

# Propriétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume.

Par

L. LINDELÖF à HELSINGFORS.

(Extrait d'un mémoire présenté à l'Académie Imp. des Sciences de St. Pétersbourg).

Soit  $U$  la surface et  $V$  le volume d'un polyèdre convexe. D'un point fixe  $O$ , pris dans son intérieur, abaissons des perpendiculaires  $p, q, r, \dots$  sur toutes les faces  $A, B, C, \dots$  du polyèdre. Désignons par  $a_1, a_2, a_3, \dots$  les arêtes qui forment le polygone  $A$  et par  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  les angles dièdres correspondants. Pour la face  $B$  ces mêmes quantités seront désignées par  $b_1, b_2, b_3, \dots$  et  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ ; pour la face  $C$  par  $c_1, c_2, c_3, \dots$  et  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$  et ainsi de suite. Cela posé, concevons que le plan du polygone  $A$  se déplace parallèlement à lui-même, de sorte que la distance  $p$  reçoive un accroissement infiniment petit  $dp$ ; l'accroissement correspondant du volume  $V$  sera évidemment  $Adp$  et celui de la surface totale  $U$

$$(a_1 \cot \frac{\alpha_1}{2} + a_2 \cot \frac{\alpha_2}{2} + a_3 \cot \frac{\alpha_3}{2} + \dots) dp = dp \cdot \Sigma a \cot \frac{\alpha}{2},$$

la sommation s'étendant au contour entier du polygone  $A$ . On trouve des expressions analogues pour les accroissements de  $V$  et  $U$  que produirait un déplacement parallèle et infiniment petit de la face  $B$  ou d'une autre face quelconque, de sorte que, si toutes les perpendiculaires  $p, q, r, \dots$  étaient variables de longueur, leurs directions étant constantes, les différentielles totales de  $V$  et  $U$  seraient

$$(1) \quad dV = Adp + Bdq + Cdr + \dots$$

$$(2) \quad dU = dp \cdot \Sigma a \cot \frac{\alpha}{2} + dq \cdot \Sigma b \cot \frac{\beta}{2} + dr \cdot \Sigma c \cot \frac{\gamma}{2} + \dots$$

Pour en tirer les valeurs de  $U$  et  $V$  en termes finis, on peut supposer la dilatation du polyèdre uniforme ou telle que les perpendiculaires  $p, q, r, \dots$  croissent toutes en même proportion. On aura alors

$$\frac{dV}{3V} = \frac{dU}{2U} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} = \frac{dr}{r} = \dots$$

et il sera permis de remplacer, dans les équations précédentes, les différentielles  $dV$ ,  $dU$ ,  $dp$ ,  $dq$ ,  $dr$ , ... par les quantités proportionnelles  $3V$ ,  $2U$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , ... ce qui conduit immédiatement aux formules

$$(3) \quad 3V = Ap + Bq + Cr + \dots$$

$$(4) \quad 2U = p \Sigma a \cot \frac{\alpha}{2} + q \Sigma b \cot \frac{\beta}{2} + r \Sigma c \cot \frac{\gamma}{2} + \dots,$$

dont la première est bien connue, tandis que la seconde renferme une expression nouvelle de l'aire totale d'un polyèdre.

Pour en venir à l'objet de notre recherche, nous admettons d'abord qu'on ait fixé le nombre et les inclinaisons mutuelles des faces d'un polyèdre convexe ou, ce qui revient au même, les directions des perpendiculaires  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , ... et qu'on veuille déterminer les conditions nécessaires pour que le volume  $V$  soit maximum, la surface totale  $U$  étant donnée. Elles sont contenues dans les équations simultanées  $dV = 0$ ,  $dU = 0$ , qui deviennent, en prenant  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , ... pour variables principales,

$$0 = Adp + Bdq + Cdr + \dots$$

$$0 = \Sigma \left( a \cot \frac{\alpha}{2} \right) dp + \Sigma \left( b \cot \frac{\beta}{2} \right) dq + \Sigma \left( c \cot \frac{\gamma}{2} \right) dr + \dots;$$

et comme la première équation doit avoir lieu pour toutes les valeurs de  $dp$ ,  $dq$ ,  $dr$ , ... qui satisfont à la seconde, il faut que les coefficients soient proportionnels, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{A}{\Sigma a \cot \frac{\alpha}{2}} = \frac{B}{\Sigma b \cot \frac{\beta}{2}} = \frac{C}{\Sigma c \cot \frac{\gamma}{2}} = \dots = \frac{3V}{2U}.$$

La dernière fraction est obtenue en ajoutant les numérateurs et les dénominateurs de celles qui précèdent, après avoir multiplié les deux termes de la première fraction par  $p$ , ceux de la seconde par  $q$ , etc. En faisant

$$R = \frac{3V}{U},$$

on aura donc

$$(5) \quad \begin{aligned} 2A &= R \Sigma a \cot \frac{\alpha}{2} \\ 2B &= R \Sigma b \cot \frac{\beta}{2} \\ 2C &= R \Sigma c \cot \frac{\gamma}{2} \\ &\dots \end{aligned}$$

Ainsi, dans le cas du maximum d'un polyèdre, une face quelconque est proportionnelle à la somme de ses arêtes multipliées chacune par la cotangente du demi-angle dièdre correspondant.

On peut exprimer ce résultat sous une autre forme plus simple.

simple. Considérons une face particulière  $A$  et concevons une sphère inscrite à la fois dans les trois angles dièdres consécutifs  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , et tangente, par conséquent, aux quatre faces contiguës à l'arête  $a_2$ . A chacune des arêtes  $a_1, a_2, a_3, \dots$  correspond ainsi une sphère inscrite déterminée; nous désignons respectivement par  $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots$  les rayons de ces sphères.

Soit  $P$  un point quelconque pris dans le plan du polygone  $A$  et  $h_1, h_2, h_3, \dots$  les perpendiculaires abaissées de ce point sur les droites  $a_1, a_2, a_3, \dots$ . Si l'on convient de regarder chacune de ces perpendiculaires comme positive ou négative, suivant qu'elle tombe du même côté que le polygone ou du côté opposé de la droite correspondante, on aura dans tous les cas

$$(6) \quad 2A = a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 + \dots$$

Supposons maintenant que la droite  $a_2$  se déplace parallèlement à elle-même de manière que la perpendiculaire  $h_2$  reçoive un accroissement infiniment petit  $dh_2$ , les trois arêtes  $a_1, a_2, a_3$  ainsi que la surface  $A$  seront variables, tandis que les autres arêtes et perpendiculaires resteront constantes, et l'on trouve, en prenant la différentielle sous ce point de vue,

$$2dA = a_2 dh_2 + h_1 da_1 + h_2 da_2 + h_3 da_3.$$

Mais l'on a aussi évidemment  $dA = a_2 dh_2$ ; notre formule se réduit donc à

$$dA = h_1 da_1 + h_2 da_2 + h_3 da_3.$$

Cette équation ayant lieu quel que soit le point  $P$ , il est permis de substituer aux perpendiculaires  $h_1, h_2, h_3$  les valeurs particulières qu'elles prendraient, si le point  $P$  coïncidait avec le point de contact de la sphère inscrite correspondante à l'arête  $a_2$ . Ces valeurs sont

$$h_1 = \varrho_2 \cot \frac{\alpha_1}{2}, \quad h_2 = \varrho_2 \cot \frac{\alpha_2}{2}, \quad h_3 = \varrho_2 \cot \frac{\alpha_3}{2},$$

et l'on aura par conséquent aussi

$$dA = \varrho_2 \left( \cot \frac{\alpha_1}{2} da_1 + \cot \frac{\alpha_2}{2} da_2 + \cot \frac{\alpha_3}{2} da_3 \right)$$

ou bien, en mettant pour  $dA$  sa valeur  $a_2 dh_2$ , et supposant que les angles  $\alpha$  restent constants,

$$d \Sigma a \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{a_2}{\varrho_2} dh_2.$$

Telle est la différentielle de la somme  $\Sigma a \cot \frac{\alpha}{2}$  prise par rapport à  $h_2$  comme seule variable indépendante. Mais si toutes les perpendiculaires  $h_1, h_2, h_3, \dots$  venaient à varier simultanément par un déplacement parallèle de tous les côtés du polygone  $A$ , l'expression précédente acquerrait d'autres termes de la même forme, et la différentielle totale de  $\Sigma$  serait

$$\cot \frac{\alpha_1}{2} da_1 + \cot \frac{\alpha_2}{2} da_2 + \dots = \frac{a_1}{\varrho_1} dh_1 + \frac{a_2}{\varrho_2} dh_2 + \dots$$

En supposant la dilatation du polygone uniforme, ou telle qu'on ait

$$\frac{da_1}{a_1} = \frac{da_2}{a_2} = \dots = \frac{dh_1}{h_1} = \frac{dh_2}{h_2} = \dots$$

on en déduit la relation

$$a_1 \cot \frac{\alpha_1}{2} + a_2 \cot \frac{\alpha_2}{2} + \dots = \frac{a_1}{\varrho_1} h_1 + \frac{a_2}{\varrho_2} h_2 + \dots$$

que nous écrivons plus simplement

$$(7) \quad \Sigma a \cot \frac{\alpha}{2} = \Sigma \frac{ah}{\varrho},$$

la somme  $\Sigma$  étant relative au contour entier du polygone  $A$ .

Reprenons maintenant la première des équations (5) et mettons y les valeurs trouvées dans les formules (6) et (7); nous aurons

$$\Sigma ah = R \Sigma \frac{ah}{\varrho},$$

ou en développant et transposant

$$\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{R}\right) a_1 h_1 + \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{R}\right) a_2 h_2 + \left(\frac{1}{\varrho_3} - \frac{1}{R}\right) a_3 h_3 + \dots = 0,$$

ce que nous désignons, en abrégant l'écriture, par

$$(8) \quad \Sigma \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R}\right) ah = 0.$$

Telle est en définitive la condition à laquelle chacune des faces doit satisfaire séparément pour que le polyèdre soit maximum, et cela quelle que soit, dans le plan que l'on considère, l'origine des perpendiculaires  $h$ .

Cette condition est évidemment remplie lorsque le polyèdre est circonscrit à une sphère, puisque  $R$  signifie alors le rayon de cette sphère, et que toutes les sphères particulières correspondantes aux différentes arêtes d'une face quelconque coïncident avec celle-ci, de sorte qu'on aura constamment  $\varrho = R$ . Mais il s'agit de démontrer réciproquement que si la condition (8) est remplie pour chacune des faces, le polyèdre est nécessairement circonscrit à une sphère.

A cet effet nous considérons de nouveau une face particulière  $A$  formée par un nombre d'arêtes quelconque. Pour chacune de ces arêtes la différence  $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R}$  a une valeur déterminée, qui peut être positive ou négative, si elle n'est pas nulle. Supposons qu'on marque sur chaque arête le signe correspondant de la différence dont il s'agit, et examinons les dispositions que peuvent présenter ces signes.

Si l'on prend l'origine  $P$  des perpendiculaires  $h$  dans l'intérieur du polygone  $A$ , toutes ces perpendiculaires et par conséquent aussi les produits  $ah$  seront positifs. Il en résulte que si la différence

$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}$  n'est pas nulle sur le contour entier du polygone, elle sera positive pour quelque côté et négative pour quelque autre, puisque sans cela la somme  $\sum \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}\right) ah$  ne saurait être nulle. Ajoutons qu'il existe alors au moins deux côtés affectés du signe  $+$  et deux autres marqués du signe  $-$ . Car s'il n'y avait qu'un seul côté portant un certain signe, il suffirait de placer le point  $P$  sur ce côté même pour prouver que l'équation (8) serait alors impossible.

Je dis de plus que les signes des différents côtés doivent alterner de manière à présenter au moins quatre variations, en faisant le tour du polygone. En effet, s'il n'y avait que deux suites de signes, de sorte que toutes les arêtes marquées du signe  $+$  se trouveraient d'un côté d'une certaine diagonale et toutes celles marquées du signe  $-$  de l'autre, il suffirait de placer l'origine  $P$  au point de rencontre des deux arêtes extrêmes soit de la suite positive, soit de la suite négative, pour faire prendre le même signe à tous les termes de l'équation (8). Cette démonstration n'est jamais en défaut, puisque, le polygone étant convexe, il est impossible que les deux couples d'arêtes dont il s'agit, soient parallèles à la fois.

Il est donc bien prouvé que si la différence  $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}$  n'est pas nulle pour toutes les arêtes d'une face, elle offrira sur son contour au moins quatre variations de signe.

De là on peut conclure immédiatement: 1° que la différence dont il s'agit, est nécessairement nulle pour toutes les arêtes d'une face triangulaire, puisqu'il faudrait autrement que les trois côtés présentassent quatre variations de signe, ce qui est absurde; 2° que si cette différence est nulle pour un côté d'une face tétragonale, elle est nulle sur son contour entier; 3° qu'elle est nulle pour toutes les arêtes d'une face pentagonale, aussitôt qu'elle s'évanouit pour deux d'entre elles. En général, on peut affirmer que la quantité  $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}$  est nulle le long du contour d'une face de  $m$  côtés, quand on sait seulement qu'elle s'évanouit pour  $m - 3$  côtés particuliers.

Mais il faut démontrer que cette quantité est nécessairement nulle pour toutes les arêtes d'une face quelconque du polyèdre maximum. Pour cela, il est utile de faire, avant tout, la distinction suivante.

Lorsqu'un sommet ou angle solide est formé par trois plans, nous dirons qu'il est *simple*; nous l'appellerons *double*, s'il est formé par quatre plans, *triple*, s'il est formé par cinq plans, etc. En général nous regardons le degré de multiplicité d'un angle solide comme inférieur de deux unités au nombre des plans qui concourent à sa formation. Cela convenu, il peut arriver, suivant la disposition des plans

limites, que tous les sommets du polyèdre maximum soient simples, ou bien qu'il existe aussi des sommets multiples. Dans le premier cas il n'y a jamais qu'une seule valeur de  $\varrho$  correspondante à une arête donnée, tandis que, dans le second,  $\varrho$  pourrait avoir des valeurs différentes pour cette même arête dans les deux faces auxquelles elle appartient. C'est pourquoi il convient de traiter séparément ces deux cas.

I. *Cas où il n'y a que des sommets simples.* — Suivant la remarque que nous venons de faire la quantité  $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R}$  ne peut avoir, dans le cas actuel, qu'une seule valeur pour chaque arête du polyèdre. Si elle n'est pas constamment nulle, il existera un certain nombre d'arêtes pour lesquelles cette quantité sera essentiellement positive ou négative et qui seront, par conséquent, affectées de signes déterminés + ou —. De telles arêtes peuvent entrer dans le contour de chaque face ou dans celui de quelques faces seulement.

Examinons d'abord la première hypothèse, par laquelle il est admis que chaque face contienne dans son périmètre quelque arête marquée d'un certain signe. Comme nous l'avons vu, l'existence d'une seule arête de cette espèce entraîne celle de plusieurs autres, de sorte que chaque face doit alors présenter au moins quatre variations de signe. Désignons par  $s$  le nombre des sommets du polyèdre, par  $f$  le nombre des faces et par  $k$  celui des arêtes; d'après le théorème d'Euler, ces nombres seront liés entre eux par la relation

$$s + f = k + 2,$$

et comme tous les sommets sont simples ou formés par trois plans, on aura en outre

$$3s = 2k,$$

d'où il résulte

$$(9) \quad \begin{cases} s = \frac{2}{3} k, \\ f = \frac{1}{3} k + 2. \end{cases}$$

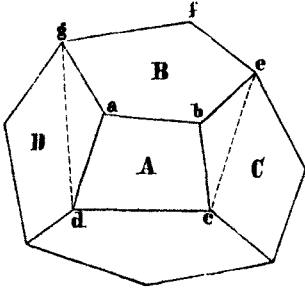
Soit  $v$  le nombre total des variations qu'on observe en faisant le tour de toutes les faces du polyèdre, après avoir donné une signe arbitraire à chacune des arêtes qui n'en portent aucun. Le même nombre doit s'obtenir évidemment en comptant les variations autour des angles solides. Or chaque angle solide ne peut présenter, sur les trois arêtes dont il est formé, que deux variations tout au plus. On aura donc à la fois  $v > 4f$  et  $v < 2s$ , c'est à dire

$$v > \frac{4}{3} k + 8 \quad \text{et} \quad v < \frac{4}{3} k,$$

ce qui implique une contradiction évidente. Donc il est impossible

que toutes les faces contiennent des arêtes pour lesquelles la quantité  $\frac{1}{e} - \frac{1}{R}$  soit différente de zéro.

Voyons maintenant si cette quantité peut se réduire à zéro le long du contour de certaines faces sans être nulle pour toutes les arêtes du polyèdre.



Soit  $A = abcd$  (voir la figure ci-jointe) une des faces dont les arêtes ne portent aucun signe, et  $B = abefg$  une face adjacente. Imaginons qu'on supprime l'arête  $ab$  commune à ces faces et qu'on redresse les lignes brisées  $dag$  et  $cbe$  en leur substituant les nouvelles arêtes rectilignes  $dg$  et  $ce$ , auxquelles on donnera les signes des arêtes supprimées  $ag$  et  $be$ . Par là les deux faces  $A$  et  $B$  se réuniront en

un seul polygone gauche  $cefgd$ , dont le contour présentera exactement le même nombre de variations de signe que ceux des deux faces  $A$  et  $B$  ensemble. Quant aux autres faces adjacentes  $C$  et  $D$ , chacune d'elles offrira autant de variations après qu'avant cette transformation, de manière que le nombre total des variations n'aura subi aucun changement. En continuant ce procédé, on fera disparaître une à une toutes les faces dont les arêtes ne portent aucun signe, jusqu'à ce qu'on ait transformé la figure primitive en un réseau polyédrique dans lequel chaque polygone latéral présente au moins quatre variations de signe. Or chaque fois qu'on supprimera ainsi une face, on fera disparaître en même temps deux sommets et trois arêtes, d'où il résulte qu'en désignant par  $k'$ ,  $f'$ ,  $s'$  les nombres respectifs des arêtes, des faces et des sommets de la figure transformée, on aura

$$f - f' = \frac{k - k'}{3} = \frac{s - s'}{2}.$$

On en déduit, à l'aide des formules (9),

$$s' = \frac{2}{3} k',$$

$$f' = \frac{1}{3} k' + 2.$$

Ainsi les mêmes relations (9) qui avaient lieu entre les nombres des arêtes, des sommets et des faces du polyèdre primitif, subsistent encore dans la figure transformée. D'ailleurs chaque sommet de celle-ci est aussi formé par trois plans. Donc cette figure rentre complètement dans l'hypothèse déjà examinée.

Il résulte de cette discussion que pour un polyèdre maximum dont tous les sommets sont simples, la différence  $\frac{1}{e} - \frac{1}{R}$  est constamment

nulle, ce qui veut dire que le polyèdre est circonscrit à une sphère au rayon  $R$ .

II. *Cas de sommets multiples.* — Lorsqu'un polyèdre a des sommets multiples, on peut le considérer comme cas limite d'un autre polyèdre à faces variables et dont tous les sommets sont simples. Soit  $S$  un sommet du degré  $n$  de multiplicité ou formé par  $n + 2$  plans. Si l'on fait mouvoir un de ces plans parallèlement à lui-même vers l'intérieur du polyèdre, le sommet  $S$  se partagera évidemment en  $n$  sommets simples et en même temps le polyèdre acquerra  $n - 1$  arêtes nouvelles, qui feront partie du périmètre de la face  $A$ . Si le plan  $A$  se mouvait vers l'extérieur, il n'en résulterait qu'un sommet nouveau et une arête nouvelle, qui serait commune aux deux faces adjacentes à  $A$ . Le sommet  $S$  resterait à sa place, mais son degré de multiplicité serait diminué d'une unité.

En général il est permis de regarder un sommet multiple du degré  $n$  comme la réunion de  $n$  sommets simples, confondus par l'évanouissement de  $n - 1$  arêtes, qui les avaient séparés. Restitutions par la pensée toutes ces arêtes disparues et nous aurons un polyèdre à sommets simples et qui rentre, par conséquent, dans le cas précédent, à cela près qu'un certain nombre de ses arêtes auront la valeur particulière *nulle*.

Or, il est aisé de vérifier que les calculs et les raisonnements que nous avons faits au sujet de polyèdres en général, subsistent encore lorsqu'une ou plusieurs arêtes sont nulles, pourvu qu'on tienne toujours compte de ces arêtes et des angles dièdres qui leur correspondent. On peut voir, en particulier, que les formules (2) et (4) ne cessent pas d'être vraies, si quelques-unes des arêtes se réduisent à des points. Il en est de même de l'équation (7); seulement il faut observer que si une arête  $a$  est nulle, le rayon correspondant  $\varrho$  peut être nul ou indéterminé, tandis que le rapport  $\frac{a}{\varrho}$ , qui dépend uniquement des inclinaisons mutuelles des plans, a toujours une valeur déterminée, qui est positive dans le premier cas et nulle dans le second. Partant des formules (2), (4) et (7) ainsi généralisées, on obtient la même condition de maximum (8) qu'auparavant. Cette fois il est préférable de lui donner la forme

$$\Sigma \left( \frac{a}{\varrho} - \frac{a}{R} \right) h = 0$$

et d'examiner les signes du facteur  $\frac{a}{\varrho} - \frac{a}{R}$ , qui est toujours fini. La question se trouve ainsi ramenée au cas déjà traité et l'on en conclut immédiatement que la différence  $\frac{a}{\varrho} - \frac{a}{R}$  doit s'évanouir pour toutes les arêtes du polyèdre, y compris celles qui sont nulles. Il en résulte



d'abord qu'on aura  $\rho = R$  pour toute arête  $a$  qui diffère de zéro. Pour  $a = 0$  le terme  $\frac{a}{R}$  s'évanouit, et il faut qu'on ait aussi  $\frac{a}{\rho} = 0$ . Cette dernière condition, qui est relative aux angles solides multiples, laisse le rayon  $\rho$  indéterminé et elle exprime, par conséquent, que les plans qui forment un tel angle, pris à quatre, sont circonscriptibles à un cône droit. Pour satisfaire à ces différentes conditions relatives à toutes les arêtes, il faut évidemment que le polyèdre soit, dans ce cas encore, circonscrit à une sphère dont le rayon est  $R$ .

En résumant le résultat de toute notre discussion, nous pouvons, dès à présent, énoncer le théorème suivant:

*Le polyèdre convexe qui sous une étendue superficielle donné renferme le plus grand volume, le nombre des faces et leurs inclinaisons mutuelles étant déterminés, est nécessairement circonscrit à une sphère.*

Ce polyèdre est unique. Car si l'on prend le point  $O$  pour centre d'une sphère de rayon arbitraire, les perpendiculaires  $p, q, r, \dots$ , dont les directions sont données, déterminent les points de contact du seul polyèdre circonscrit dont les faces aient les directions voulues, et il ne s'agit dès lors que de donner à cette sphère des dimensions convenables pour que la surface du polyèdre devienne ce qu'elle doit être. Or l'existence du maximum est évidente a priori, et comme il n'y a qu'un seul polyèdre qui remplisse la condition énoncée dans notre théorème, il en résulte que cette condition nécessaire est aussi suffisante, c'est-à-dire que le polyèdre circonscrit à une sphère est réellement le plus grand parmi tous ceux de même surface qu'on pourrait former avec le même nombre de plans, en conservant leurs inclinaisons mutuelles.

Jusqu'ici nous n'avons comparé entre eux que des polyèdres dont les faces ont les mêmes directions ou les mêmes inclinaisons mutuelles. Laissons maintenant cette restriction et admettons plus généralement que les faces, au nombre donné, puissent varier de toutes les manières, pourvu que leur étendue totale soit constante. Pour le maximum d'un polyèdre placé dans ces nouvelles circonstances, la condition d'être circonscrit à une sphère subsiste toujours, mais elle n'est plus suffisante. Il faut en outre que chacune des faces soit touchée au centre de gravité de son aire par la sphère inscrite.

Pour le démontrer, considérons un polyèdre  $P$  circonscrit à une sphère et supposons que le point de contact d'une certaine face ne coïncide pas avec son centre de gravité. Imaginons que cette face tourne infiniment peu autour d'une droite menée dans son plan et passant par son centre de gravité, de manière à s'éloigner de la sphère; on voit par le théorème de Guldin que l'accroissement correspondant

du volume  $V$  sera un infiniment petit du second ordre, et si l'on ramène ensuite le plan parallèlement à lui-même en contact avec la sphère, le volume diminuera d'une quantité infiniment petite du premier ordre. Par cette double transformation le polyèdre primitif  $P$  sera remplacé par un second polyèdre  $P'$  circonscrit à la même sphère et ayant un volume  $V' < V$ . Quant à la surface totale, elle aura diminué dans la même proportion, puisque les surfaces  $U$  et  $U'$  des deux polyèdres sont proportionnelles aux volumes  $V$  et  $V'$ . Concevons maintenant que les dimensions de la sphère et du polyèdre circonscrit  $P'$  croissent uniformément, jusqu'à ce que la surface de celui-ci reprenne la valeur primitive  $U$ ; le volume  $V'$  croîtra en même temps; mais cette fois l'accroissement du volume aura lieu en plus forte proportion que celui de l'aire, puisqu'on a

$$\frac{dV'}{3V'} = \frac{dU'}{2U'} \quad , \quad \text{ou} \quad \frac{dV'}{V'} = \frac{3}{2} \frac{dU'}{U'} .$$

Par conséquent le nouveau polyèdre ainsi formé aura un plus grand volume, tout en ayant la même surface, que le premier polyèdre  $P$ . Donc celui-ci n'était pas un maximum, c. q. f. d.

Ce résultat combiné avec le théorème précédemment démontré conduit à une proposition plus générale, que voici :

*De tous les polyèdres convexes ayant le même nombre de faces, celui qui sous une étendue superficielle donnée renferme le plus grand volume, est circonscrit à une sphère qui touche chacune des faces dans son centre de gravité.*

Ainsi se trouve établi un théorème fondamental, déjà entrevu par M. Steiner, et qui pourra, dès à présent, servir de base pour des recherches spéciales sur les maxima des figures solides.