\ldots+m_n+p+q_1}} + \frac{1}{2^{n+m_1+m_2+\ldots+m_n+p+q_1+q_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+m_1+m_2+\ldots+m_n+p+q_1+q_2+\ldots+q_p}}$$

en faisant parcourir à toutes les quantités $n, m_1, m_2, \ldots, m_n, p, q_1, q_2, \ldots, q_p$ toute la série des nombres entiers positifs. Il n'existe pas dans ce cas de nombre entier ν tel, que $P^{(\omega+\nu)} = 0$. L'ensemble considéré est un ensemble de points isolé et $P^{(2\omega)}$ ne contient que le seul point *zéro*.

En continuant de procéder ainsi, on arrive à un ensemble de points $P^{(\nu\omega+\nu')}$, où ν et ν' désignent des nombres entiers positifs. On désigne ensuite par $P^{(\omega^2)}$ l'ensemble des points communs à tous les ensembles $P^{(\omega)}, P^{(2\omega)}, \dots, P^{(\nu\omega)}, \dots$ et l'on obtient alors l'ensemble $P^{(\nu\omega^2+\nu'\omega'+\nu'')}$ où ν, ν', ν'' désignent des nombres entiers positifs. En poursuivant le même procédé, on parvient à l'ensemble de points

$$P^{(\nu\omega^{\mu}+\nu_1\omega^{\mu-1}+\dots+\nu_{\mu-1}\omega+\nu_{\mu})}$$

puis à

$$P^{(\omega^{\omega})}, \quad P^{(\omega^{\omega+1})}, \dots, (P^{\omega^{\omega+\mu}}), \quad P^{(\omega^{\omega^{\omega}})} \text{ etc.}$$ [1]

Tous les symboles $\omega,\ \omega+1, \dots, 2\omega, \dots, \nu\omega, \dots, \omega^2,\ \omega^2+1, \dots, \nu\omega^{\mu}+\nu_1\omega^{\mu-1}+\dots+\nu_{\mu-1}\omega+\nu_{\mu}, \dots, \omega^{\omega}, \dots, \omega^{\omega^{\omega}}, \dots, \alpha, \dots$ sont appelés par Cantor des nombres de *la seconde classe,* [2] tandis que les nombres entiers positifs $1, 2, \dots, \nu, \dots$ constituent ceux de la *première classe.* Il existe pour les nombres de la seconde classe, de même que pour ceux de la première, un ordre déterminé d'après lequel ils sont rangés, de sorte que si l'on prend un nombre quelconque, il existe toujours un autre nombre, et un seul, qui suit immédiatement après lui. Mais le contraire n'a évidemment pas toujours lieu et l'on ne peut pas dire qu'à chaque nombre donné corresponde toujours un autre nombre, qui le *précède immédiatement.* [3]

En parcourant la série $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(\alpha)}, \dots$ où α désigne un nombre quelconque de la première ou de la seconde classe il se peut qu'on parvienne à un nombre $\bar{\alpha}$ tel, que $P^{(\bar{\alpha})}$ ne contienne qu'un nombre fini de points, et que par conséquent $P^{(\bar{\alpha}+1)}=0$. Dans ce cas l'ensemble $P^{(\alpha)}$, où α est un des nombres qui précèdent $\bar{\alpha}$, a la même puissance que la série des nombres $1, 2, \dots, \nu, \dots$ c'est-à-dire *la première puissance.* [4]

---

[1] Voir ce journal, T. 2, p. 359—60.

[2] Voir ce journal, T. 2, p. 385.

[3] Pour les nombres 2ω, ω^{ω}, etc., par exemple, il n'existe pas de nombre qui les précède immédiatement.

[4] Voir ce journal, T. 2, p. 409, Théorème B.

La réciproque se présente également: si P' est un ensemble de points de la première puissance, il existe toujours un nombre de la première ou de la seconde classe $\bar{\alpha}$, tel que $P^{(\bar{\alpha})}$ ne contient qu'un nombre fini de points. (¹)

Mais il peut aussi arriver qu'en procédant dans la série

$$P^{(1)},\ P^{(2)}, \ldots,\ P^{(\alpha)}, \ldots$$

on n'arrive jamais à un ensemble ne contenant qu'un nombre fini de points. Dans ce cas on peut énoncer le théorème suivant, qui a été démontré par un de mes élèves, M. I. BENDIXSON (²), et qui embrasse comme cas spécial le théorème précité de CANTOR: »Si P est un ensemble de points quelconque, il existe toujours un premier nombre γ appartenant à la première ou à la seconde classe, pour lequel $P^{(\gamma)} = P^{(\gamma+1)}$. L'ensemble $P' - P^{(\gamma)}$ a la première puissance.»

Considérons maintenant un *continuum*, dont la limite complète est constituée par l'ensemble de points $S = S'$. D'après un autre théorème de BENDIXSON cité au page 45 il est toujours possible pour chaque nombre donné de la première ou de la seconde classe γ de séparer d'une infinité de manières différentes de ce *continuum* un ensemble de points tel, que, ajouté à l'ensemble S, il forme un ensemble de points P, contenant l'ensemble $P^{(1)}$ et ayant la propriété $P^{(\gamma)} = S$; on aura par conséquent $P^{(\gamma)} = P^{(\gamma+1)}$, et on peut toujours choisir l'ensemble $P - P^{(\gamma)}$ de façon que le nombre donné γ soit le premier nombre de la première ou de la seconde classe, pour lequel cette égalité ait lieu.

(¹) Voir ce journal, T. 2, p. 409, Théorème C. A proprement parler, le théorème C de CANTOR énonce seulement qu'il existe toujours un premier nombre γ, qui appartient à la première ou à la seconde classe et pour lequel $P^{(\gamma)} = 0$. Mais en se servant des mêmes raisonnements que BENDIXSON (voir ce journal, T. 2, p. 419—421), on montre facilement que γ doit toujours avoir la forme $\bar{\alpha} + 1$ et que par conséquent $P^{(\bar{\alpha})}$ ne contient qu'un nombre fini de points.

(²) Voir ce journal, T. 2, p. 426. Voir aussi à ce sujet CANTOR, *Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten.* N° 6. Mathematische Annalen, Bd. 23, p. 467—469.

Il est aisé maintenant de démontrer que, après avoir retranché du *continuum* donné l'ensemble de points $P - P^{(\gamma)}$, le domaine qui reste est toujours un *continuum* $\mathfrak{A}$, composé d'une seule pièce et complètement limité par l'ensemble de points P. CANTOR a démontré, en effet, que si l'on retranche du *continuum* donné un ensemble de points P_1 quelconque, de la première puissance, il est toujours possible d'unir deux points appartenant à ce *continuum* mais non à P_1, par une ligne continue, dont tout le parcours appartient au *continuum* considéré et qui ne passe par aucun des points de P_1. (1) Mais si P a une signification telle que dans le cas présent et que $P_1 = P - P^{(\gamma)}$, chaque point de P_1' appartient nécessairement à P_2' et par conséquent aussi à P, c'est-à-dire ou bien à P_1 ou bien à $P^{(\gamma)}$. Mais $P^{(\gamma)}$ constituant la limite du premier *continuum* considéré la limite inférieure de la distance d'un point de la ligne donnée à un point de P est par conséquent une quantité positive, et les deux points extrêmes de la ligne sont toujours unis par un *continuum*, appartenant au *continuum* considéré. Et la proposition que j'ai énoncée se trouve démontrée par là. On voit de même que si α est un nombre quelconque de la première ou de la seconde classe, qui précède γ, $\mathfrak{A} + P - P^{(\alpha)}$ est un nouveau *continuum* composé d'une seule pièce et limité complètement par l'ensemble de points $P^{(\alpha)}$.

Je me suis déjà servi de ce théorème, dans le cas le plus simple où $\alpha = 1$.

Ces considérations préliminaires une fois établies, il me sera facile de terminer mes recherches de la façon indiquée au commencement de ce paragraphe.

Soit $\mathfrak{C}$ un *continuum*, dont la limite complète est formée par un ensemble de points que je désignerai par R, et qui est tel que l'égalité $R - R' = 0$ n'ait pas lieu; et soit γ le premier nombre de la première ou de la seconde classe, pour lequel $R^{(\gamma)} = R^{(\gamma+1)}$. Soient de plus $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ les différents points dont la totalité forme l'ensemble $R - R^{(\gamma)}$. Désignons encore par a_{ν_α} les points a_ν appartenant à l'ensemble $R^{(\alpha)} - R^{(\alpha+1)}$ où α est un nombre qui précède γ. Le nombre α peut aussi être égal à zéro, dans quel cas a_{ν_0} désigne les points différents qui composent l'ensemble $R - R^{(1)}$. Je remarquerai ici en passant

(1) Voir ce journal, T. 2, p. 369.

que $R^{(\alpha)} - R^{(\alpha+1)}$ ne peut évidemment être composé d'un nombre fini de points que dans le cas où $R^{(\alpha+1)} = R^{(\gamma)}$. Si $R^{(\gamma)} = 0$, il existe toujours un nombre $\bar{\alpha}$ tel que $\gamma = \bar{\alpha} + 1$. Dans ce cas, $R^{(\bar{\alpha})} - R^{(\bar{\alpha}+1)}$ ne contient de même qu'un nombre fini de points. A chaque point a_{ν_α}, qui n'est ni zéro, ni infini et qui n'appartient pas à un ensemble fini de points $R^{(\alpha)} - R^{(\alpha+1)}$, on peut toujours faire correspondre de la manière suivante un autre point b_{ν_α}, situé sur la limite ou en dehors du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R^{(\alpha+1)}$. Désignons par β_{ν_α} la limite inférieure de $|b - b_{\nu_\alpha}|$, lorsque b parcourt les uns après les autres tous les points de l'ensemble $R^{(\alpha+1)}$ et choisissons b_{ν_α} de manière que: 1° la limite supérieure de β_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) soit une quantité finie; et que 2° l'égalité

$$\lim_{\nu=\infty}(|a_\nu - b_\nu| - \beta_\nu) = 0$$

ait lieu; c'est-à-dire qu'à chaque quantité positive donnée θ corresponde un nombre entier positif n, tel que

$$|a_\nu - b_\nu| - \beta_\nu < \theta$$

dès que $\nu \geqq n$.

On peut toujours choisir les quantités b_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) dans l'ensemble R' de manière que la condition soit satisfaite. Toutes les quantités β_ν sont en effet égales à *zéro* dans ce cas, et l'on n'a qu'à choisir entre les points de l'ensemble R', des points b_ν tels, que b_{ν_α} appartienne à l'ensemble $R^{(\alpha+1)}$ et que

$$\lim_{\nu=\infty}|a_\nu - b_\nu| = 0$$

c'est-à-dire, qu'à chaque quantité positive θ corresponde un nombre entier positif n tel que $|a_\nu - b_\nu| < \theta$, dès que $\nu \geqq n$. Cela aura lieu par exemple, si l'on choisit b_{ν_α} de manière que $|a_{\nu_\alpha} - b_{\nu_\alpha}|$ soit égal à la limite inférieure des différentes valeurs que prend $|a_{\nu_\alpha} - b|$, lorsque b désigne l'un après l'autre les différents points de l'ensemble $R^{(\alpha+1)}$. En effet, s'il existe dans ce cas un nombre infini de points a_ν pour lesquels $|a_{\nu'} - b_{\nu'}| \geqq \theta$, il existe aussi toujours un point b' tel, que dans chaque entourage de ce point, se trouvent des points $a_{\nu'}$. Ce point appartient par conséquent à l'ensemble R', mais peut aussi appartenir à $R^{(2)}$, $R^{(3)}$, ... etc. Dans tous les cas on peut toujours trouver dans la série $R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots, R^{(\alpha)}, \ldots, R^{(\gamma)}$ le dernier ensemble $R^{(\alpha')}$, qui contient le point b', et l'on peut toujours, par conséquent, fixer une quantité positive et suffisamment petite $\theta' < \theta$ de manière que le nombre α correspondant à chacun des points en nombre infini $a_{\nu'_\alpha}$, situés à l'intérieur du domaine $|x - b'| \leqq \theta'$, est un nombre qui précède α' et que b' appartienne par conséquent à l'ensemble $R^{(\alpha+1)}$; mais $b_{\nu'_\alpha}$ appartient aussi à l'ensemble $R^{(\alpha+1)}$ et $|a_{\nu'_\alpha} - b_{\nu'_\alpha}|$ est un minimum, d'où il résulte que $|a_{\nu'_\alpha} - b_{\nu'_\alpha}| \leqq |a_{\nu'_\alpha} - b'| < \theta$; mais cela est contraire à la supposition préliminaire $|a_{\nu'} - b_{\nu'}| \geqq \theta$. Si l'on choisit par conséquent b_{ν_α} de manière que $|a_{\nu_\alpha} - b_{\nu_\alpha}|$ soit égal à la valeur minimum qu'obtient $|a_{\nu_\alpha} - b|$, lorsque b parcourt tout l'ensemble $R^{(\alpha+1)}$, on aura toujours $\lim\limits_{\nu=\infty} |a_\nu - b_\nu| = 0$, et il est possible par conséquent de fixer les quantités b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ de manière que

$$\lim_{\nu=\infty} (|a_\nu - b_\nu| - \beta_\nu) = 0.$$

S'il se trouve des points, situés en dehors du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R^{(\gamma)}$, les quantités b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ peuvent être fixées d'une infinité de manières différentes, de sorte que $\lim\limits_{\nu=\infty} (|a_\nu - b_\nu| - \beta_\nu) = 0$, sans que l'on ait besoin pour cela d'égaler à zéro tous les β_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Si l'on a par exemple $\gamma = \bar{\alpha} + 1$ et si $R^{(\gamma)}$ est un cercle qui a le point $x = 0$ pour centre, on peut procéder de la manière suivante.[1] On adjoint à chaque point a_{ν_α} où α précède $\bar{\alpha}$, un point b_{ν_α} tel, que $|a_{\nu_\alpha} - b_{\nu_\alpha}|$ soit égal au minimum de toutes les valeurs de $|a_{\nu_\alpha} - b|$, lorsque b parcourt l'un après l'autre tous les points de l'ensemble $R^{(\alpha+1)}$. Si $\mathfrak{C} + R - R^{(\gamma)}$ contient le point $x = 0$, on prend enfin tous les points $b_{\nu_{\bar{\alpha}}} = \infty$. Et si, d'un autre côté, $\mathfrak{C} + R - R^{(\gamma)}$ ne contient pas $x = 0$, mais au contraire $x = \infty$, on pose $b_{\nu_{\bar{\alpha}}} = 0$.

([1]) Cf. page 25.

Maintenant qu'à chaque point a_{ν_α} qui n'est ni zéro ni infini et qui n'appartient pas à un ensemble fini $R^{(\alpha)} - R^{(\alpha+1)}$, il correspond un nouveau point b_{ν_α}, situé en dehors ou sur la limite du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R^{(\alpha+1)}$ et choisi de manière que la limite supérieure de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots$ soit une quantité finie, et que $\lim\limits_{\nu=\infty}(|a_\nu - b_\nu| - \beta_\nu) = 0$, on fixera une série de quantités positives $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$ dont la somme est finie, et une seconde série de quantités positives $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(\nu)}, \ldots$ telles que $\lim\limits_{\nu=\infty} \varepsilon^{(\nu)} = 1$. Fixons de plus une série de nombres entiers $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$ qui peuvent être positifs ou négatifs ou nuls, et qui, du reste, peuvent être choisis arbitrairement, sauf que si $R^{(\alpha)} - R^{(\alpha+1)}$ est un ensemble fini de points, la somme de tous les nombres n correspondant aux différents points de cet ensemble, doit être égale à zéro. Nous formerons ensuite une série de fonctions

$$\mathfrak{G}_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right),\quad \mathfrak{G}_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right), \ldots, \mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right), \ldots$$

telles, que $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ soit une fonction entière, rationnelle ou transcendante, de $\frac{1}{x-a_\nu}$, qui s'annule pour $\frac{1}{x-a_\nu} = 0$, et que $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ ne soit pas identiquement égal à zéro, si $n_\nu \leqq 0$.

A chaque point a_{ν_α} correspond par conséquent une fonction déterminée $(x - a_{\nu_\alpha})^{n_{\nu_\alpha}} \mathfrak{G}_{\nu_\alpha}\left(\frac{1}{x-a_{\nu_\alpha}}\right)$ ainsi que deux quantités déterminées ε_{ν_α} et $\varepsilon^{(\nu_\alpha)}$. Par conséquent, d'après le théorème B du § 2 les quantités ε_{ν_α} et $\varepsilon^{(\nu_\alpha)}$ permettent de former avec les éléments

$$(x - a_{\nu_\alpha})^{n_{\nu_\alpha}} \mathfrak{G}_{\nu_\alpha}\left(\frac{1}{x-a_{\nu_\alpha}}\right)$$

une expression analytique $F_x^{(\alpha)}$, pour chaque nombre α qui est égal à zéro ou bien appartient à la première ou à la seconde classe de nombres et précède γ. Cette expression représente à l'intérieur du *continuum* dont la limite complète est constituée par l'ensemble $R^{(\alpha)} - R^{(\alpha+1)}$ et par la première dérivée (selon la notation de CANTOR) de cet ensemble, une fonction monogène uniforme, qui se comporte régulièrement partout à l'intérieur de ce *continuum* et dans l'entourage de chaque point $x = a_{\nu_\alpha}$ peut être mise sous la forme

$$(x - a_{\nu_\alpha})^{n_{\nu_\alpha}} \mathfrak{G}_{\nu_\alpha}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_\alpha}}\right) + (x - a_{\nu_\alpha})^{n_{\nu_\alpha}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_\alpha}).$$

Les expressions $F_x^{(\alpha)}$ que l'on obtient de cette manière peuvent toujours être rangées en série simple $F_x^{\alpha,\mu}$ ($\mu = 1, 2, \ldots$), où le nouvel indice μ, ajouté à l'expression $F_x^{(\alpha)}$, indique la place qu'elle occupe dans cette série.

On peut maintenant démontrer le théorème suivant:

A. »L'expression $\sum\limits_{\mu=1}^{\infty} F_x^{\alpha,\mu}$ représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C}$ une fonction monogène, uniforme et régulière, qui dans l'entourage de chaque point $x = a_{\nu_0}$ peut être égalée à

$$(x - a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \left[\mathfrak{G}_{\nu_0}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_0}}\right) + \mathfrak{P}(x - a_{\nu_0})\right] + \mathfrak{P}(x - a_{\nu_0}).$$

Si α' est un nombre de la première ou de la seconde classe, qui précède γ, et que l'on sépare de la série $\sum\limits_{\mu=1}^{\infty} F_x^{\alpha,\mu}$ tous les termes, dont le premier indice correspond à un nombre α précédant α', la série qui reste représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R^{(\alpha')}$ une fonction monogène, uniforme et régulière, laquelle dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_{\nu_{\alpha'}}$ peut être égalée à

$$(x - a_{\nu_{\alpha'}})^{n_{\nu_{\alpha'}}} \left[\mathfrak{G}_{\nu_{\alpha'}}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_{\alpha'}}}\right) + \mathfrak{P}(x - a_{\nu_{\alpha'}})\right] + \mathfrak{P}(x - a_{\nu_{\alpha'}}).«$$

Soit en effet x_0 un point à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R'$ et ρ une quantité positive suffisamment petite pour que le domaine $|x - x_0| \leqq \rho$ ne contienne aucun point appartenant à l'ensemble R, excepté tout au plus le point x_0 lui-même. Si l'on désigne maintenant par δ une quantité positive quelconque, il est toujours possible, en vertu des considérations développées au § 1 [1], de fixer un nombre n assez grand pour que

$$\sum_{\nu=\nu'}^{\infty} \varepsilon_\nu < \delta$$

et

$$\sum_{\mu=\mu'}^{\infty} | F_x^{\alpha,\mu} | < \delta$$

dès que $|x - x_0| \leqq \rho$, en même temps que $\nu' \geqq n$, et $\mu' \geqq n$.

On a, par conséquent, dès que $|x - x_0| \leqq \rho$, si x_0 appartient à $\mathfrak{C}$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} F_x^{\alpha,\mu} = \mathfrak{P}(x - x_0)$$

et si x_0 coïncide avec un point a_{ν_0} appartenant à l'ensemble $R - R'$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} F_x^{\alpha,\mu} = (x - a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \left[\mathfrak{G}_{\nu_0}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_0}}\right) + \mathfrak{P}(x - a_{\nu_0}) \right] + \mathfrak{P}(x - a_{\nu_0}).$$

On peut déduire de la même manière les propriétés de la série qui reste, après avoir retranché de $\sum_{\mu=1}^{\infty} F_x^{\alpha,\mu}$ tous les termes dans lesquels α précède α'.

Le théorème $\boldsymbol{A}$ nous permet maintenant de généraliser les théorèmes $\boldsymbol{B}'$ du § 1 et du § 2 de la manière indiquée au commencement de ce paragraphe-ci: Désignons comme auparavant par $F(x)$ une fonction monogène uniforme, dont l'ensemble des points réguliers constitue un *continuum* $\mathfrak{A}$, que limite complètement l'ensemble de points P, composé par la totalité des points singuliers de cette fonction. Indiquons de plus par γ le premier nombre de la première ou de la seconde classe, pour lequel $P^{(\gamma)} = P^{(\gamma+1)}$. J'appellerai R un ensemble de points que je retrancherai du *continuum* $\mathfrak{A} + P$ et qui a les propriétés suivantes: il contient les deux ensembles R' et P et l'on a de plus $R^{(\gamma)} = P^{(\gamma)}$. On voit immédiatement que si α est un nombre quelconque de la première ou de la seconde classe qui précède γ, l'ensemble $R^{(\alpha)}$ embrasse l'ensemble $P^{(\alpha)}$. Il en découle que γ est le premier nombre de la première ou de

---

[1] Pag. 14 et 27.

la seconde classe, pour lequel $R^{(\gamma)} = R^{(\gamma+1)}$. Je désignerai de même qu'au théorème $\boldsymbol{A}$, par $\mathfrak{C}$ le *continuum* dont la limite complète est constituée par R. L'ensemble de points $R - R^{(\gamma)}$ a la première puissance; on peut par conséquent, de la même manière qu'au théorème $\boldsymbol{A}$, désigner par $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ tous les points qui le composent. A chacun de ces points a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, qui n'est ni zéro ni infini, et qui n'appartient pas à un ensemble fini de points $R^{(\alpha)} - R^{(\alpha+1)}$, on peut faire correspondre, avec la même signification qu'au théorème $\boldsymbol{A}$, un nouveau point b_ν, de même qu'une quantité positive $\varepsilon^{(\nu)}$ et une autre quantité positive ε_ν.

On peut de plus adjoindre à chaque point a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ un nombre entier positif ou nul n_ν, qui est soumis aux deux conditions suivantes: 1° si a_ν appartient à l'ensemble $R - R'$ sans appartenir pour cela à P, le nombre correspondant n_ν est toujours positif; et 2° si $R^{(\alpha+1)} = R^{(\gamma)} = 0$; chaque nombre n_ν qui correspond à un point de l'ensemble fini $R^{(\alpha)} - R^{(\alpha+1)}$ est égal à zéro. Sous tous les autres rapports, les nombres n_ν peuvent être choisis arbitrairement.

La fonction donnée $F(x)$, dans l'entourage immédiat de chaque point a_{ν_0}, appartenant à l'ensemble $R - R'$, peut toujours être mise sous la forme

$$F(x) = (x - a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \mathfrak{G}_{\nu_0}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_0}}\right) + (x - a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_0});$$

à chaque point a_{ν_0} correspond, par conséquent, une fonction parfaitement déterminée $\mathfrak{G}_{\nu_0}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_0}}\right)$. On peut donc (voir page 43) former à l'aide des quantités b_{ν_0}, ε_{ν_0} et $\varepsilon^{(\nu_0)}$ une expression $F_x^{(0)}$, qui représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C}$ une fonction monogène, uniforme et régulière pouvant toujours être égalée, dans le voisinage immédiat de chaque point a_{ν_0}, à

$$(x - a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \mathfrak{G}_{\nu_0}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_0}}\right) + (x - a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_0}).$$

La différence

$$F(x) - F_x^{(0)}$$

représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R'$ une fonction monogène, uniforme et régulière, qui dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_{\nu_0}$ peut toujours être mise sous la forme $(x - a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}}\mathfrak{P}(x - a_{\nu_0})$. De son côté, cette dernière fonction peut toujours dans l'entourage de chaque point a_{ν_1} appartenant à l'ensemble $R^{(1)} - R^{(2)}$ être égalée à

$$(x - a_{\nu_1})^{n_{\nu_1}}\mathfrak{G}_{\nu_1}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_1}}\right) + (x - a_{\nu_1})^{n_{\nu_1}}\mathfrak{P}(x - a_{\nu_1}).$$

On peut à l'aide des quantités b_{ν_1} et des nombres ε_{ν_1}, $\varepsilon^{(\nu_1)}$, former avec les éléments $\mathfrak{G}_{\nu_1}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_1}}\right)$ et les nombres correspondants n_{ν_1} une expression analytique $F_x^{(1)}$, laquelle représente à l'intérieur de $\mathfrak{C} + R - R^{(1)}$ une fonction monogène, uniforme et régulière, pouvant être égalée, dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_{\nu_1}$, à

$$(x - a_{\nu_1})^{n_{\nu_1}}\mathfrak{G}_{\nu_1}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_1}}\right) + (x - a_{\nu_1})^{n_{\nu_1}}\mathfrak{P}(x - a_{\nu_1}).$$

La différence $F(x) - F_x^{(0)} - F_x^{(1)}$ représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R^{(2)}$ une fonction monogène, uniforme et régulière qui dans le voisinage de chaque point $x = a_{\nu_1}$ peut être mise sous la forme $(x - a_{\nu_1})^{n_{\nu_1}}\mathfrak{P}(x - a_{\nu_1})$ et, dans le voisinage de chaque point $x = a_{\nu_2}$ appartenant à l'ensemble $R^{(2)} - R^{(3)}$, peut être égalée à

$$(x - a_{\nu_2})^{n_{\nu_2}}\mathfrak{G}_{\nu_2}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_2}}\right) + (x - a_{\nu_2})^{n_{\nu_2}}\mathfrak{P}(x - a_{\nu_2}).$$

En continuant le même procédé, on forme successivement les nouvelles expressions $F_x^{(2)}, F_x^{(3)}, \ldots, F_x^{(\chi)}, \ldots$ dont la somme $\sum_{\chi=0}^{\infty} F_x^{(\chi)}$ représente à l'intérieur de $\mathfrak{C}$ une fonction monogène, uniforme et régulière, grâce à la manière dont chacune des expressions $F_x^{(\chi)}$ a été formée par l'intermédiaire des nombres ε_{ν_χ} et $\varepsilon^{(\nu_\chi)}$ et des quantités b_{ν_χ}. Cette somme a de plus les propriétés suivantes.

Si l'on pose

$$\sum_{\chi=0}^{\chi=\infty} F_x^{(\chi)} = \sum_{\chi=0}^{\chi=\chi'} F_x^{(\chi)} + \sum_{\chi=\chi'+1}^{\infty} F_x^{(\chi)}$$

les expressions

$$F(x) - \sum_{\chi=0}^{\chi=\chi'} F_x^{(\chi)}$$

et

$$\sum_{\chi=\chi'+1}^{\infty} F_x^{(\chi)}$$

représentent toutes les deux, à l'intérieur de $\mathfrak{C} + R - R^{(\chi'+1)}$ des fonctions monogènes, uniformes et régulières, dont la première peut toujours être égalée à

$$(x - a_{\nu_{\chi'}})^{n_{\nu_{\chi'}}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_{\chi'}})$$

dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_{\nu_{\chi'}}$.

La différence

$$F(x) - \sum_{\chi=0}^{\chi=\infty} F_x^{(\chi)}$$

représente aussi à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R^{(\omega)}$ une fonction monogène, uniforme et régulière. On a par conséquent dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_{\nu_\omega}$, appartenant à l'ensemble de points $R^{(\omega)} - R^{(\omega+1)}$

$$F(x) - \sum_{\chi=0}^{\chi=\infty} F_x^{(\chi)} = (x - a_{\nu_\omega})^{n_{\nu_\omega}} \mathfrak{G}_{\nu_\omega}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_\omega}}\right) + (x - a_{\nu_\omega})^{n_{\nu_\omega}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_\omega}).$$

En se servant des quantités b_{ν_ω}, ε_{ν_ω} et $\varepsilon^{(\nu_\omega)}$, on peut toujours former une expression $F_x^{(\omega)}$, représentant à l'intérieur de $\mathfrak{C} + P - P^{(\omega)}$ une fonction monogène, uniforme et régulière, qui, dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_{\nu_\omega}$, peut être égalée à

$$(x - a_{\nu_\omega})^{n_{\nu_\omega}} \mathfrak{G}_{\nu_\omega}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_\omega}}\right) + (x - a_{\nu_\omega})^{n_{\nu_\omega}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_\omega}).$$

On peut continuer ce même procédé et former les expressions $F_x^{(\omega)}, F_x^{(\omega+1)}, \ldots, F_x^{(\alpha)}, \ldots$ où α désigne successivement l'un après l'autre tous les nombres entiers de la première ou de la seconde classe qui précèdent γ. Si l'on range ensuite les expressions

$$F_x^{(0)}, F_x^{(1)}, \ldots, F_x^{(\alpha)}, \ldots$$

en série simple, et que l'on marque la place qu'occupe chacune de ces expressions dans cette série par un nouvel indice supérieur, la somme

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} F_x^{a,\mu}$$

aura les propriétés suivantes:

1° Elle représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C}$ une fonction monogène, uniforme et régulière, de x.

2° Si l'on pose

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} F_x^{a,\mu} = \sum_{(1)}^{\alpha'} F_x^{a,\mu} + \sum_{(2)}^{\alpha'} F_x^{a,\mu}$$

où α' est un nombre qui précède γ et où $\sum\limits_{(1)}^{\alpha'}$ désigne la somme de tous les termes de $\sum\limits_{\mu=1}^{\infty} F_x^{a,\mu}$, dont le premier indice précède α', tandis que $\sum\limits_{(2)}^{\alpha'}$ désigne la somme de tous les termes, dont le premier indice ne précède pas α', les expressions

$$F(x) - \sum_{(1)}^{\alpha'} F_x^{a,\mu}$$

et

$$\sum_{(2)}^{\alpha'} F_x^{a,\mu}$$

représentent des fonctions, qui toutes les deux sont monogènes, uniformes et régulières à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R^{(\alpha')}$. Si α' est un nombre tel, qu'il existe un autre nombre qui le précède immédiatement, ou, en d'autres termes, $\alpha' = \bar{\alpha}' + 1$, la première de ces deux fonctions, dans l'entourage immédiat de chaque point $x = a_{\nu_{\bar{\alpha}'}}$, peut toujours être mise sous la forme

$$(x - a_{\nu_{\bar{\alpha}'}})^{n_{\nu_{\bar{\alpha}'}}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_{\bar{\alpha}'}}).$$

3° La différence

$$F(x) - \sum_{\mu=1}^{\infty} F_x^{a,\mu}$$

représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R^{(\gamma)}$ une fonction monogène, uniforme et régulière. S'il existe pour le nombre γ un autre nombre, qui le précède immédiatement, c'est-à-dire si $\gamma = \bar{\alpha} + 1$, la fonction considérée peut, dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_{\nu_{\bar{\alpha}}}$, être égalée à

$$(x - a_{\nu_{\bar{\alpha}}})^{n_{\nu_{\bar{\alpha}}}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_{\bar{\alpha}}}).$$

Si $P^{(\gamma)} = 0$, la différence

$$F(x) - \sum_{\mu=1}^{\infty} F_x^{\alpha,\mu}$$

représente une fonction qui est monogène, uniforme et régulière dans tout le domaine de la variable x. Mais une telle fonction est nécessairement constante, et on a par conséquent dans ce cas

$$F(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} F_x^{\alpha,\mu} + C.$$

Le résultat que nous venons d'obtenir peut se formuler dans le théorème suivant:

A'. »Soit $F(x)$ une fonction monogène uniforme de la variable x. Désignons par $\mathfrak{A}$ le *continuum* composé par l'ensemble de tous les points réguliers de cette fonction, par P l'ensemble de ses points singuliers et par γ le premier nombre de la première ou de la seconde classe, pour lequel $P^{(\gamma)} = P^{(\gamma+1)}$.

Soit de plus R un ensemble de points appartenant au *continuum* $\mathfrak{A} + P$, qui renferme les deux ensembles R' et P et pour lequel $R^{(\gamma)} = P^{(\gamma)}$, mais qui, pour tout le reste, peut être choisi arbitrairement.

Il est toujours possible de former une expression analytique, représentant une fonction monogène uniforme qui se comporte régulièrement partout à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A}$ et qui, dans le voisinage immédiat de chaque point appartenant à l'ensemble $R - R^{(\gamma)}$, coïncide avec $F(x)$ à un degré de précision voulu[1] et qui, de plus, est telle, que la différence entre elle et $F(x)$ représente, à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A} + P - P^{(\gamma)}$ complètement limité par l'ensemble de points $P^{(\gamma)}$, une nouvelle fonction monogène et uniforme.»

Les théorèmes ***A*** et ***A'*** que je viens d'établir constituent la généralisation des théorèmes ***B*** et ***B'*** du § 2, que j'ai annoncée au commen-

---

[1] Ce que je veux dire par là est suffisamment éclairci par l'exposition qui précède.

cement de ce paragraphe. Le cas où γ est un nombre de la première classe, $P^{(\gamma)} = 0$ et tous les nombres n_ν sont nuls, a été démontré par moi dans le Bulletin (Öfversigt) des travaux de l'Académie des sciences de Suède (8 Février 1882), ainsi que dans les Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences à Paris, 3, 24, 17 Avril 1882.[1]

Voyons maintenant comment on peut, d'une manière exactement semblable, établir deux nouveaux théorèmes généralisant les théorèmes C et C' du § 2.

Nous désignerons toujours par $\mathfrak{C}$ un *continuum* limité complètement par l'ensemble de points R, où nous supposons que γ est le premier nombre de la première ou de la seconde classe pour lequel $R^{(\gamma)} = R^{(\gamma+1)}$. Soient de plus $a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots$ les différents points, dont la totalité compose l'ensemble $R - R^{(\gamma)}$. On peut maintenant, avec la même signification que précédemment, adjoindre aux points $a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots$ de nouveaux points $b_1, b_2, \dots, b_\nu, \dots$ et deux séries de quantités positives $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\nu, \dots$ et $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \dots, \varepsilon^{(\nu)}, \dots$. On doit de plus annexer à chaque point a_ν $(\nu = 1, 2, \dots)$ deux nombres entiers m_ν et n_ν, positifs, négatifs ou nuls et choisis arbitrairement, avec cette seule restriction que si $R^{(\alpha)} - R^{(\alpha+1)}$ est un ensemble fini de points, la somme de tous les nombres m_{ν_α} correspondant aux différents points de cet ensemble, doit être égale à zéro, et celle de tous les nombres n_{ν_α} correspondant à ces mêmes points est aussi égale à zéro. Adjoignons enfin à chaque point a_ν une fonction entière, rationnelle ou transcendante de $\frac{1}{x - a_\nu}$, $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$, qui s'annule pour $\frac{1}{x - a_\nu} = 0$, mais qui n'est pas identiquement égale à zéro si $n_\nu \leqq 0$.

A chaque point a_{ν_α}, appartenant à l'ensemble $R^{(\alpha)} - R^{(\alpha+1)}$ correspond alors[2] une expression déterminée

$$(x - a_{\nu_\alpha})^{m_{\nu_\alpha}} e^{(x - a_{\nu_\alpha})^{n_{\nu_\alpha}} \mathfrak{G}_{\nu_\alpha}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_\alpha}}\right)}$$

de même que deux quantités déterminées ε_{ν_α} et $\varepsilon^{(\nu_\alpha)}$. On peut donc toujours, d'après le théorème C du § 2, former une expression analytique

---

[1] Il faut observer que l'ordre de ces articles dans les Comptes rendus etc. a été interverti.

[2] Voir p. 49 et 50.

$f_x^{(\alpha)}$ qui représente, à l'intérieur du *continuum* limité complètement par $R^{(\alpha)} - R^{(\alpha+1)}$ et par la première dérivée de cet ensemble, une fonction monogène, uniforme et régulière, ne s'annulant nulle part à l'intérieur de ce *continuum* et pouvant dans le voisinage de chaque point $x = a_{\nu_\alpha}$ être égalée à

$$(x - a_{\nu_\alpha})^{m_{\nu_\alpha}} e^{(x-a_{\nu_\alpha})^{n_{\nu_\alpha}} \mathfrak{G}_{\nu_\alpha}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_\alpha}}\right) + (x-a_{\nu_\alpha})^{n_{\nu_\alpha}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_\alpha})}$$

Les expressions $f_x^{(\alpha)}$ que l'on obtient ainsi peuvent toujours être rangées en série simple $f_x^{\alpha,\mu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$.

Si l'on forme maintenant le produit $\prod\limits_{\mu=1}^{\infty} f_x^{\alpha,\mu}$, le théorème suivant, contenant une généralisation du théorème C du § 2, a lieu par rapport à ce produit.

B. »Le produit $\prod\limits_{\mu=1}^{\infty} f_x^{\alpha,\mu}$ représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C}$ une fonction monogène, uniforme et régulière, qui ne s'annule pour aucun point de ce *continuum* et qui, dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_{\nu_0}$, peut être égalée à

$$(x - a_{\nu_0})^{m_{\nu_0}} e^{(x-a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}}\left[\mathfrak{G}_{\nu_0}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_0}}\right) + \mathfrak{P}(x - a_{\nu_0})\right] + \mathfrak{P}(x - a_{\nu_0})}$$

Si α' est un nombre entier de la première ou de la seconde classe qui précède γ, et que l'on sépare du produit $\prod\limits_{\mu=1}^{\infty} f_x^{\alpha,\mu}$ tous les facteurs dont le premier indice correspond à un nombre précédant α', le produit qui reste représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R^{(\alpha')}$ une fonction monogène, uniforme et régulière, laquelle ne s'annule pour aucun point de ce *continuum* et, dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_{\nu_{\alpha'}}$, peut toujours être égalée à

$$(x - a_{\nu_{\alpha'}})^{m_{\nu_{\alpha'}}} e^{(x-a_{\nu_{\alpha'}})^{n_{\nu_{\alpha'}}}\left[\mathfrak{G}_{\nu_{\alpha'}}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_{\alpha'}}}\right) + \mathfrak{P}(x - a_{\nu_{\alpha'}})\right] + \mathfrak{P}(x - a_{\nu_{\alpha'}})} .«$$

La démonstration de ce théorème découle immédiatement du raisonnement dont nous nous sommes servis pour établir le théorème A de ce paragraphe et le théorème C du paragraphe précédent.

On obtient de même facilement un nouveau théorème, qui contient la généralisation annoncée du théorème C' du § 2. Nous désignerons toujours par $F(x)$ une fonction monogène et uniforme dont l'ensemble des points réguliers constitue le *continuum* $\mathfrak{A}$ et dont les points singuliers forment l'ensemble P. De même qu'au § 2, nous désignerons par $\mathfrak{B}$ l'ensemble de tous les points réguliers qui ne sont pas des points-zéros de cette fonction, et par $\mathfrak{P}$ l'ensemble des points-zéros et des points singuliers; nous désignerons par δ le premier nombre de la première ou de la seconde classe pour lequel $\mathfrak{P}^{(\delta)} = \mathfrak{P}^{(\delta+1)}$. Séparons maintenant du *continuum* $\mathfrak{B} + \mathfrak{P}$ un ensemble de points R qui contient R' et embrasse $\mathfrak{P}$ et pour lequel $R^{(\delta)} = \mathfrak{P}^{(\delta)}$. Soit $\mathfrak{C}$ le *continuum*, dont la limite complète est constituée par R, et soient $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ les points différents dont la totalité forme l'ensemble $R - R^{(\delta)}$. Adjoignons à chaque point a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ un nombre entier positif ou nul n_ν, qui sera positif chaque fois que a_ν appartiendra à l'ensemble $R - R'$, sans faire pour cela partie de l'ensemble $\mathfrak{P}$, et qui sera nul dès que $R^{(\alpha+1)} = R^{(\delta)} = 0$ et a_ν appartiendra à l'ensemble fini $R^{(\alpha)} - R^{(\alpha+1)}$.

Dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_{\nu_0}$, appartenant à l'ensemble $R - R'$, la fonction donnée peut toujours être mise sous la forme

$$F(x) = (x - a_{\nu_0})^{m_{\nu_0}} e^{(x - a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \mathfrak{G}_{\nu_0}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_0}}\right) + (x - a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_0})}$$

et le nombre m_{ν_0} est entièrement déterminé par cette égalité; quant à l'expression $(x - a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \mathfrak{G}_{\nu_0}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_0}}\right)$, elle est déterminée à une constante additive près, égale à un multiple entier de $2\pi i$. D'après le théorème C du § 2, on peut toujours former une expression $f_x^{(0)}$, représentant à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C}$ une fonction monogène, uniforme et régulière, qui n'a pas de points-zéros à l'intérieur de ce *continuum* et qui, dans l'entourage de chaque point $x = a_{\nu_0}$, peut être égalée à

$$(x - a_{\nu_0})^{m_{\nu_0}} e^{(x - a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \mathfrak{G}_{\nu_0}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_0}}\right) + (x - a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_0})}$$

Le quotient

$$\frac{F(x)}{f_x^{(0)}}$$

représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R'$ une fonction monogène, uniforme et régulière, qui n'a pas de points-zéros dans ce *continuum* et qui, dans l'entourage de chaque point $x = a_{\nu_0}$, peut être égalée à

$$e^{(x-a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}}\mathfrak{P}(x-a_{\nu_0})}.$$

Dans le voisinage immédiat d'un point $x = a_{\nu_1}$ cette fonction a aussi la forme

$$(x - a_{\nu_1})^{m_{\nu_1}} e^{(x-a_{\nu_1})^{n_{\nu_1}}\mathfrak{G}_{\nu_1}\left(\frac{1}{x-a_{\nu_1}}\right) + (x-a_{\nu_1})^{n_{\nu_1}}\mathfrak{P}(x-a_{\nu_1})}$$

Formons maintenant une expression analytique $f_x^{(1)}$, représentant à l'intérieur de $\mathfrak{C} + R - R'$ une fonction monogène, uniforme et régulière, qui ne s'annule jamais à l'intérieur de ce *continuum* et qui, dans le voisinage de chaque point $x = a_{\nu_1}$, peut être mise sous la forme

$$(x - a_{\nu_1})^{n_{\nu_1}} e^{(x-a_{\nu_1})^{n_{\nu_1}}\mathfrak{G}_{\nu_1}\left(\frac{1}{x-a_{\nu_1}}\right) + (x-a_{\nu_1})^{n_{\nu_1}}\mathfrak{P}(x-a_{\nu_1})}$$

Le quotient $\dfrac{F(x)}{f_x^{(0)} f_x^{(1)}}$ représente alors à l'intérieur de $\mathfrak{C} + R - R^{(2)}$ une fonction monogène, uniforme et régulière, qui n'a pas de points-zéros à l'intérieur de ce *continuum* et qui, dans le voisinage de chaque point $x = a_{\nu_1}$, peut être égalée à $e^{(x-a_{\nu_1})^{n_{\nu_1}}\mathfrak{P}(x-a_{\nu_1})}$.

En continuant toujours le même procédé, on obtient une série d'expressions

$$f_x^{(0)},\ f_x^{(1)},\ \ldots,\ f_x^{(a)},\ \ldots$$

qui peuvent toujours être rangées en série simple $f_x^{a,\mu}$ $(\mu = 1,\ 2, \ldots)$.

Le produit $\prod\limits_{\mu=1}^{\infty} f_x^{a,\mu}$ jouit, d'après ce qui vient d'être établi, des propriétés suivantes:

1° Il représente à l'intérieur de $\mathfrak{C}$ une fonction monogène, uniforme et régulière qui n'a pas de points-zéros à l'intérieur de ce *continuum.*

2° Si l'on pose

$$\prod_{\mu=1}^{\infty} f_x^{a,\mu} = \prod_{(1)}^{a'} f_x^{a,\mu} . \prod_{(2)}^{a'} f_x^{a,\mu}$$

où α' précède δ et où $\prod\limits_{(1)}^{\alpha'}$ désigne le produit de tous les facteurs de $\prod\limits_{\mu=1}^{\infty} f_x^{a,\mu}$ dont le premier indice précède α', tandis que $\prod\limits_{(2)}^{\alpha'}$ représente le produit des facteurs, dans lesquels le premier indice ne précède pas α', les expressions

$$\frac{F(x)}{\prod\limits_{(1)}^{\alpha'} f_x^{a,\mu}}$$

et

$$\prod_{(2)}^{\alpha'} f_x^{a,\mu}$$

représenteront des fonctions qui, à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R^{(\alpha')}$, sont toutes les deux monogènes, uniformes et régulières et ont partout une valeur différente de zéro. Si $\alpha' = \bar{\alpha}' + 1$, la première de ces deux fonctions peut aussi, dans l'entourage de chaque point $x = a_{\nu_{\bar{\alpha}'}}$, être égalée à $e^{(x - a_{\nu_{\bar{\alpha}'}})^{n_{\nu_{\bar{\alpha}'}}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_{\bar{\alpha}'}})}$

3° Le quotient

$$\frac{F(x)}{\prod\limits_{\mu=1}^{\infty} f_x^{a,\mu}}$$

représente à l'intérieur du *continuum*

$$\mathfrak{C} + R - R^{(\delta)} = \mathfrak{B} + \mathfrak{p} - \mathfrak{p}^{(\delta)}$$

une fonction monogène, uniforme et régulière, qui n'a pas de points-zéros à l'intérieur de ce *continuum* et qui peut être mise sous la forme $e^{(x - a_{\nu_{\bar{\alpha}}})^{n_{\nu_{\bar{\alpha}}}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_{\bar{\alpha}}})}$ dans l'entourage de chaque point $x = a_{\nu_{\bar{\alpha}}}$, en supposant $\delta = \bar{\alpha} + 1$.

Si $\mathfrak{p}^{(\delta)} = 0$, le quotient $\dfrac{F(x)}{\prod\limits_{\mu=1}^{\infty} f_x^{a,\mu}}$ sera, par conséquent, égal à une constante.

Je peux donc formuler le théorème suivant:

B'. »Soit $F(x)$ une fonction monogène uniforme de la variable x. Soit $\mathfrak{B}$ l'ensemble de tous ses points réguliers, qui ne sont pas en même temps des points-zéros, et $\mathfrak{P}$ l'ensemble de tous ses points singuliers et de tous ses points-zéros. Soit enfin δ le premier nombre de la première ou de la seconde classe, pour lequel $\mathfrak{P}^{(\delta)} = \mathfrak{P}^{(\delta+1)}$.

Je-désigne par R un ensemble de points, qui appartient au *continuum* $\mathfrak{B} + \mathfrak{P}$, embrassant R' et $\mathfrak{P}$ et pour lequel $R^{(\delta)} = \mathfrak{P}^{(\delta)}$, mais qui, quant au reste, peut être choisi tout à fait arbitrairement.

Il est toujours possible de former une expression analytique, représentant une fonction monogène uniforme, laquelle à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{B}$ se comporte partout régulièrement et a une valeur différente de zéro; dans le voisinage immédiat de chaque point de l'ensemble $R - R^{(\delta)}$, cette fonction peut coïncider avec $F(x)$ au degré d'exactitude voulu et elle est de plus telle, que le quotient qui résulte de sa division par $F(x)$ est une nouvelle fonction, qui est monogène, uniforme et régulière à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{B} + \mathfrak{P} - \mathfrak{P}^{(\delta)}$ dont la limite complète est constituée par l'ensemble $\mathfrak{P}^{(\delta)}$, et qui ne s'annule jamais à l'intérieur de ce *continuum*.»

En vertu des deux théorèmes A' et B', on peut toujours représenter chaque fonction monogène uniforme sous deux formes essentiellement différentes.

D'après le théorème A' on a, à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A} + P - P^{(\gamma)}$,

$$F(x) = F_x + C(x)$$

et il est toujours possible de former l'expression F_x de façon que $C(x)$ soit une fonction monogène uniforme, se comportant régulièrement partout à l'intérieur de ce *continuum*.

D'après le théorème B' on a, à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{B} + \mathfrak{P} - \mathfrak{P}^{(\delta)}$,

$$F(x) = f_x . c(x)$$

et on peut toujours former l'expression f_x de sorte que $c(x)$ soit une fonction monogène uniforme, qui, à l'intérieur du *continuum* en question, se comporte partout régulièrement et conserve toujours une valeur différente de zéro.

Les deux fonctions $C(x)$ et $c(x)$ deviennent des constantes indépendantes de x dans le cas où $P^{(\gamma)} = 0$. Mais si cette égalité n'a pas lieu, et que $P^{(\gamma)} = P^{(\gamma+1)}$ soit l'ensemble de tous les points singuliers de $C(x)$ et que $\mathfrak{P}^{(\delta)} = \mathfrak{P}^{(\delta+1)}$ soit l'ensemble de tous les points singuliers de $c(x)$, on obtient un groupe déterminé de fonctions, caractérisé par cette propriété même.

Dans une autre occasion, je ferai ressortir les propriétés remarquables qui appartiennent à toutes les fonctions de ce groupe, et qui sont liées étroitement aux recherches exposées dans ce mémoire.

Avant de terminer, je ferai remarquer que les théorèmes $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ de ce paragraphe peuvent immédiatement être généralisés de la même manière que le théorème $\boldsymbol{A}$ du § 1. En d'autres termes, on peut choisir l'ensemble de points P avec la seule restriction que l'égalité $P - P' = 0$ n'ait pas lieu. La condition que P forme la limite complète d'un *continuum* $\mathfrak{A}$ composé d'une seule pièce, n'est point obligatoire, et, en la négligeant, on ne change pas essentiellement les théorèmes obtenus.