

**5. Die Fresnelschen Reflexionsformeln und  
das Brechungsgesetz bei komplexem Einfallswinkel;  
von August Wiegrefe.**

Gelegentlich eines Versuches, Beugungsprobleme mit Reflexion und Brechung auf dem Boden der strengen Sommerfeldschen Theorie zu behandeln<sup>1)</sup>, traf ich auf Lösungen der Differentialgleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$ , die das Brechungsgesetz

$$k_I \cos \alpha = k_{II} \cos \beta$$

und die Fresnelschen Reflexionsformeln

$$R = \frac{\varkappa_I \sin \alpha - \varkappa_{II} \sin \beta}{\varkappa_I \sin \alpha + \varkappa_{II} \sin \beta} \quad G = \frac{2 \varkappa_I \sin \alpha}{\varkappa_I \sin \alpha + \varkappa_{II} \sin \beta}$$

unter dem komplexen Integral mit der Integrationsvariablen  $\alpha$  enthalten. Es mußte daher das Verhalten dieser drei Formeln bei komplexem  $\alpha$  und  $\beta$  studiert, insbesondere die Riemannsche Fläche für  $R$  und  $G$  hergestellt werden. Die damaligen Ausführungen sollen im folgenden noch etwas erweitert und vertieft werden.

In den obigen Formeln sind  $\alpha$  und  $\beta$  die Komplementwinkel der gewöhnlich verwandten Einfallswinkel und Brechungswinkel,  $k_I = 2\pi/\lambda_I$  und  $k_{II} = 2\pi/\lambda_{II}$  sind die charakteristischen Konstanten der beiden Medien, und  $\varkappa_I$   $\varkappa_{II}$  sind mit  $k_I$   $k_{II}$  identisch, wenn die einfallenden elektrischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene stattfinden; bei dazu senkrechter Polarisation ist  $\varkappa_I = 1/k_I$ ,  $\varkappa_{II} = 1/k_{II}$ .

Da in den bisherigen Anwendungen der Reflexions- und Brechungsformeln der Brechungswinkel  $\beta$  nur im Kosinus und Sinus auftritt, braucht man die unendliche Vielwertigkeit von

1) A. Wiegrefe, Diss.: Über einige mehrwertige Lösungen der Wellengleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$  und ihre Anwendungen in der Beugungstheorie, Göttingen 1912. III. Teil: Reflexion und Brechung auf Riemannschen Flächen, p. 77–95.



$\sin \alpha$  besitzen, oder beide das bezüglich entgegengesetzte. Dieser Beweis bedarf einer Ergänzung.

Zerlegt man  $\cos \alpha = \cos(A + ia)$  und  $\cos \beta = \cos(B + ib)$  in Realteil und Imaginärteil, so erhält man aus  $k_I \cos \alpha = k_{II} \cos \beta$  zwei Brechungsgesetze:

$$1. k_I \cos A (e^a + e^{-a}) = k_{II} \cos B (e^b + e^{-b}).$$

$$2. k_I \sin A (e^a - e^{-a}) = k_{II} \sin B (e^b - e^{-b}).$$

Nach dem ersten Brechungsgesetz — das für reelle  $\alpha$  und  $\beta$  in das gewöhnliche Brechungsgesetz übergeht — hat  $\cos A$

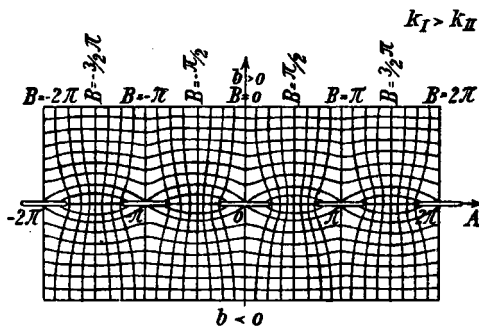


Fig. 2.

stets dasselbe Vorzeichen wie  $\cos B$ , da  $e^a + e^{-a}$  und  $e^b + e^{-b}$  stets positiv sind. Nach dem zweiten Brechungsgesetz sind zunächst zwei Fälle möglich:

$$1. \sin A \geq 0 \text{ und } \sin B \geq 0.$$

Dann haben  $a$  und  $b$  gleiches Vorzeichen.

$$2. \sin A \geq 0 \text{ und } \sin B \leq 0.$$

Damit erhalten  $a$  und  $b$  entgegengesetzte Vorzeichen.

Diese Zusammenstellungen der Vorzeichen von  $a$  und  $b$ ,  $\sin A$  und  $\sin B$  lassen sich aber nur aufrechterhalten, solange keine der genannten Größen gleich Null ist. Ist  $a = 0$  oder  $\sin A = 0$ , so können die Vorzeichen von  $\sin A$  oder  $a$  und der einen nach dem zweiten Brechungsgesetz eventuell von Null verschiedenen Größe  $\sin B$  oder  $b$  ganz beliebig gewählt werden; entsprechendes gilt, wenn etwa  $a$  und  $\sin A$  gleich Null sind.

Sind alle vier Größen  $\sin A$ ,  $\sin B$ ,  $a$  und  $b$  von Null verschieden und haben Real- und Imaginärteil von  $\sin \alpha$  irgendwelche Vorzeichen, so folgt aus der Form der Realteile von  $\sin \alpha$  und  $\sin \beta$ :

$$\operatorname{Re}(\sin \alpha) = \sin A \frac{e^a + e^{-a}}{2} \quad \operatorname{Re}(\sin \beta) = \sin B \frac{e^b + e^{-b}}{2}$$

und aus deren Imaginärteilen:

$$\operatorname{Im}(\sin \alpha) = \cos A \frac{e^a - e^{-a}}{2} \quad \operatorname{Im}(\sin \beta) = \cos B \frac{e^b - e^{-b}}{2}$$

im eben aufgestellten ersten Falle der Vorzeichenzuordnung, daß Realteil und Imaginärteil von  $\sin \beta$  beide das entsprechende Vorzeichen haben wie Realteil bzw. Imaginärteil von  $\sin \alpha$ . Im 2. Falle tritt dagegen für Real- wie Imaginärteil von  $\sin \beta$  gerade das entgegengesetzte Vorzeichen auf. Damit ist der in meiner Dissertation ohne Beweis mitgeteilte Satz gewonnen.

Nach dem oben Gesagten fragt es sich aber noch, ob die Fälle, in denen  $\sin A$  oder  $a = 0$  sind oder gar beide, in denen also entweder der Realteil von  $\sin \alpha$  oder dessen Imaginärteil gleich Null ist — oder beide — ob diese Fälle wirklich die in der Dissertation auf dem eben bewiesenen Satz begründeten Schlüsse über die Zuordnung bestimmter Vorzeichen von  $\sin \beta$  auf die zwei Blätter der Riemannschen Fläche für  $R$  und  $G$  zulassen.

Ist nun  $\operatorname{Re}(\sin \alpha) = 0$ ,  $\operatorname{Im}(\sin \alpha) \neq 0$ , so ist entweder auch  $\operatorname{Re}(\sin \beta) = 0$  oder  $\operatorname{Im}(\sin \beta) = 0$ . Beidemal handelt es sich um Punkte über den Geraden  $\sin A = 0$ , im letzteren Falle, der nur für  $k_I < k_{II}$  eintreten kann, speziell um Punkte auf den vertikal liegenden Verzweigungsschnitten. Ist zweitens  $\operatorname{Im}(\sin \alpha) = 0$ ,  $\operatorname{Re}(\sin \alpha) \neq 0$ , so ist entweder  $\operatorname{Im}(\sin \beta) = 0$  und die entsprechenden Punkte der Riemannschen Fläche liegen auf den Geraden  $A = \pm \pi/2, \pm 3\pi/2 \dots$ ;  $B = \pm \pi/2, \pm 3\pi/2 \dots$ , oder es ist  $\operatorname{Re}(\sin \beta) = 0$  und es handelt sich um alle Punkte auf der reellen  $\alpha$ -Achse und speziell im Falle  $k_I > k_{II}$  auch um die Punkte auf den horizontalen Verzweigungsschnitten.

Sind schließlich sowohl  $\operatorname{Re}(\sin \alpha) = 0$  und  $\operatorname{Im}(\sin \alpha) = 0$ , so kommen einzelne Punkte auf den eben genannten Geraden in Frage. Gleiches gilt in allen behandelten Fällen, wenn man  $\operatorname{Re}(\sin \beta) = 0$  und  $\operatorname{Im}(\sin \beta) = 0$  annimmt, und zwar tritt  $\beta = 0$  nur in den Verzweigungspunkten  $\cos a = k_{II}/k_I$  auf.

Ein Wechsel in der Zuordnung der Vorzeichen der Real- und Imaginärteile von  $\sin \beta$  zu einem bestimmten Blatte der Riemannschen Fläche könnte sich also nur beim Durchgang durch die Geraden  $\alpha = 0, \alpha = \pi, \pm 2\pi, \dots$  und  $\alpha = \pm \pi/2, \pm 3\pi/2 \dots$  einstellen. Daß ein solcher aber nicht entsteht, läßt sich folgendermaßen mit Hilfe unseres Satzes über die Vorzeichen bei von Null verschiedenen Real- und Imaginärteilen von  $\sin \alpha$  und  $\sin \beta$  beweisen.

Passieren wir eine der ausgezeichneten Geraden, so können wir stets die Vorzeichen von  $\operatorname{Re}(\sin \alpha)$  und  $\operatorname{Im}(\sin \alpha)$  vor und nach dem Durchgang angeben, auch wenn  $\operatorname{Re}(\sin \alpha)$  und  $\operatorname{Im}(\sin \alpha)$  beide gleich Null werden. Da aber außer in den Verzweigungspunkten  $\cos \alpha = k_{II}/k_I$  stets entweder  $\operatorname{Re}(\sin \beta)$  oder  $\operatorname{Im}(\sin \beta)$  von Null verschieden ist, geht jedesmal beim Passieren einer der obigen Geraden (mit Ausschluß der Verzweigungspunkte) entweder  $\operatorname{Re}(\sin \beta)$  oder  $\operatorname{Im}(\sin \beta)$  ohne Vorzeichenwechsel stetig durch diese Gerade. Wir kennen also zu beiden Seiten jeder solchen Geraden die Vorzeichen von je dreien der vier vorkommenden Real- und Imaginärteile und können daher das Vorzeichen des vierten Teils zu beiden Seiten der Geraden eindeutig für ein bestimmtes Blatt der Riemannschen Fläche festlegen, indem wir unseren im voraus bewiesenen Satz anwenden. Führt man das für alle in Frage kommenden Geraden und Verzweigungsschnitte durch, so stehen die für ein bestimmtes Blatt solcherweise erhaltenen Vorzeichen von Real- und Imaginärteil von  $\sin \beta$  stets in Übereinstimmung mit der gewählten Zuordnung von  $+\beta$  auf das eine obere Blatt — das in beiden Figg. 1 u. 2 gezeichnet ist —, von  $-\beta$  auf das untere Blatt der Riemannschen Fläche. An diesem Ergebnis ändert natürlich auch das Nullwerden von  $\operatorname{Re}(\sin \beta)$  und  $\operatorname{Im}(\sin \beta)$  in den Verzweigungspunkten aus Stetigkeitsgründen nichts.

Zum Schluß noch ein paar Worte über die physikalische Seite der Zweiwertigkeit von  $R$  und  $G$ .<sup>1)</sup> Die physikalische Erscheinung liefert nur eine reflektierte und eine gebrochene Welle, für sie scheint also die Zweiwertigkeit nicht weiter in Frage zu kommen. Nun müssen wir aber, um stets endliche Funktionen für das reflektierte und gebrochene Licht zu haben,

---

1) Vgl. auch A. Wiegrefe, Diss. p. 86.

bei gewöhnlicher Spiegelung und Brechung — besonders auch wegen des Übergangs zu  $k_I = k_{II}$  — den positiven Wert von

$$\sin \beta = \pm \sqrt{1 - \frac{k_I^2}{k_{II}^2} \cos^2 \alpha}$$

benutzen, bei Totalreflexion dagegen den negativen. Diese altbekannte Tatsache läßt die Zweiwertigkeit von  $R$  und  $G$  in einem ganz verständigen Licht erscheinen. Auf andere Überlegungen, die in ähnlicher Weise eine Zweiwertigkeit von  $R$  und  $G$  verlangen, hoffe ich demnächst hinweisen zu können.

Zusammenfassung: Es wird der Beweis geführt, daß die Zweiwertigkeit der Fresnelschen Reflexionsformeln im Verein mit dem Brechungsgesetz gestattet, auch für komplexe Einfallswinkel die Verteilung der Werte des Brechungswinkels auf die beiden Blätter der entsprechenden Riemannschen Fläche ganz ähnlich wie im Reellen vorzunehmen, indem man zwischen positivem und negativem Brechungswinkel unterscheidet. Zum Schluß wird noch auf den Zusammenhang dieser Zweiwertigkeit mit der physikalischen Erscheinung hingewiesen.

Bückeburg, den 26. Februar 1914.

(Eingegangen 27. Februar 1914.)