Bestimmung aller ternären und quaternären Collineationsgruppen, welche mit symmetrischen und alternirenden Buchstabenvertauschungsgruppen holoedrisch isomorph sind.

Von

H. Maschke in Chicago.

Das in der Ueberschrift bezeichnete Problem soll nach folgender Methode in systematischer Weise gelöst werden. Nehmen wir an, wir wären im Besitz einer Reihe von Collineationen $E_1, E_2, \ldots E_r$ in n Variabelen, von denen wir wissen, dass sie eine endliche Gruppe $C_{k!}$ erzeugen, welche mit der symmetrischen Gruppe $G_{k!}$ von Vertauschungen von k Buchstaben holoedrisch isomorph ist. Auch soll bekannt sein, welchen Buchstabenvertauschungen die einzelnen Erzeugenden $E_1, E_2, \ldots E_r$ entsprechen. Der Kürze wegen sollen auch diese Buchstabenvertauschungen entsprechend mit $E_1, E_2, \ldots E_r$ bezeichnet werden. Alsdann kann man mittelst Hinzunahme eines neuen $k+1^{\text{ten}}$ Buchstaben eine Buchstabenvertauschung E_{r+1} angeben, welche mit den Vertauschungen $E_1, E_2, \ldots E_r$ die symmetrische Vertauschungsgruppe $G_{(k+1)!}$ von $k+1$ Buchstaben hervorbringt. Diese Vertauschung E_{r+1} wird eine bestimmte endliche Periode besitzen, und auch die Perioden der Combinationen $E_1E_{r+1}, E_2E_{r+1}, \ldots E_rE_{r+1}$ werden leicht anzugeben sein. Wir setzen nun E_{r+1} mit unbestimmten Coefficienten als Collineation in n Variabelen an und unterwerfen E_{r+1} für sich sowohl, als auch in Combination mit den bereits bekannten Collineationen den angegebenen Periodenbedingungen. Diese für die Bestimmung der Collineation E_{r+1} *nothwendigen* Bedingungen sind nun miteinander entweder verträglich oder nicht. Im ersteren Falle entsteht dann die weitere Frage, ob sie für den holoedrischen Isomorphismus der $C_{(k+1)!}$ mit der $G_{(k+1)!}$ auch *hinreichend* sind. Diese Frage, welche übrigens ein Problem der abstracten Gruppentheorie vorstellt, lässt sich, wie in § 1 mittelst eines Satzes von Herrn Moore auseinandergesetzt werden soll, in dem Sinne entscheiden, dass sich in der That eine bestimmte

Anzahl von Operationen E für jedes k stets so wählen lässt, dass die angegebenen Periodenbedingungen für den holoedrischen Isomorphismus nothwendig und hinreichend sind. Genau das Gleiche gilt für die alternirenden Gruppen. Geht man jetzt von den niedrigsten Werthen für k aus, für welche die betreffenden Collineationsgruppen ohne Weiteres angegeben werden können, so führt das auseinandergesetzte Verfahren successive in allgemeinster Weise zu den Collineationsgruppen für höhere Werthe von k.

Ist somit theoretisch eine Methode zur Lösung unseres Problems gegeben, so wird es noch sehr fraglich bleiben, wie weit sich dieselbe rechnerisch durchführen lässt. Hier ist nun insbesondere folgendes zu beachten. Durch Einführung neuer Variabelen oder, was auf dasselbe hinausläuft, Transformation durch eine beliebige lineare Substitution im gruppentheoretischen Sinne, lässt sich jede Collineationsgruppe auf unendlich viele Weisen (linear) transformiren. Wir werden zwei Collineationsgruppen, die sich in einander transformiren lassen, als *identisch* betrachten, und als *verschieden* nur solche, die sich nicht in einander transformiren lassen. Hieraus folgt noch *nicht*, dass zwei Collineationsgruppen, welche mit ein- und derselben Buchstabenvertauschungsgruppe holoedrisch isomorph sind, im soeben genannten Sinne identisch sein müssen. Vielmehr werden wir im folgenden viele Beispiele kennen lernen, wo sich zwei derartige Gruppen nicht in einander transformiren lassen. Es wird nun darauf ankommen, unter allen identischen Collineationsgruppen in jedem Falle eine solche zu Grunde zu legen, welche in möglichst übersichtlicher Form erscheint. Dies lässt sich erreichen, wenn man die Gruppen durchgängig in die sogenannte Hermite'sche Normalform transformirt, wie in § 2 des Näheren auseinandergesetzt werden soll.

Mit den genannten Hilfsmitteln lässt sich nun unser Problem in der That mit einem relativ geringen Aufwand von Rechnung vollständig erledigen. Als besonders bemerkenswerth sei noch erwähnt — man ist es sonst in der Mathematik anders gewohnt — dass die zur Bestimmung der $C_{k!}$ und $C_{\frac{1}{2}k!}$ erforderlichen Rechnungen im allgemeinen um so einfacher werden, je grösser k ist.

Eine Zusammenstellung der Resultate für die ternären *Gruppen* findet sich in § 7. Hier giebt es für $k = 4, 5, 6$ immer nur je eine $C_{\frac{1}{2}k!}$ und $C_{k!}$. Die erst in neuerer Zeit entdeckte $C_{\frac{1}{2}6!}$ erscheint hier in einer besonders einfachen und übersichtlichen Gestalt (43).

Für quaternäre Gruppen sind die Resultate am Schluss der Arbeit zusammengestellt. Die Anzahl der von einander verschiedenen Gruppen ist hier wesentlich grösser. In Uebereinstimmung mit den Resultaten der Untersuchungen von Herrn Wiman*) ergiebt sich, dass keine quaternären $C_{\frac{1}{2}k!}$ für $k > 7$, und keine $C_{k!}$ für $k > 6$ existiren können.

§ 1.

Auseinandersetzung der Methode.

Es kommen hier zunächst in Betracht zwei Sätze der abstracten Gruppentheorie, welche Herr Moore in seiner Arbeit**) „Concerning the abstract groups of order $k!$ und $\frac{1}{2}k!$ holoedrically isomorphic with the symmetric and the alternating substitution-groups on k letters“ als Theoreme A und B entwickelt hat.

Theorem A: Die abstracte Gruppe, welche definirt ist durch die $k-1\,(k>1)$ erzeugenden Operationen

$$B_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \dots k-1),$$

zwischen denen die Relationen bestehen:

$$B_\lambda^2 = 1 \quad (\lambda = 1, 2, \dots k-1), \tag{1}$$

$$(B_\lambda B_{\lambda+1})^3 = 1 \quad (\lambda = 1, 2, \dots k-1), \tag{2}$$

$$(B_\lambda B_\mu)^2 = 1 \quad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \dots k-3 \\ \mu = \lambda+2, \lambda+3, \dots k-1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

ist von der Ordnung $k!$ und ist holoedrisch isomorph mit der symmetrischen Vertauschungsgruppe von k Buchstaben.

Theorem B: Die abstracte Gruppe, welche definirt ist durch die $k=2\,(k>2)$ erzeugenden Operationen

$$E_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \dots k-2),$$

zwischen denen die Relationen bestehen:

$$E_1^3 = 1,\ E_\lambda^2 = 1 \quad (\lambda = 2, 3, \dots k-2), \tag{4}$$

$$(E_\lambda E_{\lambda+1})^3 = 1 \quad (\lambda = 1, 2, \dots k-3), \tag{5}$$

$$(E_\lambda E_\mu)^2 = 1 \quad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \dots k-4 \\ \mu = \lambda+2, \lambda+3, \dots k-2 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

ist von der Ordnung $\frac{1}{2}k!$ und holoedrisch isomorph mit der alternirenden Vertauschungsgruppe von k Buchstaben.

Ich knüpfe zunächst an das Theorem B an. Nimmt man in der Buchstabenvertauschungsgruppe $E_1 = (123) = (12)(13)$, $E_2 = (12)(34)$, $E_3 = (12)(45)$, $\dots E_\lambda = (12)(\lambda+1, \lambda+2), \dots E_{k-2} = (12)(k-1, k)$, so sieht man, dass hierfür die Bedingungen des Theorems B erfüllt sind; diese E's erzeugen also zunächst die $G_{\frac{1}{2}k!}$. Hat man $k-2$

*) A. Wiman „Note über die Vertauschungsgruppe von acht Dingen“ und „Note über die symmetrischen und alternirenden Vertauschungsgruppen von n Dingen“. Göttinger Nachrichten, 1897, Heft 1 und 2.

**) E. H. Moore, Proceedings of the London Math. Soc., vol. XXVIII, No. 597.

Collineationen E, welche denselben Bedingungen genügen, so erzeugen diese also eine der $G_{\frac{1}{2}k!}$ holoedrisch isomorphe $C_{\frac{1}{2}k!}$. Man geht jetzt zur $C_{\frac{1}{2}(k+1)!}$ über, indem man, wenn möglich, eine weitere Collineation E_{k-1} bestimmt, welche im Verein mit den bereits vorhandenen E's wiederum den Bedingungen des Moore'schen Satzes (für $k+1$ statt k) genügt.

Die Handlichkeit des Moore'schen Theorems gerade für die vorliegende Untersuchung besteht nun darin, dass bei einer weiteren Ausdehnung von $C_{\frac{1}{2}k!}$ auf $C_{\frac{1}{2}(k+1)!}$ immer nur *eine* (die letzte) Erzeugende neu zu bestimmen ist, und dass das mit Hinzunahme des neuen E erhaltene System der E_λ alsdann wiederum als Grundlage zur Erweiterung auf $C_{\frac{1}{2}(k+2)!}$ mittelst einer einzigen neuen Collineation E dient.

Wir haben demnach zur Bestimmung der „*alternirenden Collineationsgruppen*“ — dieser Ausdruck, sowie der entsprechende „*symmetrische Collineationsgruppen*“ möge im folgenden statt des längeren „Collineationsgruppen, welche alternirenden (resp. symmetrischen) Buchstabenvertauschungsgruppen holoedrisch isomorph sind“ angewandt werden — folgendes einfache Verfahren zu befolgen: Man gehe aus von einer Collineation E_1, welche die Periode 3 besitzt — diese liefert mit ihren Potenzen die $G_{\frac{1}{2}3!}$ — und bestimme eine neue Collineation E_2 von der Periode 2, so dass $(E_1E_2)^3 = 1$. Dann erzeugt E_1 und E_2 die alternirende $C_{\frac{1}{2}4!}$ (Tetraedergruppe). Nun bestimme man E_3 von der Periode 2 so, dass $(E_1E_3)^2 = 1$, $(E_2E_3)^3 = 1$; alsdann erzeugen E_1, E_2, E_3 die alternirende $C_{\frac{1}{2}5!}$ (Ikosaedergruppe). Bestimmt man ferner E_4 von der Periode 2 so, dass $(E_1E_4)^2 = 1$, $(E_2E_4)^2 = 1$, $(E_3E_4)^3 = 1$, so erzeugen E_1, E_2, E_3, E_4 die alternirende $C_{\frac{1}{2}6!}$, etc.

Was die symmetrischen Gruppen anbetrifft, so gelangt man zu denselben, statt sie mittelst des Theorems A abzuleiten, in einfacher Weise von den alternirenden Gruppen aus. Wenn nämlich eine alternirende $C_{\frac{1}{2}k!}$ bereits bekannt ist mit $E_1, E_2, \ldots E_{k-2}$ als erzeugenden Collineationen, so erhält man hieraus die symmetrischen $C_{k!}$ durch Hinzufügung einer weiteren Collineation F von der Periode 2, welche den Bedingungen $(E_1F)^2 = (E_2F)^2 = \cdots = (E_{k-2}F)^2 = 1$ genügt. Um dieses zu beweisen, haben wir nur zu zeigen, dass aus den $E_1, E_2, \ldots E_{k-2}, F$ sich $k-1$ Collineationen $B_1, \ldots B_{k-1}$ ableiten lassen, welche den Bedingungen des Theorems A genügen, und welche so beschaffen sind, dass sich aus ihnen rückwärts die

$$E_1, E_2, \ldots E_{k-2}, F$$

ableiten lassen. Ich setze:

$$F = B_1, \; E_1 F = B_2, \; E_2 F = B_3, \; \ldots \; E_{k-2} F = B_{k-1},$$

so sind zunächst unmittelbar $E_1, E_2, \ldots E_{k-2}, F$ aus $B_1, B_2, \ldots B_{k-1}$ ableitbar. Die Bedingungen (1) sind laut Annahme erfüllt, und die Richtigkeit von (2) und (3) lässt sich leicht beweisen.

In der Buchstabenvertauschungsgruppe kann man z. B. $F = (12)$ nehmen, während wie vorher

$$E_1 = (123), \; E_2 = (12)(34), \; \ldots \; E_{k-2} = (12)(k-1, k).$$

Alsdann wird

$$B_1 = (12), \; D_2 = (23), \ldots B_\lambda = (\lambda, \lambda+1), \ldots B_{k-1} = (k-1, k).$$

§ 2.

Die Hermite'sche Normalform.

Die Substitutionen einer jeden linearen Substitutionsgruppe G in n Variabelen z_i von endlicher Ordnung lassen, wie Herr Moore bewiesen hat*) eine positive Hermite'sche Form

$$(7) \qquad \sum_{i,k} \alpha_{ik} z_i \bar{z}_k \quad (\alpha_{ki} = \bar{\alpha}_{ik}; \quad i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

ungeändert, und durch Transformation der Gruppe kann stets erreicht werden, dass (7) die einfache Form

$$(8) \qquad z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \cdots + z_n \bar{z}_n$$

annimmt. Hierbei soll, wie auch sonst üblich, durch eine mit einem horizontalen Strich versehene Grösse ihr conjugirter Werth bezeichnet werden. Die specielle Form (8) wollen wir die Hermite'sche Normalform nennen, und von einer Gruppe, für welche diese Normalform ungeändert bleibt, wollen wir der Kürze wegen sagen, sie sei auf die Hermite'sche Normalform reducirt.

Andererseits lässt sich nun G stets so transformiren, dass irgend eine beliebig aus G herausgegriffene Substitution S in die kanonische Form

$$(9) \qquad z_1' = \lambda_1 z_1, \; z_2' = \lambda_2 z_2, \; \ldots \; z_i' = \lambda_i z_i, \; \ldots \; z_n' = \lambda_n z_n$$

übergeht, wobei die Coefficienten λ_i nicht nothwendig von einander verschieden zu sein brauchen**). Bei der so transformirten Gruppe

*) E. H. Moore, A Universal Invariant for Finite Groups of Linear Substitutions: with Application in the Theory of the Canonical Form of a Linear Substitution of Finite Period. Math. Ann. Bd. 50, p. 213.

**) Vgl. H. Maschke, Die Reduction linearer homogener Substitutionen von endlicher Periode auf ihre kanonische Form. Math. Ann. Bd. 50, p. 220.

wird eine positive Hermite'sche Form $H' = \Sigma \alpha_{ik} z_i \bar{z}_k$ invariant bleiben. Da insbesondere auch S (9) die Form H' in sich selber überführen muss, so folgt sofort, dass alle diejenigen Coefficienten $\alpha_{r,s}$ verschwinden müssen, für welche $\lambda_r \neq \lambda_s$. Sei andererseits $\lambda_{m_1}, \lambda_{m_2}, \ldots \lambda_{m_t}$ eine Gruppe von untereinander gleichen Coefficienten, so wird sich durch lineare Transformation der Variabelen $z_{m_1}, z_{m_2}, \ldots z_{m_t}$ derjenige Theil von H' welcher nur diese Variabelen enthält, also

$$\Sigma \alpha_{ik} z_i \bar{z}_k \quad (i, k = m_1, m_2, \ldots m_t)$$

in die Normalform $a(z_{m_1}\bar{z}_{m_1} + \cdots + z_{m_t}\bar{z}_{m_t})$ überführen lassen, wenn wir die neuen Variabelen wiederum mit z bezeichnen, während gleichzeitig die Substitution S (9) ungeändert bleibt. In dieser Weise sieht man, dass man, *ohne S zu ändern*, die Gruppe G so transformiren kann, dass die bei ihr invariant bleibende Hermite'sche Form in $\Sigma \beta_{ii} z_i \bar{z}_i$ übergeht. Endlich kann man durch Multiplication der Variabelen mit geeigneten Factoren bewirken, dass alle Coefficienten $\beta_{ii} = 1$ werden. Da auch hierdurch S nicht beeinflusst wird, so ist hiermit der für die spätere Anwendung fundamentale Satz*) bewiesen:

Man kann jede lineare Substitutions- (oder auch Collineations-) gruppe G von endlicher Ordnung stets so transformiren, dass

1) *eine beliebig aus G herausgegriffene Substitution S in der kanonischen Form,*

2) *die Gruppe selbst in der Hermite'schen Normalform erscheint.*

Liegt eine lineare Gruppe G in der Hermite'schen Normalform vor, so lässt sich ein auf die Coefficienten der einzelnen Substitutionen bezüglicher wichtiger Satz beweisen. Sei die folgende Substitution S in G enthalten

$$z_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_k \quad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{10}$$

so folgt

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ik} \bar{z}_k \right) = \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{z}_i,$$

eine Gleichung welche identisch für alle Werthe von z erfüllt sein muss. Hieraus ergiebt sich ein System von n^2 in den n^2 Grössen a_{ik} und $\bar{a}_{ik}$ linearen Gleichungen. Bezeichnet man die Determinante der z in S mit Δ — dieselbe wird stets als von Null verschieden

*) Die hiermit bewiesene Möglichkeit der genannten doppelten Normalisirung einer beliebigen endlichen linearen Substitutionsgruppe ist auch an sich interessant. Herr Moore machte mich darauf aufmerksam, dass dieselbe auch ohne Weiteres aus der Art und Weise folgt, in welcher er in seiner oben genannten Arbeit die Reduction auf die kanonische Form bewerkstelligt.

vorausgesetzt — und die Unterdeterminanten der Coefficienten a_{ik} mit A_{ik} so folgt

$$\Delta \,.\, \bar{a}_{ik} = A_{ik} \quad (i, k = 1, 2 \ldots n).$$

Ist $\Delta = 1$, so haben wir

$$A_{ik} = \bar{a}_{ik}, \quad a_{ik} = \bar{A}_{ik} \tag{11}$$

und somit den Satz: *Ist eine endliche Gruppe linearer Substitutionen mit den Substitutionsdeterminanten* $+1$ *auf die Hermite'sche Normalform reducirt, so ist jeder Coefficient gleich dem conjugirten Werth seiner zugehörigen Unterdeterminante.*

§ 3.

Ternäre Collineationen von der Periode 2 und 3.

Eine ternäre Collineation A ist durch die Formel gegeben

$$\varrho z_i' = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} z_k \quad (i = 1, 2, 3). \tag{12}$$

Da es auf den Werth des Proportionalitätsfactors ϱ nicht weiter ankommt, kann man die Determinante der Coefficienten stets $= 1$ setzen, also

$$|a_{ik}| = 1. \tag{13}$$

Die lineare Substitution, welche man aus (12) für $\varrho = 1$ erhält, soll durch A_s bezeichnet werden

$$A_s : z_i' = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} z_k \quad (i = 1, 2, 3). \tag{14}$$

In gleicher Weise soll auch später z. B. $E_{i,s}$ die aus der Collineation E_i für $\varrho = 1$ hervorgehende Substitution bezeichnen.

Reducirt man A auf die kanonische Form

$$\varrho z_1' = \lambda_1 z_1, \quad \varrho z_2' = \lambda_2 z_2, \quad \varrho z_3' = \lambda_3 z_3, \tag{15}$$

so sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22} - \lambda, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Da A, wie wir es annehmen, von endlicher Periode ist, so sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ Einheitswurzeln. Aus (16) folgt

$$a_1 + a_2 + a_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \tag{17}$$

und ferner in Verbindung mit (13)

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \tag{18}$$

Soll nun die Collineation A die Periode 2 haben, so folgen aus (15) und (18) für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ in irgend welcher Ordnung die folgenden Werthe

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = -1, -1, +1 \quad \text{oder} \quad -\varepsilon, -\varepsilon, +\varepsilon,$$

wo ε eine imaginäre dritte Einheitswurzel bedeutet. Hieraus ergiebt sich für die Summe der Diagonalcoefficienten von A, die fortan mit D*) bezeichnet werden soll in Folge von (17)

$$\text{(19)} \qquad \text{entweder} \quad D = -1,$$

$$\text{(20)} \qquad \text{oder} \quad D = -\varepsilon.$$

Im Falle (19) ist nun $A_s^2 \equiv 1$, d. h. der Identität gleich, während im Falle (20) erst $A_s^6 \equiv 1$, und A_s^2 jede der Variabelen mit einer imaginären dritten Einheitswurzel multiplicirt, was durch $A_s^2 \equiv \varepsilon$ angedeutet werden soll. Wir haben demnach zwei Typen ternärer Collineationen der Periode 2 zu unterscheiden:

$$\text{Typus I:} \quad A_s^2 \equiv 1, \quad D = -1;$$
$$\text{Typus II:} \quad A_s^2 \equiv \varepsilon, \quad D = -\varepsilon.$$

Bilden wir nun A_s^{-1}, so ergiebt sich

$$z_i' = \sum_{k=1}^{3} A_{ki} z_k \quad (i = 1, 2, 3).$$

Für den Typus I ist nun $A_s^{-1} = A_s$, folglich $A_{ki} = a_{ik}$, für den Typus II ist $A_s^{-1} = A_s^5 = \varepsilon A_s$, folglich $A_{ki} = \varepsilon a_{ik}$. Nimmt man A in der Hermite'schen Normalform an, so ist nach (11) $A_{ki} = \bar{a}_{ki}$, also muss sein für den Typus I $a_{ki} = \bar{a}_{ik}$, für den Typus II $a_{ki} = \varepsilon \bar{a}_{ik}$; insbesondere auch $a_{ii} = \bar{a}_{ii}$, d. h. a_{ii} reell, resp. $a_{ii} = \varepsilon \bar{a}_{ii}$, d. h. a_{ii} gleich einer mit ε multiplicirten reellen Grösse. Der letztere Fall lässt sich durch Multiplication sämmtlicher Coefficienten mit ε auf den ersten reduciren, ist also als Collineation mit ihm identisch. Hiermit ergiebt sich folgender Satz:

Die Coefficienten einer jeden ternären Substitution von der Determinante 1 *und der Collineationsperiode* 2, *welche an einer endlichen auf die Hermite'sche Normalform reducirten Collineationsgruppe Theil nimmt, sind durch die folgende Matrix gegeben* (Typus I):

$$\text{(21)} \qquad \begin{vmatrix} a, & w, & \bar{v} \\ \bar{w}, & b, & u \\ v, & \bar{u}, & c \end{vmatrix},$$

$$\text{(22)} \qquad (a, b, c \text{ reell}; \ a + b + c = -1),$$

---

*) Herr Valentiner (De endelige Transformations-Gruppers Theori, Kopenhagen 1889) operirt viel mit dieser Grösse. Sie ist eine, und zwar die einfachste, Invariante der Collineation.

oder durch dieselbe Matrix, worin jedoch jeder Coefficient mit einer und derselben imaginären dritten Einheitswurzel multiplicirt erscheint (Typus II), was durch

$$\varepsilon \cdot \begin{vmatrix} a, & w, & \bar{v} \\ \bar{w}, & b, & u \\ v, & \bar{u}, & c \end{vmatrix}$$

angedeutet sein möge.

Zwischen diesen Coefficienten besteht nun ausserdem noch eine Reihe von Relationen, welche erhalten werden, wenn man die Elemente einer Reihe mit den Unterdeterminanten derselben oder einer anderen Reihe multiplicirt. Dies giebt mit Berücksichtigung von (11) und (13)

$$\begin{array}{ll} a^2 + v\bar{v} + w\bar{w} = 1, & (a+b)\bar{w} + uv = 0, \\ b^2 + w\bar{w} + u\bar{u} = 1, & (b+c)\bar{u} + vw = 0, \\ c^2 + u\bar{u} + v\bar{v} = 1, & (c+a)\bar{v} + wu = 0, \end{array}$$

woraus man leicht die folgenden Gleichungen ableitet

$$(23) \qquad \begin{gathered} uvw = (1+a)(1+b)(1+c), \\ u\bar{u} = (1+b)(1+c),\ v\bar{v} = (1+c)(1+a),\ w\bar{w} = (1+a)(1+b). \end{gathered}$$

Es ist häufig von Wichtigkeit, einige der nicht in der Diagonalreihe stehenden Coefficienten reell annehmen zu können. Dies kann in vielen Fällen durch folgende Transformation erreicht werden, die auch für quaternäre Collineationen des öfteren angewandt werden soll. Man ersetze allgemein

$$(24) \qquad z_i \text{ durch } p_i z_i \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

wo die p_i complexe Grössen vom absoluten Betrage 1 sein sollen (also $p_i \bar{p}_i = 1$). Eine derartige Transformation soll kurz *p-Transformation* genannt werden. Bei derselben bleibt die Hermite'sche Normalform (8) invariant, (10) dagegen geht über in

$$(25) \qquad z_i' = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{p_i} a_{ik} z_k \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Man sieht nun ohne Weiteres, dass sich $p_k : p_i$ so wählen lässt, dass der neue Coefficient $\frac{p_k}{p_i} a_{ik}$ reell, und, wenn man will, auch positiv wird. Ist, wie in (21) $a_{ki} = \overline{a_{ik}}$, so bleibt diese Relation auch zwischen den transformirten Coefficienten $\frac{p_k}{p_i} a_{ik}$ und $\frac{p_i}{p_k} a_{ki}$ bestehen, während die Diagonalterme überhaupt nicht geändert werden.

Was nun die Collineationen von der Periode 3 anbetrifft, so ergeben sich für die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen folgende Möglichkeiten

(26) $$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 1, \varepsilon, \varepsilon^2; \; D = 0,$$
oder
(27) $$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \eta, \eta, \eta^7; \; D = \eta(2+\eta^6),$$
wo η eine eigentliche neunte Einheitswurzel darstellt. Weitere Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten erhält man aus der Vergleichung der Coefficienten von A_s^2 mit denen von A_s^{-1}, wo wiederum $A_{ki} = \bar{a}_{ki}$ nach (11). Es wäre zwecklos, diese Bestimmung hier allgemein durchführen zu wollen; sie führt in den auftretenden Fällen rasch zum Ziel.

§ 4.

Die ternäre $C_{\frac{1}{2}4!}$ (Tetraedergruppe).

Jede ternäre Collineation von der Periode 3 lässt sich, wie soeben gezeigt, auf eine der beiden Formen

(28) $$E_1: \varrho z_1' = z_1, \quad \varrho z_2' = \varepsilon z_2, \quad \varrho z_3' = \varepsilon^2 z_3,$$
oder
(29) $$E_1': \varrho z_1' = \eta z_1, \quad \varrho z_2' = \eta z_2, \quad \varrho z_3' = \eta^7 z_3$$
transformiren. Zugleich erzeugt E_1 mit ihren Potenzen, sowie E_1' je eine $C_{\frac{1}{2}3!}$. Diese beiden Gruppen sind in dem oben definirten Sinne von einander verschieden, denn *zwei Collineationen S und T in n Variabelen sind dann und nur dann in einander transformirbar, wenn die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von S_s gleich denen von T_s sind, multiplicirt mit einem und demselben Factor, der nur eine n^{te} Einheitswurzel sein kann.* Wir haben hiermit ein erstes Beispiel vor uns für den Fall, dass zwei Collineationsgruppen einer und derselben Vertauschungsgruppe $\left(G_{\frac{1}{2}3!}\right)$ holoedrisch isomorph sind, ohne in einander linear transformirbar zu sein. Aehnliche Beispiele treten bei den binären Gruppen noch nicht auf.

Gemäss der in § 1 auseinandergesetzten Methode erhält man jetzt alle möglichen verschiedenen Tetraedergruppen $C_{\frac{1}{2}4!}$, wenn man Collineationen E_2 bestimmt, welche den Bedingungen

(30) $$E_2^2 = 1, \quad (E_1 E_2)^3 = 1,$$
und E_2', welche den Bedingungen
(31) $$E_2'^2 = 1, \quad (E_1' E_2')^3 = 1$$
genügen. Ich zeige zunächst, dass die Bedingungen (31) nicht erfüllt werden können. E_1' (29) nämlich ist eine perspectivische Collineation, aber auch E_2' ist perspectivisch, da E_2' als Collineation von der Periode 2 zu Wurzeln der charakteristischen Gleichung $-1, -1, +1$

hat. Sei nun A der bei E_1', B der bei E_2' mit allen hindurchgehenden Geraden invariant bleibende Punkt. Alsdann muss die Verbindungsgerade von A und B (im Falle, wo A und B zusammenfallen, jede Gerade durch A) bei $E_1'E_2'$ invariant bleiben. Wählen wir diese Gerade als $z_1 = 0$, so ist in $E'_{1,s}: z_1' = \varepsilon z_1$ und in $E'_{2,s}: z_1' = -z_1$, wobei die Determinanten von $E'_{1,s}$ und $E'_{2,s}$ $+1$ sind. Bildet man jetzt $(E'_{1,s}D'_{2,s})^3$ so erhält man zunächst $z_1' = -\varepsilon z_1$, und da $(E_1'E_2')^3 \equiv 1$ sein soll, so folgt $z_2' = -\varepsilon z_2$, $z_3' = -\varepsilon z_3$. Hier ist aber die Substitutionsdeterminante -1, was einen Widerspruch liefert. Also ist (31) auszuschliessen, d. h. E_1 *darf nicht in der Form* (29) *vorausgesetzt werden.*

In der ferneren Bestimmung alternirender Collineationsgruppen treten Collineationen von der Periode 3 nur auf als $(E_\lambda E_{\lambda+1})$ (5). Dieser Collineation entspricht in der Buchstabenvertauschungsgruppe die cyklische Vertauschung $(\lambda+1, \lambda+3, \lambda+2)$, und da diese durch Substitutionen der Gruppen auf $E_1 = (123)$ transformirbar ist, so muss auch die Collineation $(E_\lambda E_{\lambda+1})$ auf E_1 transformirbar sein. *Folglich kann auch bei keiner der in der weiteren Untersuchung auftretenden Collineationen der Periode* 3 *der Fall* (27) *eintreten; wir können also überall die Bedingungen* (26) *voraussetzen.*

Wir bestimmen nun, nachdem wir E_1 in der Form (28) angenommen haben, E_2 gemäss den Gleichungen (30). Wir setzen zunächst für E_2 die Matrix der Coefficienten (21) an, wo ausserdem die Bedingungen (22) und (23) erfüllt sein müssen. Für E_1E_2 erhalten wir alsdann die Matrix

$$E_1E_2 \equiv \begin{vmatrix} a, & w, & \bar{v} \\ \varepsilon\bar{w}, & \varepsilon b, & \varepsilon u \\ \varepsilon^2 v, & \varepsilon^2\bar{u}, & \varepsilon^2 c \end{vmatrix}.$$

Da hier die Periode 3 sein soll, so folgt aus (26)

$$a + \varepsilon b + \varepsilon^2 c = 0,$$

was in Verbindung mit (22) ergiebt:

$$a = b = c = -\frac{1}{3}.$$

Durch p-Transformation (24) kann man, ohne E_1 zu ändern, in E_2 v und w reell und positiv machen. Also folgt aus (23) $u = v = w = \frac{2}{3}$. Hiermit ist

$$E_2 \equiv \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} -1, & 2, & 2 \\ 2, & -1, & 2 \\ 2, & 2, & -1 \end{vmatrix}$$

eindeutig bestimmt.

Wir verificiren nun leicht, dass $E_1 E_2$ in der That die Periode 3 besitzt. Also erhält man als *einzige* ternäre Tetraedergruppe die folgende

$$(32)\qquad \begin{array}{r|c|l|} & E_1=(123) & E_2=(12)(34) \\ \hline \varrho z_1' = & z_1 & \frac{1}{3}(-z_1+2z_2+2z_3) \\ \varrho z_2' = & \varepsilon z_2 & \frac{1}{3}(\ 2z_1-\ z_2+2z_3) \\ \varrho z_3' = & \varepsilon^2 z_3 & \frac{1}{3}(\ 2z_1+2z_2-\ z_3) \end{array},$$

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Transformirt man diese Gruppe durch Einführung der neuen Variabelen

$$(33)\qquad \begin{aligned} \sqrt{3}\,x_1 &= z_1 + \ z_2 + \ z_3, \\ \sqrt{3}\,x_2 &= z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3, \\ \sqrt{3}\,x_3 &= z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3, \end{aligned}$$

so erhält man die einfachere Form

$$(34)\qquad \begin{array}{r|c|c|} & E_1 & E_2 \\ \hline \varrho x_1' = & x_2 & \\ \varrho x_2' = & x_3 & -x_2 \\ \varrho x_3' = & x_1 & -x_3 \end{array}.$$

Auch auf diese Form lässt sich demnach jede ternäre Tetraedergruppe transformiren.

§ 5.

Die ternäre $C_{\frac{1}{2}5!}$ (Ikosaedergruppe).

Wir gelangen zur Ikosaedergruppe, wenn wir zu den in § 4 gewonnenen Collineationen E_1 und E_2 (32) eine Collineation E_3 hinzufügen, welche den Bedingungen $E_3^2 = 1$, $(E_1 E_3)^2 = 1$, $(E_2 E_3)^3 = 1$ genügt. Wir setzen also E_3 in der Form (21) an. Die Bedingung $(E_1 E_3)^2 = 1$ ergiebt:

entweder

$$b = c = 0, \quad a = -1,$$

woraus sofort nach (23)

$$v = w = 0, \quad u\bar{u} = 1$$

folgt, also

$$(35)\qquad E_3 : \varrho z_1' = -z_1, \quad \varrho z_2' = u z_3, \quad \varrho z_3' = \bar{u} z_2,$$

oder

$$a = c = 0, \quad b = -1,$$

woraus sich ergiebt

$$E_3' : \varrho z_1' = \bar{v} z_3, \quad \varrho z_2' = -z_2, \quad \varrho z_3' = v z_1$$

oder endlich, für $a = b = 0$, $c = -1$,

$$E_3'' : \varrho z_1' = w z_2, \quad \varrho z_2' = \bar{w} z_1, \quad \varrho z_3' = -z_3.$$

Diese drei Fälle sind aber nicht wesentlich von einander verschieden. Durch eine cyklische Vertauschung der Variabelen z_1, z_2, z_3 (d. i. eine lineare Transformation der Gruppe) gehen nämlich E_1 und E_2 in sich selbst, E_3 aber in E_3' resp. E_3'' über. Also genügt es, wenn wir für E_3 die in (35) so bezeichnete Collineation wählen. Es muss nun noch der Bedingung $(E_2 E_3)^3 = 1$ genügt werden. Man erhält für $E_2 E_3$ die Diagonalsumme

$$D = \frac{1}{3}(1 + 2u + 2\bar{u}),$$

und da dieselbe Null sein muss, so folgt $u + \bar{u} = -\frac{1}{2}$. Andererseits ist $u\bar{u} = 1$ also

$$u = \frac{1}{4}(-1 \pm i\sqrt{15}). \tag{36}$$

Man überzeugt sich nunmehr — am einfachsten durch die am Ende des § 3 angegebene Methode: $A^2 = A^{-1}$ — dass $E_2 E_3$ in der That von der Periode 3 ist. Welcher der beiden Werthe von u in (36) genommen wird, ist gleichgültig. In der That sind die mit E_3 und E_3', wo in E_3 der eine, in E_3' der andere Werth von u genommen wird, gebildeten Ikosaedergruppen durch die Vertauschung $(z_2 z_3)$ auf einander transformirbar. Hierdurch geht nämlich E_3 in E_3' über, E_2 bleibt ungeändert und E_1 geht zwar in E_1^2 über, doch kann E_1^2 ebensogut als E_1 als erste erzeugende Collineation genommen werden.

Demnach erhält man als *einzige* ternäre Ikosaedergruppe die folgende

		$E_1 = (123)$	$E_2 = (12)(34)$	$E_3 = (12)(45)$
(37)	$\varrho z_1' =$	z_1	$\frac{1}{3}(-z_1 + 2z_2 + 2z_3)$	$-z_1$
	$\varrho z_2' =$	εz_2	$\frac{1}{3}(2z_1 - z_2 + 2z_3)$	$\lambda_1 z_3$
	$\varrho z_3' =$	$\varepsilon^2 z_3$	$\frac{1}{3}(2z_1 + 2z_2 - z_3)$	$\lambda_2 z_2$

wo

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}(-1 + i\sqrt{15}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}(-1 - i\sqrt{15}). \tag{38}$$

Durch die Transformation (33) geht diese Gruppe über in

$$
(39)\qquad
\begin{array}{r|c|c|c|}
 & E_1 & E_2 & E_3 \\
\hline
\varrho x_1' = & x_2 & x_1 & \frac{1}{2}(-x_1+\mu_2 x_2+\mu_1 x_3) \\
\varrho x_2' = & x_3 & -x_2 & \frac{1}{2}(\mu_2 x_1+\mu_1 x_2-\quad x_3) \\
\varrho x_3' = & x_1 & -x_3 & \frac{1}{2}(\mu_1 x_1-\quad x_2+\mu_2 x_3)
\end{array}
$$

wo

$$
(40)\qquad \mu_1 = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}), \quad \mu_2 = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}).
$$

Die Gruppe erscheint hier in reeller Form, und da sie gleichzeitig auf die Hermite'sche Normalform reducirt ist, so sind ihre Substitutionen *orthogonal.*

§ 6.

Die ternäre $C_{\frac{1}{2}6!}$. Unmöglichkeit einer $C_{\frac{1}{2}7!}$.

Um ternäre $C_{\frac{1}{2}6!}$ zu finden, haben wir E_4 so zu bestimmen, dass

$$
(41)\qquad E_4^2 = (E_1 E_4)^2 = (E_2 E_4)^2 = 1; \quad (E_3 E_4)^3 = 1
$$

wird, wo E_1, E_2, E_3 in (37) gegeben sind. Nun ist bereits in § 4 gezeigt, dass jede Collineation E_4, welche den beiden ersten Bedingungen (41) genügt, von der Form sein muss

$$
(42)\qquad \varrho z_\alpha' = -z_\alpha, \quad \varrho z_\beta' = \omega z_\gamma, \quad \varrho z_\gamma' = \omega z_\beta,
$$

wo α, β, γ in irgend einer Reihenfolge mit 1, 2, 3 übereinstimmt und $\omega\overline{\omega} = 1$ ist. Bildet man nun in $E_2 E_4$ die Diagonalsumme, welche wegen $(E_2 E_4)^2 = 1$ entweder -1 oder $-\varepsilon$, $-\varepsilon^2$ sein muss, so findet man für alle Werthe von α, β, γ

$$
D = \frac{1}{3}(1+2\omega+2\overline{\omega}),
$$

und da dies als reelle Grösse nur $= -1$ sein kann, so folgt $\omega+\overline{\omega} = -2$ also wegen $\omega\overline{\omega} = 1$, $\omega = \overline{\omega} = -1$.

Untersucht man endlich $E_3 E_4$, so sieht man sofort, dass der Fall $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ auszuschliessen ist, da hier $E_3 E_4$ überhaupt keine endliche Periode ergiebt. Dagegen liefert sowohl

$$
\varrho z_2' = -z_2, \quad \varrho z_2' = -z_1, \quad \varrho z_3' = -z_3,
$$

als auch

$$
\varrho z_1' = -z_3, \quad \varrho z_2' = -z_2, \quad \varrho z_3' = -z_1
$$

mit E_3 combinirt, die Periode 3. Welche dieser beiden Collineationen hier als E_4 genommen wird, ist gleichgültig, da die aus E_1, E_2, E_3, E_4 mit beiden Werthen von E_4 gebildeten Gruppen durch die Vertauschung $(z_1 z_2 z_3)$ in einander transformirbar sind.

Wir erhalten demnach als *einzige* ternäre $C_{\frac{1}{2}6!}$ *) die aus den folgenden Erzeugenden gebildete Gruppe

(43)

	$E_1=(123)$	$E_2=(12)\,(34)$	$E_3=(12)(45)$	$E_4=(12)(56)$
$\varrho z_1'=$	z_1	$\frac{1}{3}(-z_1+2z_2+2z_3)$	$-z_1$	$-z_2$
$\varrho z_2'=$	εz_2	$\frac{1}{3}(\;2z_1-\;z_2+2z_3)$	$\lambda_1 z_3$	$-z_1$
$\varrho z_3'=$	$\varepsilon^2 z_3$	$\frac{1}{3}(\;2z_1+2z_2-\;z_3)$	$\lambda_2 z_2$	$-z_3$,

wo λ_1, λ_2 in (38) gegeben sind.

Transformirt man durch (33), so gehen E_1, E_2, E_3 in die in (39) gegebene Form über, während an Stelle von E_4 folgende Collineation tritt:

$$E_4: \varrho z_1' = -z_1, \quad \varrho z_2' = -\varepsilon z_3, \quad \varrho z_3' = -\varepsilon^2 z_2.$$

Versuchen wir nun, durch Hinzufügung einer E_5 zur $C_{\frac{1}{2}7!}$ zu gelangen, so scheitert dies an dem Umstande, dass jede Collineation E, die den Bedingungen $E^2=(E_1E)^2=(E_2E)^2=1$ unterworfen ist, von der Form

$$\varrho z_\alpha' = -z_\alpha, \quad \varrho z_\beta' = -z_\gamma, \quad \varrho z_\gamma' = -z_\beta$$

sein muss, wie soeben gezeigt. Jede derartige Collineation, also auch die zu bestimmende E_5, liefert aber, wie wir ebenfalls gesehen haben, mit E_3 combinirt entweder überhaupt keine endliche Periode, oder die Periode 3, in welch letzterem Falle wir zur E_4 gelangten. Da $(E_3E_5)^2=1$ sein soll, so ist die Bestimmung einer unseren Bedingungen genügenden E_5 ausgeschlossen. Ternäre Collineationsgruppen, welche einer alternirenden Buchstabenvertauschungsgruppe $G_{\frac{1}{2}k!}$ holoedrisch isomorph sind, existiren daher für $k>6$ nicht.

*) Betreffs dieser Gruppe cf. H. Valentiner, De endelige Transformations Gruppers-Theori. Kopenhagen 1889, pag. 192—198, und A. Wiman, Eine einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen. Math. Ann. Bd. 47. Eine von der Wiman'schen Abhandlung unabhängige Darstellung der Gruppe ist von Mr. Brown ausgearbeitet worden, und wird demnächst als Dissertation der Chicagoer Universität erscheinen.

§ 7.

Die ternären symmetrischen Gruppen. Schlussbemerkung über ternäre Gruppen.

Gemäss den Erörterungen des § 1 haben wir zur Bestimmung von symmetrischen ternären $C_{3!}$ eine Collineation F zu finden, welche den Bedingungen $F^2 = (E_1 F)^2 = 1$ genügt. Hier könnte nun E_1 in der bisher ausgeschlossenen Form E_1' (29) vorausgesetzt werden. Allein der in § 4 für die Unmöglichkeit der Relationen $E_2'^2 = 1$, $(E_1' E_2')^3 = 1$ gegebene Beweis zeigt ebenfalls die Unmöglichkeit der Relationen $F^2 = 1$, $(E_1' F)^2 = 1$, wie man sich leicht überzeugt. Also können wir auch hier E_1 in der Form (28) voraussetzen. Den Bedingungen $F^2 = 1$, $(E_1 F)^2 = 1$ wird nun, wie bereits bewiesen, in allgemeinster Weise genügt, wenn man für F die in (42) angegebene Collineation nimmt. In dieser Form ist E_4 (43) enthalten. Die Collineationen E_1 und E_4 erzeugen demnach eine $C_{3!}$. Führt man $-\omega z_\beta$ für z_β in (42) als neue Variabele ein und wendet eine geeignete Vertauschung von z_1, z_2, z_3 an, so zeigt sich, dass jede $C_{3!}$ sich auf die aus E_1 und E_4 erzeugte Gruppe transformiren lässt.

In gleicher Weise erzeugen E_1, E_2, F in allgemeinster Weise eine $C_{4!}$ (Octaeder), wenn man für F die in (43) angegebene Collineation nimmt. Auch diese Gruppe lässt sich unmittelbar (durch geeignete Vertauschung der z) auf die aus E_1, E_3, E_4 erzeugte transformiren.

Aus denselben Gründen endlich, die in § 6 entscheidend waren für die Nichtexistenz einer $C_{\frac{1}{2}7!}$ folgt, dass eine ternäre $C_{5!}$ unmöglich ist. Die ternären symmetrischen Collineationsgruppen führen also über die schon im binären Falle existirende Octaedergruppe nicht hinaus.

Folgendes ist demnach das Resultat der vorangegangenen Untersuchung über ternäre Gruppen.

Jede ternäre Collineationsgruppe $C_{\frac{1}{2}k!}$, $C_{k!}$ welche einer alternirenden oder symmetrischen Buchstabenvertauschungsgruppe von k Buchstaben ($k > 2$) holoedrisch isomorph ist, lässt sich auf eine der folgenden Collineationsgruppen linear transformiren:

Zwei $C_{\frac{1}{2}3!}$ erzeugt aus E_1 resp. E_1' (29);

Eine $C_{\frac{1}{2}4!}$ (Tetraeder) „ „ E_1, E_2, (32) oder (34);

Eine $C_{\frac{1}{2}5!}$ (Ikosaeder) „ „ E_1, E_2, E_3 (37) oder (39);

Eine $C_{\frac{1}{2}6!}$ „ „ E_1, E_2, E_3, E_4, (43);

Eine C_{31} erzeugt aus E_1, E_4;

Eine C_{41} (Octaeder) „ „ E_1, E_2, E_4,

wo die Collineationen E_1, E_2, E_3, E_4 in (43) gegeben sind.

§ 8.

Quaternäre Collineationen von der Periode 2 und 3.

Eine quaternäre Collineation A ist durch die Formel gegeben

$$\varrho z_i' = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} z_k \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Wie in § 3, dem wir uns überhaupt in der Bezeichnungsweise anschliessen, nehmen wir auch hier die Determinante $|a_{ik}| = 1$ an, und bezeichnen die Substitution

$$z_i' = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} z_k \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

mit A_s. Nennen wir die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von A $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ so ergiebt sich die Diagonalsumme

$$D = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4,$$

und

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = 1.$$

Soll jetzt A die Periode 2 besitzen, so erhalten wir folgende Möglichkeiten:

$$(44)\quad \begin{array}{llllll} \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 = & 1, & 1, & -1, & -1; & D = 0: \quad \text{Typus Ia}, \\ \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} = & \pm i, & \pm i, & \mp i, & \mp i; & D = 0: \quad \text{„} \quad \text{Ib}, \\ \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} = & \omega, & \omega, & \omega, & -\omega; & D = 2\omega: \quad \text{„} \quad \text{II}, \end{array}$$

wo ω eine eigentliche achte Einheitswurzel bedeutet.

Für den Typus Ia ist

$$A_s^2 \equiv 1.$$

Setzen wir nun wiederum unsere Gruppen in der Hermite'schen Normalform, also die Existenz der Gleichungen (11) voraus, so folgt ganz wie in § 3 aus $A_s^{-1} = A_s$

$$(45)\qquad a_{ki} = \bar{a}_{ik},$$

also a_{ii} reell.

Für den Typus Ib ist

$$A_s^4 \equiv 1, \quad A_s^2 \equiv -1, \quad \text{also} \quad A_s^{-1} = A_s^3 \equiv -A_s.$$

Hieraus folgt

$$(46)\qquad a_{ki} = -\bar{a}_{ik},$$

also a_{ii} rein imaginär.

Für den Typus II ist

$$A_s^8 \equiv 1\,,\ A_s^4 \equiv -1\,,\ A_s^2 \equiv \pm i\,,\quad \text{also}\quad A_s^{-1} = A_s^7 \equiv \pm i A_s\,,$$

woraus folgt

$$a_{ki} = \pm i a_{ki}\,,$$

also a_{ii} gleich einer mit ω multiplicirten reellen Grösse.

Der Typus I a ist somit durch folgende Matrix gegeben

$$(47)\qquad \begin{vmatrix} a, & u, & v, & w \\ \bar{u}, & b, & r, & s \\ \bar{v}, & \bar{r}, & c, & t \\ \bar{w}, & \bar{s}, & \bar{t}, & d \end{vmatrix},$$

wo

$$(48)\qquad a, b, c, d \ \text{reell},\quad a + b + c + d = 0.$$

Ferner bestehen wegen $A_{ik} = \bar{a}_{ik}$

(49) 4 Gleichungen, deren erste lautet $a^2 + u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w} = 1$,

(50) 6 „ „ „ „ $(a+b)u + v\bar{r} + w\bar{s} = 0$.

Den Typus I b erhält man aus I a, wenn man in der Matrix (47) jeden Coefficienten mit $\pm i$ multiplicirt, während (48), (49), (50) bestehen bleiben.

Den Typus II endlich erhält man durch Multiplication sämmtlicher Coefficienten der Matrix (47) mit ω. An Stelle von (48) ist dabei zu setzen

$$a, b, c, d \ \text{reell},\quad a + b + c + d = \pm 2.$$

Was ferner Collineationen von der Periode 3 anbetrifft, so werden hier die verschiedenen Typen in folgender Tabelle zusammengestellt.

(51)

Typus	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$	D	A_s^3	A_s^2
I a	$1,\ 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2$	$+1$	$+1$	A_s^{-1}
I b	$-1,\ -1,\ -\varepsilon,\ -\varepsilon^2$	-1	-1	$-A_s^{-1}$
I c	$\pm i,\ \pm i,\ \pm i\varepsilon,\ \pm i\varepsilon^2$	$\pm i$	$\pm i$	$\pm i A_s^{-1}$
II a	$\varepsilon,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^2$	-2	$+1$	A_s^{-1}
II b	$-\varepsilon,\ -\varepsilon,\ -\varepsilon^2,\ -\varepsilon^2$	$+2$	-1	$-A_s^{-1}$
II c	$\pm i\varepsilon,\ \pm i\varepsilon,\ \pm i\varepsilon^2,\ \pm i\varepsilon^2$	$\pm 2i$	$\pm i$	$\pm i A_s^{-1}$
III a	$1,\ \varepsilon,\ \varepsilon,\ \varepsilon$	$3\varepsilon + 1$	$+1$	A_s^{-1}
III b	$-1,\ -\varepsilon,\ -\varepsilon,\ -\varepsilon$	$-(3\varepsilon+1)$	-1	$-A_s^{-1}$
III c	$\pm i,\ \pm i\varepsilon,\ \pm i\varepsilon,\ \pm i\varepsilon$	$\pm i(3\varepsilon+1)$	$\pm i$	$\pm i A_s^{-1}$

Hierin sind in der zweiten Collonne die verschiedenen Möglichkeiten für die Werthe der Wurzeln der charakteristischen Gleichung von A in irgend welcher Reihenfolge, in der dritten Colonne die Diagonalsummen gegeben. Die in der vierten Colonne befindlichen Zahlen geben die Factoren an, womit die Substitution A_s^3 jede der vier Variabelen z multiplicirt. In der letzten Colonne bedeutet z. B. die auf den Typus Ic bezügliche Grösse $\pm i A_s^{-1}$, dass die Coefficienten von A_s^2 gleich den mit $\pm i$ multiplicirten Coefficienten von A_s^{-1} sind. Diese letzte Colonne ist insbesondere zur Herstellung von Relationen zwischen den Coefficienten von A von Wichtigkeit. Man berechne dabei die Coefficienten von A_s^2 direct (durch Zusammensetzung von A_s mit A_s), diejenigen von A_s^{-1} dagegen als $A_{ki} = \bar{a}_{ki}$.

Durch das Vorangehende ist zugleich die Bestimmung sämmtlicher $C_{\frac{1}{2}3!}$ erledigt. Es giebt 3 verschiedene quaternäre $C_{\frac{1}{2}3!}$, hergestellt durch die Potenzen von:

$$(52)\quad E_1 : \begin{array}{l} \varrho z_1' = z_1, \\ \varrho z_2' = z_2, \\ \varrho z_3' = \varepsilon z_3, \\ \varrho z_4' = \varepsilon^2 z_4, \end{array} \qquad E_1' : \begin{array}{l} \varrho z_1' = \varepsilon z_1, \\ \varrho z_2' = \varepsilon z_2, \\ \varrho z_3' = \varepsilon^2 z_3, \\ \varrho z_4' = \varepsilon^2 z_4, \end{array} \qquad E_1'' : \begin{array}{l} \varrho z_1' = z_1, \\ \varrho z_2' = \varepsilon z_2, \\ \varrho z_3' = \varepsilon z_3, \\ \varrho z_4' = \varepsilon z_4. \end{array}$$

§ 9.

Die quaternären $C_{\frac{1}{2}4!}$ (Tetraedergruppen).

Wir erweitern (52) zur Tetraedergruppe durch Bestimmung von Collineationen E_2, welche mit E_1 resp. E_1', E_1'' combinirt, die Periode 2 ergeben.

Ich zeige zunächst, dass eine Collineation S, deren kanonische Form E_1'' (52) ist, also vom Typus III (51), an keiner Tetraedergruppe theilnehmen kann. Eine derartige Collineation S lässt einen bestimmten Punkt P mit sämmtlichen durch ihn gehenden Ebenen invariant. Sei nun T eine Collineation der Periode 2 und zwar zunächst vom Typus I (44), wobei man noch den Fall Ib auf Ia durch Division der Coefficienten von T mit i reduciren kann. Alsdann lässt T zwei sich nicht schneidende Geraden L_1 und L_2 mit allen hindurchgehenden Ebenen invariant. Wählen wir nun die Ebenen PL_1 und PL_2 als $z_1 = 0$ und $z_2 = 0$, (falls P etwa auf L_1 liegen sollte, nehmen wir für PL_1 irgend eine Ebene durch L_1) so ist in der Substitution

$$S_s : z_1' = \varepsilon z_1,\ z_2' = \varepsilon z_2,$$

und in

$$T_s : z_1' = z_1,\ z_2' = -z_2,$$

also in

$$S_s T_s : z_1' = \varepsilon z_1, \; z_2' = -\varepsilon z_2;$$

mithin kann ST nicht die Collineationsperiode 3 besitzen.

Aber auch die Collineationsperiode 2 ist ausgeschlossen, denn wäre $(ST)^2 = 1$, so müsste, da in $(S_s T_s)^2 : z_1' = \varepsilon^2 z_1$, $z_2' = \varepsilon^2 z_2$ ist, auch $z_3' = \varepsilon^2 z_3$, $z_4' = \varepsilon^2 z_4$ sein, und alsdann wäre die Substitutionsdeterminante von Eins verschieden.

Falls nun T vom Typus II (44) sein sollte, so lässt T ebenfalls einen Punkt mit sämmtlichen hindurchgehenden Ebenen invariant. Sei dies der Punkt Q. Wählt man alsdann irgend eine durch P und Q gehende Ebene als $z_1 = 0$, so ist in $S_s : z_1' = \varepsilon z_1$ und in $T_s : z_1' = \omega z_1$, also in $S_s T_s : z_1' = \varepsilon \omega z_1$. Hieraus folgt, dass ST weder von der Periode 3, noch auch von der Periode 2 sein kann.

Eine Collineation der Periode 3 vom Typus III (51) kann daher nicht an einer Tetraedergruppe theilnehmen, und auch nicht an einer symmetrischen $C_{3!}$. Da ferner alle in der weiteren Untersuchung vorkommenden Collineationen der Periode 3 (durch Collineationen derselben Gruppe) in einander transformirbar sind — die entsprechenden Buchstabenvertauschungen sind alle von der Form (ikl) — so folgt, *dass Collineationen, deren kanonische Form E_1''* (52) *ist, also Collineationen vom Typus III* (51), *überhaupt von der weiteren Untersuchung ausgeschlossen werden können.*

Aehnliches gilt nun aber auch von Collineationen T von der Periode 2, falls sie vom Typus II (44) sind. Nimmt man als S zunächst E_1 in (52) und wählt die durch den invarianten Punkt von T und die invariante Gerade von S gelegte Ebene als $z_1 = 0$, so ist in $S_s : z_1' = z_1$ und in $T_s : z_1' = \omega z_1$. Hier sieht man wiederum, dass ST nicht von der Collineationsperiode 3 sein kann, während die Möglichkeit der Periode 2 nicht ausgeschlossen ist. Nimmt man endlich E_1' in (52) für S, so folgt in ähnlicher Weise, wie soeben, dass ST weder die Periode 3 noch die Periode 2 besitzen kann. *Demzufolge können in der weiteren Untersuchung, soweit alternirende Gruppen in Betracht kommen, Collineationen der Periode* 2 *vom Typus II* (44) *ausgeschlossen werden, während bei der Bestimmung der symmetrischen Gruppen auch der Fall in Betracht zu ziehen ist, dass F vom Typus II ist.*

Bei der Bestimmung der Tetraedergruppen, und deren Erweiterung zu höheren $C_{\frac{1}{2}k!}$ hat man, wie bewiesen, entweder von E_1 oder von E_1' (52) auszugehen. Je nachdem man das eine oder das andere thut, folgt alsdann, wie oben, dass auch sämmtliche in der Untersuchung auftretende Collineationen der Periode 3, da sie durch Collineationen der Gruppe auf E_1 resp. E_1' transformirbar sind, entweder alle wie E_1 vom Typus I (51) oder alle wie E_1' vom Typus II (51) sein müssen.

Wir gehen nunmehr zur wirklichen Aufstellung der Tetraedergruppen auf, und beginnen mit

$$E_1: \begin{array}{l} \varrho z_1' = z_1, \\ \varrho z_2' = z_2, \\ \varrho z_3' = \varepsilon z_3, \\ \varrho z_4' = \varepsilon^2 z_4, \end{array} \qquad E_2 \equiv \begin{vmatrix} a, & u, & v, & w \\ \bar{u}, & b, & r, & s \\ \bar{v}, & \bar{r}, & c, & t \\ \bar{w}, & \bar{s}, & \bar{t}, & d \end{vmatrix},$$

wobei die Bedingungen (48), (49), (50) zu erfüllen sind. Wir haben nun die weitere Bedingung einzuführen, dass $(E_1 E_2)^3 = 1$. Da $E_1 E_2$ vom Typus I (51) sein muss, so folgt für die Diagonalsumme von $E_1 E_2$ entweder

(53) $$a + b + \varepsilon c + \varepsilon^2 d = \pm 1,$$

oder

(54) $$a + b + \varepsilon c + \varepsilon^2 d = \pm i.$$

Wir nehmen zuerst den Fall (53). Hier kann, eventuell durch Zeichenwechsel sämmtlicher Coefficienten in E_2 stets erreicht werden, dass das obere Zeichen gilt. Wir haben demnach

(55) $$a + b + \varepsilon c + \varepsilon^2 d = 1,$$

und da ausserdem (48) $a + b + c + d = 0$, so folgt

(56) $$a + b = \frac{2}{3}, \quad c = d = -\frac{1}{3}.$$

Aus (55) folgt ferner, dass nunmehr $E_1 E_2$ vom Typus Ia (51) ist. Durch Vergleichung des ersten Coefficienten in $(E_1 E_2)^2$ mit dem in $(E_1 E_2)^{-1}$ ergiebt sich alsdann

(57) $$\begin{cases} a^2 + u\bar{u} + \varepsilon v\bar{v} + \varepsilon^2 w\bar{w} = a, & \text{und aus (49)} \\ a^2 + u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w} = 1. \end{cases}$$

Durch p-Transformation (24) kann man erreichen, dass v und r reell werden. Ferner transformire man E_1 und E_2 durch die Einführung der neuen Variabelen

(58) $$\begin{aligned} y_1 &= \lambda z_1 + \mu z_2, \\ y_2 &= \mu z_1 - \lambda z_2, \end{aligned}$$

wo λ und μ reelle, der Bedingung $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ genügende Grössen sind. Diese Transformation lässt die Hermite'sche Normalform ungeändert, lässt E_1 ungeändert, und bewirkt, dass bei E_2, der Coefficient von y_3 in y_1' lautet $\lambda v + \mu r$. Da nun v und r reell sind, lässt sich λ und μ so bestimmen, dass $\lambda v + \mu r = 0$ wird. Schreibt man nun wieder z_1 und z_2 statt y_1 und y_2, so ist nunmehr in E_2 $v = 0$.

Jetzt folgt aus (57), da a reell ist, zunächst $w = 0$, dann $a = 1$, $u = 0$. Aus (56) kommt $b = -\frac{1}{3}$. Nun sind $u = v = w = 0$, also lässt sich r und s durch p-Transformation reell und positiv machen. Die Gleichungen (49) und (50) bestimmen sodann eindeutig $r=s=t=\frac{2}{3}$. Die so bestimmte E_2 liefert nun in der That mit E_1 combinirt die Periode 3, also haben wir die folgende Tetraedergruppe:

Tetraeder I.

(59)

	$E_1=(123)$	$E_2=(12)(34)$
$\varrho z_1'=$	z_1	z_1
$\varrho z_2'=$	z_2	$\frac{1}{3}(-z_2+2z_3+2z_4)$
$\varrho z_3'=$	εz_3	$\frac{1}{3}(2z_2-z_3+2z_4)$
$\varrho z_4'=$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{3}(2z_2+2z_3-z_4)$.

Durch die Transformation

$$
(60)\qquad
\begin{aligned}
2x_1 &= z_1+\sqrt{3}\,z_2,\\
2x_2 &= z_1+\frac{1}{\sqrt{3}}(-z_2+2z_3+2z_4),\\
2x_3 &= z_1+\frac{1}{\sqrt{3}}(-z_2+2\varepsilon z_3+2\varepsilon^2 z_4),\\
2x_4 &= z_1+\frac{1}{\sqrt{3}}(-z_2+2\varepsilon^2 z_3+2\varepsilon z_4)
\end{aligned}
$$

geht diese Tetraedergruppe I über in die einfache Gestalt

(61)

	E_1	E_2
$\varrho x_1'=$	x_1	x_2
$\varrho x_2'=$	x_3	x_1
$\varrho x_3'=$	x_4	x_4
$\varrho x_4'=$	x_2	x_3 .

Wir behandeln nun den Fall (54). Hier können wir wiederum wie im vorigen Falle ohne Einschränkung der Allgemeinheit das obere Zeichen wählen, und erhalten sodann aus

$$(62)\qquad a+b+\varepsilon c+\varepsilon^2 d=i,$$

und

$$a+b+c+d=0,$$

$$(63)\qquad a+b=0,\quad c=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad d=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Aus (62) folgt, dass $E_1 E_2$ vom Typus I c (51) ist. Demnach ergiebt sich

$$a^2 + u\bar{u} + \varepsilon v\bar{v} + \varepsilon^2 w\bar{w} = \pm ia.$$

Da aber zufolge (63) a und b verschiedenes Vorzeichen haben, kann durch eventuelle Vertauschung von a und b das Vorzeichen von i in bestimmter Weise gewählt werden, also

$$a^2 + u\bar{u} + \varepsilon v\bar{v} + \varepsilon^2 w\bar{w} = -ia.$$

Aehnlich wie im vorigen Falle kann man durch die Transformation (58) nach vorausgegangener p-Transformation wiederum $v = 0$ machen, und dann *nachträglich* durch p-Transformation w und r reell und positiv. Nunmehr folgt aus

$$a^2 + u\bar{u} + \quad w^2 = 1,$$

und

$$a^2 + u\bar{u} + \varepsilon^2 w^2 = -ia,$$

$$a^2 + u\bar{u} = \frac{1}{3}, \quad w = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad u = 0.$$

Die letzte der 4 Gleichungen (49) lautet

$$d^2 + w\bar{w} + s\bar{s} + t\bar{t} = 1,$$

also folgt $s = t = 0$, und nunmehr aus den übrigen Gleichungen (49) $r = \sqrt{\frac{2}{3}}$. *Hiermit sind* alle Coefficienten bestimmt, und man überzeugt sich, dass in der That $E_1 E_2$ die Periode 3 besitzt. Demnach erhalten wir

Tetraeder II.

(64)

	$E_1 = (123)$	$E_2 = (12)(34)$
$\varrho z_1' =$	z_1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\quad z_1 + \sqrt{2}z_4)$
$\varrho z_2' =$	z_2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(-z_2 + \sqrt{2}z_3)$
$\varrho z_3' =$	εz_3	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}z_2 + \quad z_3)$
$\varrho z_4' =$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}z_1 - \quad z_4)$.

Durch die Transformation

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 + z_2),\\
x_2 &= \frac{i}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 - z_2) + \quad z_3 + \quad z_4\right],\\
x_4 &= \frac{i}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 - z_2) + \varepsilon z_3 + \varepsilon^2 z_4\right],\\
x_4 &= \frac{i}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 - z_2) + \varepsilon^2 z_3 + \varepsilon z_4\right],
\end{aligned}
\tag{65}
$$

geht diese Tetraedergruppe II über in

$$(66)\qquad \begin{array}{c|c|c|} & E_1 & E_2 \\ \hline \varrho x_1' = & x_1 & -x_2 \\ \varrho x_2' = & x_3 & x_1 \\ \varrho x_3' = & x_4 & -x_4 \\ \varrho x_4' = & x_2 & x_3 \end{array}\;.$$

Das Tetraeder II kann nicht in I (59) transformirt werden. Dies folgt am einfachsten daraus, dass die Tetraedergruppe I eine Ebene invariant lässt, nämlich die Ebene $z_1 = 0$, oder $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, für die Tetraedergruppe II dagegen keine invariante Ebene existirt, wie sofort aus den Formeln (66) folgt.

Zur Bestimmung weiterer Tetraedergruppen legen wir jetzt als E_1 die in (52) mit E_1' bezeichnete Collineation zu Grunde. In gleicher Weise wie in den Fällen I und II lässt sich auch hier in E_2, welches wir wiederum in der Form (47) mit den Relationen (48), (49), (50) anzunehmen haben, der Coefficient $v = 0$ machen. Für die Diagonalsumme D von $E_1 E_2$ erhalten wir sodann

$$\varepsilon(a+b) + \varepsilon^2(c+d) = D,$$

also

$$\varepsilon^2(a+b) + \varepsilon(c+d) = \overline{D},$$

und da

$$(a+b) + (c+d) = 0,$$

so folgt, $D + \overline{D} = 0$, d. h. D ist rein imaginär. Nun muss aber $E_1 E_2$ vom Typus II sein, also folgt $D = \pm 2i$, und insbesondere, dass $E_1 E_2$ vom Typus IIc ist. Durch Multiplication der Coefficienten von E_2 mit ± 1 kann stets $D = + 2i$ bewirkt werden. Dann ergiebt sich

$$(67)\qquad a + b = \frac{2}{\sqrt{3}},\quad c + d = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Vergleichen wir nun die ersten Glieder in $(E_1 E_2)^2$ und $(E_1 E_2)^{-1}$, so folgt nach (51)

$$(68)\qquad a^2 + u\bar{u} + \varepsilon(v\bar{v} + w\bar{w}) = \pm ia.$$

Da $v = 0$, und durch p-Transformation w (und r) reell und positiv gemacht werden kann, so haben wir

$$a^2 + u\bar{u} + w^2 = 1,$$
$$a^2 + u\bar{u} + \varepsilon w^2 = \pm ia,$$

und hieraus

$$a^2 + u\bar{u} = \frac{1}{3},\quad w = \sqrt{\frac{2}{3}},\quad a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}},\quad u = 0$$

Wäre aber $a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, so würde aus (67) $b = \sqrt{3}$ folgen, also $b > 1$, was wegen der Gleichungen (49) unmöglich ist. Also muss in (68) das obere Vorzeichen gelten, und es folgt $a = b = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Aus den Gleichungen (50) und (49) folgt sofort $s = t = 0$, $c = d = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $r = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Die so bestimmte Collineation E_2 genügt nun in der That der Bedingung $(E_1 E_2)^3 = 1$, also erhält man folgende Tetraedergruppe

Tetraeder III.

(69)

	$E_1 = (123)$	$E_2 = (12)(34)$
$\varrho z_1' =$	εz_1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\quad z_1 + \sqrt{2} z_4)$
$\varrho z_2' =$	εz_2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\quad z_2 + \sqrt{2} z_3)$
$\varrho z_3' =$	$\varepsilon^2 z_3$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_2 - \quad z_3)$
$\varrho z_4' =$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_1 - \quad z_4)$.

Durch die Transformation

$$(70)\quad \begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 + z_3),\\
x_2 &= \frac{i}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 - z_3) + \quad z_2 + \quad z_4\right],\\
x_3 &= \frac{i}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 - z_3) + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_4\right],\\
x_4 &= \frac{i}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 - z_3) + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_4\right]
\end{aligned}$$

geht dieselbe über in folgende reelle Form

(71)

	E_1	E_2
$\varrho x_1' =$	$\frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 - x_4)$	$-x_2$
$\varrho x_2' =$	$\frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 + x_4)$	x_1
$\varrho x_3' =$	$\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 - x_4)$	$-x_4$
$\varrho x_4' =$	$\frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 + x_4)$	x_3

Selbstverständlich ist diese Gruppe III (wegen der Form von E_1) weder auf I noch auf II transformirbar. Da nun weitere Tetraedergruppen nicht mehr möglich sind, so folgt, dass jede quaternäre Tetraedergruppe entweder auf I (59) oder auf II (64) oder auf III (69) transformirbar ist.

§ 10.

Die quaternären $C_{\frac{1}{2}5!}$ (Ikosaedergruppen).

Wir gehen von dem Tetraeder I (59) aus, nehmen $E_3 = (12)(45)$ in der Form (47) mit den Relationen (48), (49), (50) an, und bilden $E_1 E_3$. Wäre $E_1 E_3$ vom Typus Ib (44) so würden nach (46) alle Coefficienten verschwinden. Also muss $E_1 E_3$ vom Typus Ia sein, mithin folgt nach (45) $c = d = 0$; $v = w = r = s = 0$. Also erhalten wir für die Coefficienten von E_3 die Matrix

$$\text{(72)} \qquad \begin{vmatrix} a, & u, & 0, & 0 \\ \bar{u}, & -a, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & t \\ 0, & 0, & \bar{t}, & 0 \end{vmatrix},$$

mit den Relationen

$$\text{(73)} \qquad a^2 + u\bar{u} = 1, \quad t\bar{t} = 1.$$

Bilden wir nun $E_2 E_3$ so ergiebt sich die Diagonalsumme

$$D = \frac{1}{3}(4a + 2t + 2\bar{t}),$$

und da dieselbe reell ist, ausserdem $E_2 E_3$ mit E_1 von demselben Typus also I sein muss, so folgt $D = \pm 1$. Also ist $E_2 E_3$ speciell vom Typus Ia. Durch Multiplication der Coefficienten von E_3 mit ± 1 kann man stets $D = +1$ erreichen, also

$$\text{(74)} \qquad \frac{1}{3}(4a + 2t + 2\bar{t}) = 1.$$

Durch Vergleichung der ersten Coefficienten in $(E_2 E_3)^2$ und $(E_2 E_3)^{-1}$ folgt

$$3a^2 - u\bar{u} = 3a,$$

woraus nach (73) sich ergiebt $4a^2 - 3a - 1 = 0$, also entweder

$$\text{(75)} \qquad a = 1,$$

oder

$$\text{(76)} \qquad a = -\frac{1}{4}.$$

Im Fall (75) folgt ferner $u = 0$, und aus (74) $t + \bar{t} = -\frac{1}{2}$, mithin in Hinsicht auf (73)

$$t = \frac{1}{4}(-1 \pm i\sqrt{15}).$$

Welcher der beiden Werthe für t genommen wird, ist gleichgültig, da man durch Vertauschung von z_3 mit z_4 beide Fälle auf einander transformiren kann. Also erhalten wir als erste quaternäre $C_{\frac{1}{2}5!}$

Ikosaeder I.

(77)

	$E_1 = (123)$	$E_2 = (12)(34)$	$E_3 = (12)(45)$
$\varrho z_1' =$	z_1	z_1	z_1
$\varrho z_2' =$	z_2	$\frac{1}{3}(-z_2 + 2z_3 + 2z_4)$	$-z_2$
$\varrho z_3' =$	εz_3	$\frac{1}{3}(\ 2z_2 - z_3 + 2z_4)$	$\lambda_1 z_4$
$\varrho z_4' =$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{3}(\ 2z_2 + 2z_3 - z_4)$	$\lambda_2 z_3$,

wo

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}(-1 + i\sqrt{15}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}(-1 - i\sqrt{15}).$$

Durch die Transformation (60) geht die Gruppe über in die reelle Form

(78)

	E_1	E_2	E_3
$\varrho x_1' =$	x_1	x_2	$\frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$
$\varrho x_2' =$	x_3	x_1	$\frac{1}{2}(\ x_1 - \mu_1 x_3 - \mu_2 x_4)$
$\varrho x_3' =$	x_4	x_4	$\frac{1}{2}(\ x_1 - \mu_1 x_2 - \mu_2 x_3\ )$
$\varrho x_4' =$	x_2	x_3	$\frac{1}{2}(\ x_1 - \mu_2 x_2 - \mu_1 x_4)$,

wo

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}), \quad \mu_2 = \frac{1}{2} - 1 - \sqrt{5}),$$

während sie durch die Transformation

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(z_2 + z_3 + z_4), \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(z_2 + \varepsilon z_3 + \varepsilon^2 z_4), \\ x_4 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(z_2 + \varepsilon^2 z_3 + \varepsilon z_4), \end{aligned} \tag{79}$$

ebenfalls in eine reelle Form übergeht, die mit der aus der ternären Ikosaedergruppe (39) durch Hinzufügung einer vierten Veriabelen $(\varrho x_4' = x_4)$ abgeleiteten übereinstimmt.

Im Falle (76) folgt $u\bar{u}=\frac{15}{16}$, $t=1$. Man kann nun eine p-Transformation so bestimmen, dass E_1 und E_2 ungeändert bleiben, während in E_3 u reell und positiv wird. Dadurch wird $u=\frac{1}{4}\sqrt{15}$, und da nun in der That $(E_2E_3)^3=1$, so erhält man folgende zweite quaternäre $C_{\frac{1}{2}5!}$

Ikosaedergruppe II.

$$
(80)\qquad
\begin{array}{r|c|c|c|}
 & E_1=(123) & E_2=(12)\,(34) & E_3=(12)\,(45) \\
\hline
\varrho z_1'= & z_1 & z_1 & \frac{1}{4}(-z_1+\sqrt{15}z_2) \\
\varrho z_2'= & z_2 & \frac{1}{3}(-z_2+2z_3+2z_4) & \frac{1}{4}(\sqrt{15}z_1+z_2) \\
\varrho z_3'= & \varepsilon z_3 & \frac{1}{3}(2z_2-z_3+2z_4) & z_4 \\
\varrho z_4'= & \varepsilon^2 z_4 & \frac{1}{3}(2z_2+2z_3-z_4) & z_3
\end{array}\,.
$$

Durch die Transformation (60) geht diese Gruppe über in

$$
(81)\qquad
\begin{array}{r|c|c|c|}
 & E_1 & E_2 & E_3 \\
\hline
\varrho x_1'= & x_1 & x_2 & \frac{1}{2}(x_1+ix_2+ix_3+ix_4) \\
\varrho x_2'= & x_3 & x_1 & \frac{1}{2}(-ix_1+x_2-x_3-x_4) \\
\varrho x_3'= & x_4 & x_4 & \frac{1}{2}(-ix_1-x_2-x_3+x_4) \\
\varrho x_4'= & x_2 & x_3 & \frac{1}{2}(-ix_1-x_2+x_3-x_4)
\end{array}\,,
$$

und durch (79) in folgende reelle Form

$$
(82)\qquad
\begin{array}{r|c|c|c|}
 & E_1 & E_2 & E_3 \\
\hline
\varrho x_1'= & x_1 & x_1 & \frac{1}{4}(-x_1+\sqrt{5}x_2+\sqrt{5}x_3+\sqrt{5}x_4) \\
\varrho x_2'= & x_3 & x_2 & \frac{1}{4}(\sqrt{5}x_1+3x_2-x_3-x_4) \\
\varrho x_3'= & x_4 & -x_3 & \frac{1}{4}(\sqrt{5}x_1-x_2-x_3+3x_4) \\
\varrho x_4'= & x_2 & -x_4 & \frac{1}{4}(\sqrt{5}x_1-x_2+3x_3-x_4)
\end{array}\,.
$$

Dass die Ikosaedergruppen I und II nicht auf einander transformirbar sind, folgt aus dem Umstande dass I eine Ebene ($z_1 = 0$) invariant lässt, während bei II keine invariante Ebene vorhanden ist.

Um weitere Ikosaedergruppen zu bestimmen, gehen wir jetzt von dem Tetraeder II (64) aus. Die erweiternde Collineation $E_3 = (12)(45)$ können wir sofort in der Form (72) annehmen. Für $E_2 E_3$ erhalten wir alsdann $D = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Da dies eine reelle Grösse ist, kann sie nur ± 1 sein, und durch Multiplication der Coefficienten von E_3 mit ± 1 kann man $D = +1$ machen, also

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{3}. \tag{83}$$

Durch p-Transformation kann u wiederum reell und positiv gemacht werden, somit folgt aus (73) und (83) $u = \frac{1}{2}$. Um endlich t zu bestimmen, vergleichen wir die ersten Coefficienten in $(E_2 E_3)^2$ und $(E_2 E_3)^{-1}$, wobei wir berücksichtigen, dass wegen $D = 1$, $E_2 E_3$ vom Typus Ia ist. Wir erhalten

$$a^2 - u^2 + 2ut = a\sqrt{3}, \quad \text{also} \quad t = 1.$$

Hiermit ist E_3 eindeutig bestimmt, welches nun in der That, wie man sich überzeugt, den Periodenbedingungen genügt. Man erhält demnach

Ikosaeder III.

		$E_1 = (123)$	$E_2 = (12)(34)$	$E_3 = (12)(45)$
	$\varrho z_1' =$	z_1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(z_1 + \sqrt{2} z_4)$	$\frac{1}{2}(\sqrt{3} z_1 + z_2)$
(84)	$\varrho z_2' =$	z_2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(-z_2 + \sqrt{2} z_3)$	$\frac{1}{2}(z_1 - \sqrt{3} z_2)$
	$\varrho z_3' =$	εz_3	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_2 + z_3)$	z_4
	$\varrho z_4' =$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_1 - z_4)$	z_3 .

Durch die Transformation (65) erhält man hieraus

		E_1	E_2	E_3
	$\varrho x_1' =$	x_1	$-x_2$	$\frac{1}{2}(x_1 - ix_2 - ix_3 - ix_4)$
(85)	$\varrho x_2' =$	x_3	x_1	$\frac{1}{2}(ix_1 + x_2 - x_3 - x_4)$
	$\varrho x_3' =$	x_4	$-x_4$	$\frac{1}{2}(ix_1 - x_2 - x_3 + x_4)$
	$\varrho x_4' =$	x_2	x_3	$\frac{1}{2}(ix_1 - x_2 + x_3 - x_4)$.

Dass die Ikosaedergruppo III nicht auf I oder II transformirbar ist, folgt daraus, dass einerseits in den Ikosaedergruppen I und II die Tetraedergruppe I, in der Ikosaedergruppe III dagegen die von I *verschiedene* Tetraedergruppe II enthalten ist, während andererseits alle in der Ikosaedergruppe enthaltenen Tetraedergruppen gleichberechtigt, also in einander transformirbar sind.

Wir gehen endlich von dem Tetraeder III (69) aus. Wir nehmen E_3 in der allgemeinen Form (47) hinzu. Bilden wir $E_1 E_3$, so zeigt sich sofort, dass wegen (46) $E_1 E_3$ nicht vom Typus Ib (44) sein kann. Also muss $E_1 E_3$ vom Typus Ia sein, und dies ergiebt wegen (45)

$$a = b = c = d = 0, \quad u = t = 0.$$

Wir erhalten also für E_3 die Matrix

$$(86) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & v & w \\ 0 & 0 & r & s \\ \bar{v} & \bar{r} & 0 & 0 \\ \bar{w} & \bar{s} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Bedingungen (49) und (50) lauten jetzt

$$(87) \qquad \begin{aligned} v\bar{v} + w\bar{w} &= 1, \\ r\bar{r} + s\bar{s} &= 1, \quad v\bar{r} + w\bar{s} = 0, \\ v\bar{v} + r\bar{r} &= 1, \quad v\bar{w} + r\bar{s} = 0. \\ w\bar{w} + s\bar{s} &= 1, \end{aligned}$$

Ich behaupte nun, dass man durch lineare Transformation $v = 0$ machen kann. Die anzuwendende Transformation lautet

$$(88) \qquad \begin{aligned} y_1 &= \quad p z_1 + q z_2, \quad y_3 = \bar{p} z_3 - \bar{q} z_4, \\ y_2 &= -\bar{q} z_1 + \bar{p} z_2, \quad y_4 = q z_3 + p z_4, \end{aligned}$$

wo die Coefficienten p und q der Bedingung $p\bar{p} + q\bar{q} = 1$ genügen sollen. Bei dieser Transformation bleibt zunächst die Hermite'sche Normalform ungeändert, E_1 und E_2 (69) gehen in sich selbst über, während E_3 (86) folgende Form annimmt

$$(89) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & v' & w' \\ 0 & 0 & r' & s' \\ \bar{v}' & \bar{r}' & 0 & 0 \\ \bar{w}' & \bar{s}' & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Hierin ist

$$v' = p^2 v + pq(r - w) - q^2 s.$$

Bestimmt man nun das Verhältniss $\frac{p}{q} = \zeta$ aus der Gleichung $v' = 0$, so lässt sich stets der Bedingung

$$p\bar{p} + q\bar{q} = q\bar{q}(1 + \zeta\bar{\zeta}) = 1$$

durch passende Wahl von q genügen. Lassen wir nun in der transformirten Form für E_3 (89) die Accente fort, so können wir also $v = 0$ annehmen. Aus (87) folgt sodann $s = 0$, $w\bar{w} = r\bar{r} = 1$.

Wir haben nun noch der Bedingung $(E_2 E_3)^3 = 1$ zu genügen. Es ergiebt sich

$$E_2 E_3 \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} \bar{w}\sqrt{2}, & 0, & 0, & w \\ 0, & \bar{r}\sqrt{2}, & r, & 0 \\ 0, & -\bar{r}, & r\sqrt{2}, & 0 \\ -\bar{w}, & 0, & 0, & w\sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

Hierin ist $D = \sqrt{\frac{2}{3}}(w + \bar{w} + r + \bar{r})$, also reell, also folgt $D = \pm 2$. Durch Vorzeichenänderung der Coefficienten in E_3 kann $D = 2$ bewirkt werden. Also ist

$$(90) \qquad w + \bar{w} + r + \bar{r} = 2\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Die zur vollständigen Bestimmung von w und r noch fehlende Gleichung ergiebt sich am einfachsten durch Vergleichung der Coefficienten a_{14} in $(E_2 E_3)^2$ und $(E_2 E_3)^{-1}$. Wegen $D = +2$ ist hierbei $E_2 E_3$ vom Typus IIb (51). Diese Gleichung lautet

$$\frac{1}{3}\sqrt{2}\, w(w + \bar{w}) = \frac{1}{\sqrt{3}} w,$$

woraus sich in Verbindung mit $w\bar{w} = 1$ ergiebt

$$(91) \qquad w = \sqrt{\frac{3}{8}} \pm i\sqrt{\frac{5}{8}}.$$

Aus (90) erhält man $r + \bar{r} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ und hieraus folgt in Verbindung mit $r\bar{r} = 1$ entweder $r = w$, oder $r = \bar{w}$. Somit können wir für E_3 entweder nehmen

$$(92) \qquad \varrho z_1' = w z_4, \quad \varrho z_2' = \bar{w} z_3, \quad \varrho z_3' = w z_2, \quad \varrho z_4' = \bar{w} z_4,$$

oder

$$(93) \qquad \varrho z_1' = w z_4, \quad \varrho z_2' = w z_3, \quad \varrho z_3' = \bar{w} z_2, \quad \varrho z_4' = \bar{w} z_4.$$

Beide Collineationen erfüllen in der That die E_3 auferlegten Periodenbedingungen. Welcher der beiden Werthe von w übrigens in (91) gewählt wird, ist gleichgültig, da durch die Vertauschung $(z_1 z_2)(z_3 z_4)$ E_1 und E_2 ungeändert bleiben, während in (92) und (93) w mit $\bar{w}$ vertauscht wird. Somit erhalten wir folgende zwei Ikosaedergruppen:

Ikosaeder IV.

(94)

	$E_1=(123)$	$E_2=(12)(34)$	$E_3=(12)(45)$
$\varrho z_1'=$	εz_1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\quad z_1+\sqrt{2}z_4)$	$\nu_1 z_4$
$\varrho z_2'=$	εz_2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\quad z_2+\sqrt{2}z_3)$	$\nu_1 z_3$
$\varrho z_3'=$	$\varepsilon^2 z_3$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}z_2-\quad z_3)$	$\nu_2 z_2$
$\varrho z_4'=$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}z_1-\quad z_4)$	$\nu_2 z_1$

Ikosaeder V.

(95)

	$E_1=(123)$	$E_2=(12)(34)$	$E_3=(12)(45)$
$\varrho z_1'=$	εz_1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\quad z_1+\sqrt{2}z_4)$	$\nu_1 z_4$
$\varrho z_2'=$	εz_2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\quad z_2+\sqrt{2}z_3)$	$\nu_2 z_3$
$\varrho z_3'=$	$\varepsilon^2 z_3$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}z_2-\quad z_3)$	$\nu_1 z_2$
$\varrho z_4'=$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}z_1-\quad z_4)$	$\nu_2 z_1$.

Hierin ist (für beide Gruppen)

(96) $$\nu_1=\sqrt{\frac{3}{8}}+i\sqrt{\frac{5}{8}},\quad \nu_2=\sqrt{\frac{3}{8}}-i\sqrt{\frac{5}{8}}.$$

Durch die Transformation (70) geht für die Ikosaedergruppe IV E_3 über in

$$\varrho x_1'=\frac{1}{2}(-x_2-\mu_2x_3-\mu_1x_4),$$
$$\varrho x_2'=\frac{1}{2}(\quad x_1-\mu_1x_3+\mu_2x_4),$$
$$\varrho x_3'=\frac{1}{2}(\mu_2x_1+\mu_1x_2-\quad x_4),$$
$$\varrho x_4'=\frac{1}{2}(\mu_1x_1-\mu_2x_2+\quad x_3),$$

wo

$$\mu_1=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}),\quad \mu_2=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}),$$

während für die Ikosaedergruppe V E_3 übergeht in

$$\varrho x_1' = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2\nu_1 x_2 + \nu_1 x_3 + \nu_1 x_4),$$

$$\varrho x_2' = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2\nu_2 x_1 + \nu_1 x_3 - \nu_1 x_4),$$

$$\varrho x_3' = \frac{1}{\sqrt{6}}[-\nu_2 x_1 - \nu_2 x_2 + (\nu_1 - \nu_2) x_3 - (\quad \nu_1 + \nu_2) x_4],$$

$$\varrho x_4' = \frac{1}{\sqrt{6}}[-\nu_2 x_1 + \nu_2 x_2 + (\nu_1 + \nu_2) x_3 + (-\nu_1 + \nu_2) x_4].$$

E_1 und E_2 werden dabei übereinstimmend für beide Gruppen in die in (71) gegebene Form transformirt. Die transformirte Ikosaedergruppe IV erscheint somit in reeller Form.

Dass die Gruppen IV und V nicht in einander transformirbar sind, kann folgendermassen bewiesen werden. Man bilde für beide Gruppen die Collineation $(E_3 E_2 E_1) = (12345)$. Für die Diagonalsumme derselben ergiebt sich im Falle der Grupe IV

$$D = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\nu_1 \varepsilon + \nu_2 \varepsilon^2) = -(1+\sqrt{5}) = \tau^2 + \tau^3 + \tau^2 + \tau^3 \left(\tau = e^{\frac{2\pi i}{5}}\right),$$

im Falle der Gruppe V dagegen

$$D' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\nu_1 + \nu_2)(\varepsilon + \varepsilon^2) = -1 = \tau + \tau^2 + \tau^3 + \tau^4.$$

Hier sind die beiden Invarianten D und D' wesentlich (d. h. nicht bloss um einen Factor ± 1, $\pm i$) von einander verschieden, und da in der Ikosaedergruppe alle Operationen der Periode 5 unter einander gleichberechtigt sind, so ist lineare Transformation von IV in V unmöglich.

Auf eine der fünf hiermit aufgezählten, von einander verschiedenen, weil nicht in einander transformirbaren, Ikosaedergruppen muss sich demnach jede vorliegende, quaternäre Ikosaedergruppe transformiren lassen.

§ 11.

Die quaternären $C_{\frac{1}{2}6!}$.

Wir behandeln zunächst die beiden Ikosaeder I (77) und II (80) gleichzeitig. Zu der in beiden aus E_1 und E_2 erzeugten Tetraedergruppe I (59) muss, um die Ikosaeder I und II zur quaternären $C_{\frac{1}{2}6!}$ zu erweitern, eine weitere Collineation X so bestimmt werden, dass zunächst

(97) $$X^2 = 1, \quad (E_1 X)^2 = 1, \quad (E_2 X)^2 = 1.$$

Aber die allgemeinste, den ersten beiden dieser Gleichungen genügende Collineation ist durch die Matrix (72) gegeben. Von dieser

Form muss demnach X sein. Bildet man jetzt $E_2 X$, so folgt aus der Bedingung $(E_2 X)^2 = 1$ sofort eindeutig $u = 0$, $t = -a$. Demnach erhalten wir für X folgende Collineation

(98) $X: \varrho z_1' = z_1, \quad \varrho z_2' = -z_2, \quad \varrho z_3' = -z_4, \quad \varrho z_4' = -z_3.$

Setzen wir nun dieses X mit den in den Ikosaedergruppen I und II enthaltenen Collineationen E_3 zusammen, so ergeben sich für $E_3 X$ die resp. Diagonalsummen $D = \frac{5}{2}$ und $D = -\frac{5}{2}$. Also kann $E_3 X$ weder von der Periode 3 noch von der Periode 2 sein. Hieraus folgt:

1) Die Ikosaeder I und II lassen sich nicht zur alternirenden $C_{\frac{1}{2}6!}$ erweitern;

2) Das Tetraeder I (59) wird durch die Collineation X (98) zur $C_{4!}$ (Octaedergruppe) erweitert, und zwar ist X die einzige Collineation vom Typus I (44) welche eine derartige Erweiterung leistet.

3) Die Ikosaeder I und II lassen sich durch keine Collineation vom Typus I zur symmetrischen $C_{5!}$ erweitern.

Zur Erweiterung des Ikosaeders III (84) bestimmt sich zunächst $E_4 = X$ wiederum durch die Bedingungen $X^2 = 1$ und $(E_1 X)^2 = 1$ in der Form (72). Aus $(E_2 X)^2 = 1$ ergiebt sich sofort eindeutig $a = 0$, $t = -\bar{u}$. Die allgemeinste den Bedingungen (97) genügende Collineation ist also diese

(99) $X: \varrho z_1' = u z_2, \; \varrho z_2' = \bar{u} z_1, \; \varrho z_3' = -\bar{u} z_4, \; \varrho z_4' = -u z_3, \; (u\bar{u} = 1).$

Bildet man nun $E_3 X$ so erhält man $D = -\frac{1}{2}(u + \bar{u})$, was als reelle Grösse nur ± 1 sein kann. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit kann das obere Zeichen gewählt werden, und somit ergiebt sich $u = 1$. Mit diesem Werthe von u ist nun in der That $(E_3 X)^3 = 1$; also erhalten wir folgende $C_{\frac{1}{2}6!}$

$C_{\frac{1}{2}6!}$ I.

(100)

	$E_1 = (123)$	$E_2 = (12)(34)$	$E_3 = (12)(45)$	$E_4 = (12)(56)$
$\varrho z_1' =$	z_1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(z_1 + \sqrt{2} z_4)$	$\frac{1}{2}(\sqrt{3} z_1 + z_2)$	z_2
$\varrho z_2' =$	z_2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(-z_2 + \sqrt{2} z_3)$	$\frac{1}{2}(z_1 - \sqrt{3} z_2)$	z_1
$\varrho z_3' =$	εz_3	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_2 + z_3)$	z_4	$-z_4$
$\varrho z_4' =$	$\varepsilon^3 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_1 - z_4)$	z_3	$-z_3$

Die Gruppe geht durch die Transformation (65) in die in (125) durch E_1, E_2, E_3, E_4 gegebene einfache Form über.

Um weiter $C_{\frac{1}{2}61}$ zu erhalten, behandeln wir zunächst die beiden Ikosaedergruppen IV (94) und V (95) gleichzeitig. Soll X den Bedingungen (97) genügen, wo nunmehr E_1 und E_2 in der Tetraedergruppe III (84) gegeben sind, so folgt zunächst, wie in § 10, dass X von der Form (86) sein muss. Bildet man $E_2 X$, so zeigt sich sofort, dass dies vom Typus Ib (44) sein muss. Also muss w und r rein imaginär, und $s = -\bar{v}$ sein; demnach ergiebt sich

$$(101) \qquad X \equiv \begin{vmatrix} 0, & 0, & v, & i\alpha \\ 0, & 0, & i\beta, & -\bar{v} \\ \bar{v}, & -i\beta, & 0, & 0 \\ -i\alpha & -v, & 0, & 0 \end{vmatrix}.$$

Hierin sind α und β reell, und ausserdem ist

$$(102) \qquad (\alpha+\beta)v = 0,$$

$$(103) \qquad v\bar{v} + \alpha^2 = v\bar{v} + \beta^2 = 1.$$

Entnehmen wir jetzt E_3 der Ikosaedergruppe IV (94) so ergiebt sich für $E_3 X$ die Diagonalsumme

$$D = i(\alpha+\beta)(\nu_2-\nu_1).$$

Wäre nun $\alpha + \beta \neq 0$, so folgt aus (102) $v = 0$, und aus (103) $\alpha = \beta = \pm 1$, also $D = \pm 2i(\nu_2-\nu_1) = \pm\sqrt{10}$. Mithin kann in diesem Falle die Periode von $E_3 X$ weder 3 noch auch 2 sein. Wäre jedoch $\alpha + \beta = 0$, so würde $D = 0$ sein, also kann $E_3 X$ sicher nicht die Periode 3 haben. Aber auch die Periode 2 ist unmöglich, denn für diesen Fall müssten die Diagonalterme in $E_3 X$ entweder reell oder imaginär sein. Dies ist nur möglich, wenn $\alpha = \beta = 0$. Alsdann folgt $v \neq 0$, und nun zeigt die Betrachtung der an symmetrischen Plätzen in der Matrix für $E_3 X$ stehenden Terme $v\nu_2$ und $-\bar{v}\nu_2$, welche mit gleichem oder entgegengesetztem Vorzeichen conjugirte Grössen sein sollen, dass die Periode 2 unmöglich ist. Hieraus folgt:

Das Ikosaeder IV (94) *lässt sich nicht zur alternirenden* $C_{\frac{1}{2}61}$ *erweitern; es lässt sich auch nicht durch eine Collineation vom Typus I* (44) *zur symmetrischen* $C_{5!}$ *erweitern.*

Entnehmen wir nun E_3 der Ikosaedergruppe V (95) so ergiebt sich für $E_3 X$

$$D = i(\alpha-\beta)(\nu_2-\nu_1) = (\alpha-\beta)\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Soll die Periode 3 sein, so folgt $D = \pm 2$, und da wir nach Belieben die Zeichen wählen dürfen, können wir setzen

$$\alpha - \beta = 2\sqrt{\frac{2}{5}}. \tag{104}$$

Nun muss $v \mp 0$ sein, weil sonst die aus (103) folgenden Werthe $\alpha, \beta = \pm 1$ die Gleichung (104) nicht befriedigen können. Also folgt aus (102) $\alpha + \beta = 0$ mithin

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}, \quad \beta = -\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Durch die p-Transformation $p_1 = p_4 = p$, $p_2 = p_3 = q$ bleibt die Ikosaedergruppe V ungeändert, während $\frac{p}{q}$ so bestimmt werden kann, dass in X der Coefficient v reell und positiv wird. Dadurch folgt aus (103) $v = \sqrt{\frac{3}{5}}$. Hiermit ist X bestimmt, und man überzeugt sich, dass nunmehr in der That $E_3 X$ die Periode 3 besitzt. Also kann X als E_4 genommen werden und man erhält somit die folgende Gruppe

$$C_{\frac{1}{2}61} \text{ II.}$$

(105)

	$E_1 = (123)$	$E_2 = (12)(34)$	$E_3 = (12)(45)$	$E_4 = (12)(56)$
$\varrho z_1' =$	εz_1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\quad z_1 + \sqrt{2} z_4)$	$v_1 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(\quad \sqrt{3} z_3 + i\sqrt{2} z_4)$
$\varrho z_2' =$	εz_2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\quad z_2 + \sqrt{2} z_3)$	$v_2 z_3$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(-i\sqrt{2} z_3 - \sqrt{3} z_4)$
$\varrho z_3' =$	$\varepsilon^2 z_3$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_2 - \quad z_3)$	$v_1 z_2$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(\quad \sqrt{3} z_1 + i\sqrt{2} z_2)$
$\varrho z_4' =$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_1 - \quad z_4)$	$v_2 z_1$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(-i\sqrt{2} z_1 - \sqrt{3} z_2)$.

Obwohl in der hiermit erhaltenen $C_{\frac{1}{2}61}$ II die zu Grunde gelegte Collineation E_1 vom Typus II (51), die in der $C_{\frac{1}{2}61}$ I (100) zu Grunde gelegte E_1 dagegen vom Typus I (51), und diese beiden Typen nicht in einander transformirbar sind, lässt sich doch beweisen, dass die Gruppe I in II transformirt werden kann. Bildet man nämlich, von E_1, E_2, E_3, E_4 in I (100) ausgehend, die folgenden Collineationen

$$\begin{aligned} F_1 &= E_1 E_4 E_3 = (123)\,(456), \\ F_2 &= (E_2 E_1^2 E_2)\, E_3 (E_2 E_1 E_2) = (14)\,(25), \\ F_3 &= E_1 E_4 E_1^2 = (13)\,(56), \\ F_4 &= E_3 = (12)\,(45), \end{aligned} \tag{106}$$

so überzeugt man sich leicht durch Zuhülfenahme der entsprechenden

Buchstabenvertauschungen, dass diese Collineationen $F_1, \ldots F_4$ den Bedingungen des Moore'schen Theorems B genügen. Andererseits ist aber in F_1, welches von der Periode 3 ist, die Diagonalsumme $D = 2$, folglich F_1 vom Typus II, d. h. auf E_1 in (105) transformirbar. Da man nun, wie soeben bewiesen, nur auf die Gruppe II (105) als einzige $C_{\frac{1}{2}6!}$ gelangt, wenn man von E_1 (105) ausgeht, so muss die aus F_1, F_2, F_3, F_4 erzeugte Gruppe, d. i. die Gruppe I (100) auf die Gruppe II (105) transformirbar sein.

Jede vorliegende quaternäre $C_{\frac{1}{2}6!}$ *ist daher sowohl auf I* (100) *als auch auf II* (105) *transformirbar.*

Was die Litteratur über die quaternäre $C_{\frac{1}{2}6!}$ anbetrifft, so tritt diese Gruppe auf als Untergruppe in den in § 12 und § 13 behandelten $C_{\frac{1}{2}7!}$ und $C_{6!}$, sodann aber auch als Untergruppe der Substitutionsgruppe der Borchardt'schen Moduln*). Sie ist daselbst (l. c. pag. 499 resp. 421) gegeben durch folgende zwei Erzeugenden $S = (123)$ und $T = (23456)$:

$$S \equiv \frac{1+i}{2}\begin{vmatrix} -i & 0 & 0 & i \\ 0 & -i & i & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad T \equiv \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & i & -i \\ 1 & 1 & i & i \\ -1 & 1 & -i & i \\ 1 & 1 & -i & i \end{vmatrix},$$

§ 12.

Die quaternäre $C_{\frac{1}{2}7!}$. Unmöglichkeit quaternärer $C_{\frac{1}{2}8!}$.

Wir gehen zunächst von der $C_{\frac{1}{2}6!}$ I (100) aus. Hier haben wir eine Collineation X zu bestimmen, welche den Bedingungen

(107) $X^2 = 1,\ (E_1 X)^2 = 1,\ (E_2 X)^2 = 1,\ (E_3 X)^2 = 1,\ (E_4 X)^3 = 1$

genügt. Aber die allgemeinste Form, welche X haben muss, wenn es den ersten drei dieser Bedingungen genügen soll, ist bereits in (99) aufgestellt. Soll nun auch $(E_3 X)^2 = 1$ sein, so folgt sofort $u + \bar{u} = 0$, also wegen $u\bar{u} = 1$, $u = i$. Hiermit ist X bereits eindeutig bestimmt. Nehmen wir noch den Factor i in den Proportionalitätsfactor ϱ auf, so ist

(108) $X : \varrho z_1' = z_2,\quad \varrho z_2' = -z_1,\quad \varrho z_3' = z_4,\quad \varrho z_4' = -z_3.$

*) H. Maschke, Ueber die quaternäre, endliche, lineare Substitutionsgruppe der Borchardt'schen Moduln. Math. Ann. Bd. 30; Nachrichten der Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Nr. 14. 1887.

Hiermit genügt X den vier ersten der Bedingungen (107); dagegen ergiebt sich $(E_4 X)^2 = 1$. Demnach lässt sich $C_{\frac{1}{2}6!}$ I nicht zu einer $C_{\frac{1}{2}7!}$ erweitern, wohl aber durch Hinzunahme von (108) zu einer symmetrischen $C_{6!}$ (vgl. § 13).

Um endlich die $C_{\frac{1}{2}6!}$ II zu einer $C_{\frac{1}{2}7!}$ zu erweitern, haben wir wiederum X den Bedingungen (107) gemäss zu bestimmen, wo jetzt die $E_1, \ldots E_4$ den Formeln (105) zu entnehmen sind. Die allgemeinste den ersten drei der Bedingungen (107) genügende Collineation X ist bereits in (101) mit Berücksichtigung von (102) und (103) bestimmt. Bildet man $E_3 X$, so folgt zunächst $\alpha = \beta$ wegen $D = 0$, und ferner $\alpha = 0$, $\beta = 0$, da jeder der Diagonalterme entweder reell oder rein imaginär sein muss. Die Bedingung $(E_3 X)^2 = 1$ ist jetzt erfüllt und wir haben

$$(109)\qquad X: \varrho z_1' = v z_3, \quad \varrho z_2' = -\bar{v} z_4, \quad \varrho z_3' = \bar{v} z_1, \quad \varrho z_4' = -v z_2, \quad (v\bar{v} = 1).$$

Bilden wir nun $E_4 X$ so ergiebt sich $D = 2\sqrt{\frac{3}{5}}(v + \bar{v})$, und da dies reell ist, so folgt $D = \pm 2$. Wählen wir, was ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit geschehen kann, das obere Zeichen, so folgt

$$v = \sqrt{\frac{5}{12}} \pm i\sqrt{\frac{7}{12}}.$$

Mit diesem Werthe von v verificiren wir, dass in der That $(E_4 X)^3 = 1$ ist. Demnach erhalten wir, indem wir nun $X = E_5$ nehmen, folgende quaternäre

$$C_{\frac{1}{2}7!}.$$

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
$\varrho z_1' =$	εz_1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(z_1 + \sqrt{2} z_4)$	$\nu_1 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3} z_3 + i\sqrt{2} z_4)$	$\varrho_1 z_3$
(110) $\varrho z_2' =$	εz_2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(z_2 + \sqrt{2} z_3)$	$\nu_2 z_3$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(-i\sqrt{2} z_3 - \sqrt{3} z_4)$	$-\varrho_2 z_4$
$\varrho z_3' =$	$\varepsilon^2 z_3$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_2 - z_3)$	$\nu_1 z_2$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3} z_1 + i\sqrt{2} z_2)$	$\varrho_2 z_1$
$\varrho z_4' =$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_1 - z_4)$	$\nu_2 z_1$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(-i\sqrt{2} z_1 - \sqrt{3} z_2)$	$-\varrho_1 z_2$,

$E_1 = (123)$, $E_2 = (12)(34)$, $E_3 = (12)(45)$, $E_4 = (12)(56)$, $E_5 = (12)(67)$,

wo $\varrho_1 = \sqrt{\frac{5}{12}} + i\sqrt{\frac{7}{12}}$, $\varrho_2 = \sqrt{\frac{5}{12}} - i\sqrt{\frac{7}{12}}$, und ν_1, ν_2 in (96) gegeben sind. Ob ϱ_1 oder ϱ_2 für v genommen wird, ist gleichgültig; durch die Transformation $y_1 = -z_3$, $y_2 = -z_4$, $y_3 = z_1$, $y_4 = z_2$ gehen nämlich E_2, E_3, E_4 in sich über, E_1 in E_1^2, welches indessen statt E_1 genommen werden kann, während in E_5 ϱ_1 und ϱ_2 mit einander vertauscht werden.

Herr Klein hat aus der Liniengeometrie die Existenz einer quaternären $C_{\frac{1}{2}7!}$ gefolgert, und diese Gruppe durch zwei Erzeugende S und T', worin S eine Collineation, T' dagegen eine dualistische Transformation bedeutet, in der Weise definirt, dass verabredet wird, nur diejenigen Operationen beizubehalten, an denen T' eine gerade Anzahl von Malen betheiligt ist*). In der isomorphen Buchstabenvertauschungsgruppe (d. i. bei Klein die Vertauschungsgruppe der überzähligen Liniencoordinaten $x_0, x_1, \ldots x_6$) ist $S = (0123456)$ und $T' = (34)$ (l. c. pag. 519). Berechnet man hieraus, oder besser direct mittelst der Klein'schen Methode, die Collineation $W = (356)$, welche, wie man aus den Buchstabenvertauschungen sieht mit S zusammen die alternirende $C_{\frac{1}{2}7!}$ erzeugt, so findet man folgende

$C_{\frac{1}{2}7!}$**)

	S	W
$\varrho z_1' =$	z_1	$\frac{1}{\sqrt{-7}}(\alpha^2 z_1 + z_2 + z_3 + z_4)$
$\varrho z_2' =$	γz_2	$\frac{1}{\sqrt{-7}}(z_1 - \alpha z_2 - \beta z_3 - \alpha z_4)$
$\varrho z_3' =$	$\gamma^4 z_3$	$\frac{1}{\sqrt{-7}}(z_1 - \alpha z_2 - \alpha z_3 - \beta z_4)$
$\varrho z_4' =$	$\gamma^2 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{-7}}(z_1 - \beta z_2 - \alpha z_3 - \alpha z_4)$,

$$S = (0123456), \quad W = (356),$$

$$\gamma = e^{\frac{2\pi i}{7}}, \quad \alpha = \gamma + \gamma^2 + \gamma^4 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-7},$$

$$\beta = \gamma^6 + \gamma^5 + \gamma^3 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-7},$$

*) F. Klein, Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades. Math. Annalen, Bd. 28.

**) Diese Formeln wurden von mir dem internationalen Mathematiker-Congress zu Chicago, 1893 vorgelegt. Die in meiner Arbeit „The Invariants of a Group of 2.168 Linear Quaternary Substitutions", Math. Papers read at the Internat. Math. Congress at Chicago 1893, New York, Macmillan and Co. 1896, p. 175, zu Grunde gelegten Substitutionen S, T, Q können, mit geringfügiger Abänderung der obigen Gruppe entnommen werden, und zwar ist $T = (356)(421)$, $Q = (12)(36)$.

Da es, wie bewiesen, nur eine $C_{\frac{1}{2}7!}$ giebt, so muss die soeben definirte Gruppe auf die Gruppe (110) transformirbar sein.

Um jetzt die vorliegende $C_{\frac{1}{2}7!}$ zu erweitern, müsste zunächst das in (109) gegebene X so bestimmt werden, dass $(E_4 X)^2 = 1$. Hieraus würde folgen $v + \bar{v} = 0$, also $v = i$. Die so erhaltene Collineation X ergiebt aber mit E_5 combinirt eine Collineation $E_5 X$, für welche $D = 2i(\varrho_2 - \varrho_1)$ ist. Demnach kann die Periode von $E_5 X$ weder 3 noch 2 sein. *Die Existenz einer quaternären $C_{\frac{1}{2}8!}$ ist somit ausgeschlossen.*

§ 13.

Die quaternären symmetrischen Gruppen.

Nach dem Vorhergehenden ist es nun leicht, die symmetrischen Gruppen herzustellen. Was zunächst die $C_{3!}$ anbetrifft, so haben wir mit E_1 und E_1' (52) je eine Collineation F zu combiniren, so dass $F^2 = 1$, $(E_1 F)^2 = 1$, resp. $(E_1' F)^2 = 1$ wird. Nach den in § 9 über die Collineationen der Periode 2, welche vom Typus II (44) sind, gemachten Bemerkungen, kann man für F hier eine derartige Collineation ansetzen, falls man für E_1 die in (52) so bezeichnete Collineation nimmt. Die so erhaltene Gruppe lässt sich leicht auf folgende Form transformiren.

$C_{3!}$ I

$$(111)\quad \begin{aligned} E_1 &= (123): \varrho z_1' = z_1, \quad \varrho z_2' = z_2, \quad \varrho z_3' = \varepsilon z_3, \quad \varrho z_4' = \varepsilon^2 z_4, \\ F &= (12)\ \ : \varrho z_1' = \omega z_1, \ \varrho z_2' = \omega z_2, \ \varrho z_3' = \omega z_4, \ \varrho z_4' = \omega z_3, \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Eine weitere $C_{3!}$ ergiebt sich, wenn man für F die in (72) angegebene Form nimmt. Durch Transformation erhält man

$C_{3!}$ II

$$(112)\quad \begin{aligned} E_1 &= (123): \varrho z_1' = z_1, \ \varrho z_2' = z_2, \ \varrho z_3' = \varepsilon z_3, \ \varrho z_4' = \varepsilon^2 z_4, \\ F &= (12)\ \ : \varrho z_1' = z_1, \ \varrho z_2' = -z_2, \ \varrho z_3' = z_4, \ \varrho z_4' = z_3, \end{aligned}$$

Die Collineation E_1' (52) endlich wird in allgemeinster Weise erweitert, wenn man F in der Form (86) ansetzt. Man transformirt leicht auf folgende Form

$C_{3!}$ III

$$(113)\quad \begin{aligned} E_1 &= (123): \varrho z_1' = \varepsilon z_1, \ \varrho z_2' = \varepsilon z_2, \ \varrho z_3' = \varepsilon^2 z_3, \ \varrho z_4' = \varepsilon^2 z_4, \\ F &= (12)\ \ : \varrho z_1' = z_4, \ \varrho z_4' = z_3, \ \varrho z_3' = z_2, \ \varrho z_4' = z_1. \end{aligned}$$

Aus den Tetraedergruppen I, II, III ergeben sich nach unserer allgemeinen Methode die Octaedergruppen.

Das Tetraeder I (59) wird, wie in § 11 gezeigt, durch die dort angegebene Collineation (98) und durch keine andere vom Typus I zum Octaeder erweitert. Somit ergiebt sich

Octaeder I

(114)

	$E_1 = (123)$	$E_2 = (12)(34)$	$F = (12)$
$\varrho z_1' =$	z_1	z_1	z_1
$\varrho z_2' =$	z_2	$\frac{1}{3}(-z_2 + 2z_3 + 2z_4)$	$-z_2$
$\varrho z_3' =$	εz_3	$\frac{1}{3}(2z_2 - z_3 + 2z_4)$	$-z_4$
$\varrho z_4' =$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{3}(2z_2 + 2z_3 - z_4)$	$-z_3$.

Diese Gruppe geht durch die Transformation (60) in folgende über

(115)

	E_1	E_2	F
$\varrho x_1' =$	x_1	x_2	$\frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$
$\varrho x_2' =$	x_3	x_1	$\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 - x_4)$
$\varrho x_3' =$	x_4	x_4	$\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 - x_4)$
$\varrho x_4' =$	x_2	x_3	$\frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 + x_4)$.

Dasselbe Tetraeder kann aber auch vermittelst einer Collineation der Periode 2 vom Typus II erweitert werden. Man findet leicht, dass sich diese Collineation eindeutig bestimmt, und mit der in (111) mit F F bezeichneten identisch ausfällt. Demnach erhält man folgendes

Octaeder II

(116) $\qquad E_1 = (123), \quad E_2 = (12)(34), \quad F = (12),$

wo E_1, E_2 in (114), F in (111) gegeben ist. Durch die Transformation der (60) geht die Gruppe in folgende einfache Form über

	E_1	E_2	F
$\varrho x_1' =$	x_1	x_2	ωx_1
$\varrho x_2' =$	x_3	x_1	ωx_2
$\varrho x_3' =$	x_4	x_4	ωx_4
$\varrho x_4' =$	x_2	x_3	ωx_3 .

Da im Octaeder I keine Collineationen vom Typus II vorhanden sind, lässt sich II nicht auf I transformiren.

Gehen wir nun vom Tetraeder II (64) aus, so ist in § 11 gezeigt, dass die allgemeinste Collineation F von der Periode 2 und vom Typus I welche mit E_1 und E_2 combinirt, die Periode 2 ergiebt, von der Form (99) sein muss. Durch geeignete p-Transformation lässt sich hier u reell und positiv machen, so dass F die in (100) mit E_4 bezeichnete Form annimmt. Wir haben demnach folgendes

Octaeder III

$$E_1 = (123), \quad E_2 = (12)(34), \quad F = (12) = E_4, \tag{117}$$

wo E_1, E_2, E_4 in (100) resp. (125) gegeben sind.

Eine Erweiterung des Tetraeders II durch eine Collineation vom Typus II (44) erweist sich, wie eine leichte Rechnung zeigt, als unmöglich.

Um endlich das Tetraeder III zum Octaeder zu erweitern, haben wir mit E_1 und E_2 (69) eine Collineation F zu verbinden, welche zunächst von der Form (86) sein muss. Wie mittelst (88) gezeigt, lässt sich bewirken, dass E_1 und E_2 ungeändert bleiben, in (86) dagegen $v = 0$ wird. Andererseits muss F in Folge der zur Formel (101) führenden Erörterungen von der Form (101) sein. Also können wir für F (101) mit $v = 0$ ansetzen. Für die Grössen α und β ergeben sich die zwei Möglichkeiten $\alpha = \beta = 1$, oder $\alpha = 1$, $\beta = -1$. Mithin erhalten wir zwei neue Octaeder, nämlich:

Octaeder IV

(118)

	$E_1 = (123)$	$E_2 = (12)(34)$	$F = (12)$
$\varrho z_1' =$	εz_1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(z_1 + \sqrt{2} z_4)$	z_4
$\varrho z_2' =$	εz_2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(z_2 + \sqrt{2} z_3)$	$-z_3$
$\varrho z_3' =$	$\varepsilon^2 z_3$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_2 - z_3)$	z_2
$\varrho z_4' =$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2} z_1 - z_4)$	$-z_1$.

und Octaeder V

$$E_1 = (123), \quad E_2 = (12)(34), \quad F' = (12), \tag{119}$$

wo E_1 und E_2 in (118) gegeben sind, während für F':

$$\varrho z_1' = z_4, \quad \varrho z_2' = z_3, \quad \varrho z_3' = -z_2, \quad \varrho z_4' = -z_1$$

zu nehmen ist. Dass diese Octaeder wesentlich von einander verschieden sind, folgt, wenn man die Diagonalsummen der Collineationen $E_2 E_1 F$ und $E_2 E_1 F'$ bildet, welche der Buchstabenvertauschung (1342) entsprechen. Man erhält im ersten Falle $D = 0$, im zweiten $D = -2i\sqrt{2}$.

Von der im Tetraeder III enthaltenen Collineation E_1 ist bekannt, dass sie mit einer Collineation vom Typus II combinirt nicht die Periode 2 ergeben kann. Also lassen sich keine weiteren Octaedergruppen ableiten.

Wir kommen nun zu den symmetrischen $C_{5!}$. Wie in § 11 gezeigt, lassen sich die Ikosaeder I und II durch eine Collineation vom Typus I nicht zur $C_{5!}$ erweitern. Was nun Collineationen vom Typus II anbetrifft, so ist soeben bewiesen worden, dass die einzige derartige Collineation, welche das in beiden Ikosaedergruppen enthaltene Tetraeder I zum Octaeder erweitert, durch F in (111) gegeben ist. Combinirt man nun dieses F mit der im Ikosaeder I enthaltenen Collineation E_3 (77), so zeigt sich sofort, dass $E_3 F$ nicht von der Periode 2 ist. Dagegen liefert $E_3 F$, wenn man E_3 aus dem Ikosaeder II (80) entnimmt, die Periode 2. Somit ergiebt sich folgende

$C_{5!}$ I

(120) $E_1 = (123), \quad E_2 = (12)(34), \quad E_3 = (12)(45), \quad F = (12)$,

wo E_1, E_2, E_3 aus (80), F aus (111) zu entnehmen ist. Durch die Transformation (60) erhält man die Gruppe in folgender Form

(121)

	E_1	E_2	E_3	F
$\varrho x_1' =$	x_1	x_2	$\frac{1}{2}(x_1 + ix_2 + ix_3 + ix_4)$	ωx_1
$\varrho x_2' =$	x_3	x_1	$\frac{1}{2}(-ix_1 + x_2 - x_3 - x_4)$	ωx_2
$\sigma x_3' =$	x_4	x_4	$\frac{1}{2}(-ix_1 - x_2 - x_3 + x_4)$	ωx_4
$\sigma x_4' =$	x_2	x_3	$\frac{1}{2}(-ix_1 - x_2 + x_3 - x_4)$	ωx_3

.

Da die Tetraeder II und III, wie bereits gezeigt, durch eine Collineation vom Typus II nicht erweitert werden können, so kommen für die Erweiterung der Ikosaeder III, IV, V nur Collineationen vom Typus I in Betracht.

Die Erweiterung des Ikosaeders III führt eindeutig, wie im Anfange von § 12 bewiesen, zur Collineation (108). Wir haben demnach folgende

$C_{5!}$ II

(122) $E_1 = (123)$, $E_2 = (12)(34)$, $E_3 = (12)(45)$, $F = (12)$,

wo E_1, E_2, E_3 aus (84), F aus (108) zu entnehmen sind.

In § 11 ist bewiesen worden, dass das Ikosaeder IV durch Hinzunahme einer Collineation vom Typus I nicht zur $C_{5!}$ erweitert werden kann.

Was endlich die Erweiterung des Ikosaeders V anbetrifft, so ist in § 12 gezeigt, dass die allgemeinste Collineation der Periode 2 welche mit E_1, E_2, E_3 (95) combinirt wiederum die Periode 2 ergiebt, von der Form (109) sein muss. Hier lässt sich durch p-Transformation noch $v = 1$ machen, und man erhält folgende

$C_{5!}$ III

(123) $E_1 = (123)$, $E_2 = (12)(34)$, $E_3 = (12)(45)$, $F = (12)$,

wo E_1, E_2, E_3 aus (95) und F aus (118) zu entnehmen sind.

Wir kommen endlich zu den symmetrischen $C_{6!}$. Wie im Anfange von § 12 gezeigt wurde, lässt sich die $C_{\frac{1}{2}6!}$ I eindeutig durch Hinzunahme von (108) zur $C_{6!}$ erweitern. Wir erhalten demnach folgende:

$C_{6!}$ I

		$E_1 = (123)$	$E_2 = (12)(34)$	$E_3 = (12)(45)$	$E_4 = (12)(56)$	$F = (12)$
	$\varrho z_1' =$	z_1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(z_1 + \sqrt{2}\, z_4)$	$\frac{1}{2}(\sqrt{3}\, z_1 + z_2)$	z_2	z_2
(124)	$\varrho z_2' =$	z_2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(-z_2 + \sqrt{2}\, z_3)$	$\frac{1}{2}(z_1 - \sqrt{3}\, z_2)$	z_1	$-z_1$
	$\varrho z_3' =$	εz_3	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\, z_2 + z_3)$	z_4	$-z_4$	z_4
	$\varrho z_4' =$	$\varepsilon^2 z_4$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\, z_1 - z_4)$	z_3	$-z_3$	$-z_3$.

Diese Gruppe geht durch die Tranformation (65) in folgende Form über

		E_1	E_2	E_3	E_4	F
	$\varrho x_1' =$	x_1	$-x_2$	$\frac{1}{2}(x_1 - i x_2 - i x_3 - i x_4)$	$-x_1$	$\frac{1}{\sqrt{-3}}(x_2 + x_3 + x_4)$
(125)	$\varrho x_2' =$	x_3	x_1	$\frac{1}{2}(i x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$	x_2	$\frac{1}{\sqrt{-3}}(x_1 + x_3 - x_4)$
	$\varrho x_3' =$	x_4	$-x_4$	$\frac{1}{2}(i x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$	x_4	$\frac{1}{\sqrt{-3}}(x_1 + x_2 - x_3)$
	$\varrho x_4' =$	x_2	x_3	$\frac{1}{2}(i x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$	x_3	$\frac{1}{\sqrt{-3}}(x_1 - x_2 + x_4)$.

Auch die $C_{\frac{1}{2}6!}$ II (105) lässt sich auf eine $C_{6!}$ erweitern, und zwar wiederum nur auf eine Weise. Bestimmt man zu dem Zwecke in der für X in (109) gegebenen Form v so, dass $E_4 X$ die Periode 2 liefert, so erhält man $v + \bar{v} = 0$, also $v = i$. Indem wir dann noch den Factor i in den Proportionalitätsfactor ϱ mit aufnehmen, ergiebt sich für X, das wir nunmehr für F nehmen können

$$(126) \quad F: \varrho z_1' = z_3, \quad \varrho z_2' = z_4, \quad \varrho z_3' = -z_1, \quad \varrho z_4' = -z_2,$$

und somit erhalten wir

$$C_{6!} \text{ II}$$

$$(127) \quad E_1 = (123),\ E_2 = (12)(34),\ E_3 = (12)(45),\ E_4 = (12)(56),\ F = (12)$$

wo E_1, E_2, E_3, E_4 in (105), F in (126) gegeben ist.

Die so erhaltene $C_{6!}$ II bildet indessen keine neue Gruppe, sondern lässt sich aus der $C_{6!}$ I (124) durch Transformation erhalten. Der Beweis hierfür kann analog wieder für die Transformirbarkeit der $C_{\frac{1}{2}6!}$ I in die $C_{\frac{1}{2}6!}$ II geführt werden, wenn man zu den Relationen (106) noch hinzunimmt

$$G = (15)(24)(36).$$

Dieses G liefert in der That mit F_1, F_2, F_3, F_4 combinirt je die Periode 2, und spielt also in Bezug auf $F_1, \dots F_4$ dieselbe Rolle, wie F in Bezug auf E_1, E_2, E_3, E_4.

Herr Klein hat in der bereits genannten Arbeit über Gleichungen sechsten und siebenten Grades auch eine quaternäre $C_{6!}$ aufgestellt, und zwar in vollständiger Form*). Die Klein'sche Gruppe muss sich demnach auf jede der beiden Gruppen $C_{6!}$ I und $C_{6!}$ II transformiren lassen.

Weitere symmetrische quaternäre Collineationsgruppen können nicht existiren. In der That ist eine Erweiterung der $C_{\frac{1}{2}7!}$ auf $C_{7!}$ nach den Schlussbemerkungen des § 12 unmöglich.

§ 14.

Resultate für quaternäre Gruppen.

Das Resultat der vorausgegangenen Untersuchung über quaternäre Gruppen lässt sich demnach in folgendem Satz zusammenfassen:

Jede quaternäre Collineationsgruppe $C_{\frac{1}{2}k!}$, $C_{k!}$, *welche einer alternirenden oder symmetrischen Buchstabenvertauschungsgruppe von* k *Buchstaben* ($k > 2$) *holoedrisch isomorph ist, lässt sich auf eine der folgenden Collineationsgruppen linear transformiren:*

*) l. c. pag. 519, Formel (40) und (41).

Drei	$C_{\frac{1}{2}3!}$		durch ihre Erzeugenden definirt in (52),
Drei	$C_{\frac{1}{2}4!}$	(Tetraeder)	„ „ „ „ „ (59), (64), (69),
Fünf	$C_{\frac{1}{2}5!}$	(Ikosaeder)	„ „ „ „ „ (77), (80), (84), (94), (95),
Eine	$C_{\frac{1}{2}6!}$		„ „ „ „ „ (100) oder (105),
Eine	$C_{\frac{1}{2}7!}$		„ „ „ „ „ (110),
Drei	$C_{3!}$		„ „ „ „ „ (111), (112), (113),
Fünf	$C_{4!}$	(Oktaeder)	„ „ „ „ „ (114), (116), (117), (118), (119),
Drei	$C_{5!}$		„ „ „ „ „ (120), (122), (123),
Eine	$C_{6!}$		„ „ „ „ „ (124) oder (127).

Die 25 hier aufgezählten quaternären Collineationsgruppen sind sämmtlich von einander wesentlich verschieden, d. h. es lassen sich keine zwei von ihnen in einander linear transformiren.

University of Chicago, November 1897.