

## II. *Erörterungen zur Fourier-Poisson'schen Wärmeleitungstheorie; von W. Hergesell.*

### Einleitung.

Die Bedenken, welche wiederholt und mit immer stärkerer Betonung gegen die Fourier-Poisson'sche Theorie der Wärmeleitung geltend gemacht worden sind, beruhen im wesentlichen darauf, dass 1) in dieser Theorie keine Rede ist von der Veränderlichkeit der specifischen Wärme, 2) dass sie ferner auf die Dehnung der wärmeleitenden Körper keine Rücksicht nimmt und das Leitungsvermögen constant setzt, endlich 3) dass der Wärmeaustausch zwischen zwei einander berührenden Körpern der Differenz  $U - U'$  ihrer Grenztemperaturen  $U, U'$  proportional gesetzt wird.

Gegenüber den sehr interessanten Versuchen, die Theorie der Wärmeleitung so zu begründen, dass Einwürfe dieser Art ausgeschlossen werden, möge es mir gestattet sein, diese Bedenken selbst vom Standpunkte der Fouriers'schen Theorie aus einer genauen Prüfung zu unterziehen.

Meine Arbeit zerfällt in drei Abschnitte.

Im ersten Abschnitte<sup>1)</sup> weise ich nach, dass die Schwierigkeiten, welche sich an die unter 1) und 3) erwähnten Punkte zu knüpfen scheinen, gar nicht vorhanden sind, wofern man nur das Temperaturmaass  $\alpha$  Fourier's<sup>2)</sup> wirklich beibehält. Unter dieser Voraussetzung findet sich zur Einführung der veränderlichen specifischen Wärme in der Theorie selbst gar keine, bei der thermometrischen Prüfung ihrer Resultate nur eine sehr beschränkte Veranlassung, beschränkt auf die Theorie des zu verwendenden Thermometers  $T$  (§ 8, 9).

Zur Zeit Fourier's war die Veränderlichkeit der specifischen Wärme noch nicht entdeckt; es kann daher Fourier nicht zum Vorwurf gereichen, wenn er annahm, dass gleichen

---

1) Die Darstellung dieses Abschnittes knüpft an die genauen Erörterungen an, welche Hr. Prof. Christoffel in Strassburg i.E. in seinen Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen gibt.

2) Vgl. Fourier, *Théorie de la chaleur*. Chap. 1. Art. 29. „En général, les températures sont des nombres proportionels aux quantités de chaleurs ajoutées.“

Wärmezunahmen stets gleiche Volumenzunahmen entsprächen<sup>1)</sup>, dass er also die von ihm scharf definirte Temperatur  $u$ <sup>2)</sup>, die wir die mathematische nennen wollen, zur Temperatur  $g$  in Celsiusgraden proportional, mithin die specifische Wärme constant setzte. Seit den Entdeckungen von Dulong und Petit aber musste dies als unzulässig anerkannt werden. Denn wenn man in den Bedingungen der Fourier'schen Theorie das Verhältniss von  $u$  zu  $g$  constant, also kurzweg  $u = g$  setzt, wie dies besonders in neuester Zeit geschehen ist, so hat man entweder die specifische Wärme constant gesetzt oder die sämmtlichen Fourier'schen Hypothesen über den Wärmeaustausch abgeändert, nämlich ersteres, wenn man nichtsdestoweniger die Fourier'sche Definition von  $u$  beibehält, letzteres, wenn man die Veränderlichkeit der specifischen Wärme anerkennt.

Im letzteren Falle ist das  $u$  Fourier's eine Function von  $g$  und als solche durch Interpolation darstellbar (§ 6, 7). Führt man durch solche Formeln in die Bedingungsgleichungen Fourier's  $g$  an Stelle von  $u$  ein, so erhält man die neuen Bedingungsgleichungen in ähnlichen verwickelten Formen wie sie in neuerer Zeit zur Verbesserung der unhaltbaren Theorie vorgeschlagen worden sind, die sich für  $u = g$  ergibt.

Der zweite Abschnitt behandelt die Frage, betreffend die Dehnung durch die Wärme und das Leitungsvermögen, aber von einem anderen Gesichtspunkte aus.

Wie das Leitungsvermögen sich in der Wirklichkeit mit der Dehnung ändert, wird sich bis auf weiteres wohl kaum entscheiden lassen. An Stelle dieser Frage, zu deren Beantwortung mir die Mittel fehlen, setze ich die folgende, welche Hypothesen über das Leitungsvermögen erforderlich sind, wenn man die Theorie Fourier's ungeändert und scheinbar ohne Rücksicht auf die Dehnung der Körper durch die Wärme beibehält. Die Hypothese, zu welcher man durch diese Bedingung genöthigt ist (§ 4), kommt darauf hinaus, dass bei zunehmender Dehnung das Leitungs-

---

1) Fourier, *Théorie de la chaleur*. Chap. 1. Art. 27.

2) Siehe Anmerk. 1 auf voriger Seite.

vermögen in sehr einfacher Weise ab-, der Wärmestrom dagegen zunimmt, wofern bei der Dehnung nicht zugleich ein anderes Temperaturgefälle eintritt.

Im dritten Abschnitte benutze ich den Anlass, welchen die Discussion der Fourier'schen Theorie mir darbietet, zur Vervollständigung derselben durch die Aufstellung derjenigen Bedingungen, welche sich auf die bei der Wärmeleitung auftretenden Unstetigkeiten beziehen, und gebe die Lösung der hierbei auftretenden einfachsten Fälle.<sup>1)</sup>

### Erster Abschnitt.

#### Mathematische und thermometrische Temperatur.

§ 1. Als mittlere Temperatur eines Körpers  $K$  bezeichnet Fourier eine Zahl  $u$ , welche dem Wärmeinhalt  $w$  von  $K$  direkt, der in Kilogrammen ausgedrückten Masse  $m$  von  $K$  umgekehrt proportional ist. Setzt man demgemäss:

$$u = \frac{w}{c \cdot m},$$

so wird  $c = w$  für  $u = 1$  und  $m = 1$ ; also ist  $c$  der Wärmeinhalt eines Kilogrammes für  $u = 1$ .

Hier ist nicht von einem absoluten, sondern nur von einem relativen Wärmeinhalt die Rede, indem Fourier den Wärmeinhalt eines Körpers  $= 0$  setzt, wenn letzterer lange genug in schmelzendes Eis eingetaucht worden ist.

Wir nennen  $u$  die mathematische Temperatur von  $K$ ; dann ist der Wärmeinhalt  $w$  die Anzahl von Wärmeeinheiten, welche  $K$  bei der Temperatur  $u$  mehr enthält als bei der Temperatur  $u = 0$ .

Die Zahlen  $w$  und  $c$  werden um so kleiner, je grösser, und um so grösser, je kleiner die Wärmemenge ist, welche man zur Einheit wählt: auf den Zahlenwerth von  $u$  hat die Wahl der Wärmeeinheit keinen Einfluss.

---

1) Auf die an der Uebergangsfläche, d. h. derjenigen Fläche, längs deren beiden Seiten die leitende Substanz sich in verschiedenen Aggregatzuständen befindet, geltende Grenzbedingung bin ich von Hrn. Prof. Dr. Christoffel aufmerksam gemacht worden.

Bei der Temperatur des schmelzenden Eises ist  $u = 0$ ; der zweite Fixpunkt, für den  $u = 1$  wird, muss somit festgestellt werden. Fourier nimmt hierfür die Temperatur des bei einem Druck von 760 mm siedenden Wassers, sodass, während ein Thermometer von  $0^\circ$  auf  $100^\circ$  C. steigt,  $u$  von 0 bis 1 wächst. (Für numerische Zwecke ist es geeigneter,  $c$  so zu wählen, dass  $u = 1$  wird bei  $1^\circ$  C.)

§ 2. Diesem mathematischen Maasse für Temperaturen muss nun das thermometrische Temperaturmaass gegenübergestellt werden. Zunächst hat es, wenigstens principiell, keine Schwierigkeit, den Begriff des 100theiligen Thermometers, welcher für Luft, Weingeist, Quecksilber feststeht, in gleicher Weise auf Thermometer aus jeder beliebigen Substanz  $K$  auszudehnen.

Dann soll die Anzahl  $g$  von Graden, welches dieses Thermometer zeigen würde, als seine thermometrische Eigentemperatur bezeichnet werden, und das überträgt sich dann sofort auf jeden Körper von dieser Substanz  $K$  und auf jeden Theil desselben. Ist  $u$  die mathematische Temperatur bei der „thermometrischen Eigentemperatur“  $g$ , so ist  $u$  Function von  $g$  und als solche zu untersuchen (§ 6).

Ferner heisst  $\gamma$  die spezifische Wärme von 1 Kilogramm dieser Substanz, wenn demselben  $\gamma \cdot \partial g$  Wärmeeinheiten zugeführt werden müssen, damit seine Eigentemperatur von  $g$  auf  $g + \partial g$  steigt.

Die thermometrische Eigentemperatur ist kein absolutes Wärmemaass, da 1) die gleiche Zahl  $g$  für gleich grosse Mengen verschiedener Substanzen ungleichen Wärmeinhalten entspricht, und 2) für die gleiche Substanz gleich grosse Aenderungen  $\Delta g$  an verschiedenen Stellen  $g$  der Scala ungleiche Aenderungen des Wärmeinhalts messen. (Veränderlichkeit der spezifischen Wärme  $\gamma$ .)

§ 3. Die Constante  $c$  ist also der Wärmeinhalt eines Kilogrammes bei  $100^\circ$  thermometrischer Eigentemperatur. Fourier nennt sie spezifische Wärme pro Kilogramm, was auf seine Wärmeleitungstheorie keinen Einfluss hat, da derselbe mit dem mathematischen Temperaturmaasse  $u$  rechnet, also nicht in den Fall kommen kann, eine veränderliche

specifische Wärme  $\gamma$  einzuführen. Bei numerischen Ausführungen hat Fourier allerdings die Constante  $c$  als eine specifische Wärme benutzt, indem er  $u$  zu  $g$  proportional annimmt, was  $100u = g$  und, wie das Folgende (§ 5) zeigt,  $\gamma = c/100$  gibt. Um Verwechslungen auszuschliessen, möge  $c$  als die Temperaturconstante bezeichnet werden.

§ 4. Sei also:

$m$  das Gewicht von  $K$  in Kilogrammen,

$c$  seine Temperaturconstante,

$w$  sein Wärmeinhalt,

$u$  seine mathematische,

$g$  seine thermometrische Eigentemperatur.

Für  $g = g_1$  werde  $u = 1$ , was bei Fourier  $g_1 = 100$  voraussetzt. Dann ist nach § 1:

$$(1) \quad w = m \cdot c \cdot u;$$

um  $K$  auf die thermometrische Eigentemperatur  $g + \partial g$  zu bringen, müssen jedem Kilogramme  $\gamma \cdot \partial g$  Wärmeeinheiten zugeführt werden, was für  $K$  eine Vermehrung des Wärmeinhalts um:

$$(2) \quad \partial w = m \cdot \gamma \cdot \partial g$$

gibt. Aber da nach (1) auch  $\partial w = m \cdot c \cdot \partial u$  ist, so ist:

$$(3) \quad c \cdot \partial u = \gamma \cdot \partial g.$$

§ 5. Nimmt man, wie es bis in die neueste Zeit geschehen ist, an,  $u$  sei zu  $g$  proportional, so ist  $g = g_1 u$  zu setzen, und dann folgt aus (3)  $c = g_1 \cdot \gamma$ , d. h. die specifische Wärme  $\gamma$  findet sich constant.

Der Einwurf, die specifische Wärme  $\gamma$  constant zu setzen, trifft also nicht die Fourier'sche Theorie der Wärmeleitung, sondern alle diejenigen Anwendungen derselben, in denen  $u$  zu  $g$  proportional genommen wird.

§ 6. Betrachtet man  $\gamma$  als Function von  $g$ , so folgt:

$$(4) \quad c \cdot u = \int_0^g \gamma \cdot \partial g, \quad (5) \quad c = \int_0^{g_1} \gamma \cdot \partial g.$$

Ist eine Wärmeeinheit äquivalent mit  $\alpha$  Arbeitseinheiten, so ist also der Wärmeinhalt  $w = m \cdot c \cdot u$  von  $K$  bei  $g^0$  thermometrischer Eigentemperatur äquivalent mit  $\alpha \cdot w$ , d. h. mit:

$$(6) \quad A = \alpha \cdot m \int_0^g \gamma \cdot \partial g$$

Arbeitseinheiten, d. h. so viel Arbeitseinheiten enthält  $K$  bei  $g^0$  Eigentemperatur mehr als bei 0 Grad.

Im Ausdrucke (4) für  $u$  hängt nur die Constante  $c$  von derjenigen Temperatur  $g_1$  ab, für welche man  $u = 1$  setzen will. Ändert man also  $g_1$ , so ändert sich zwar  $c$  und  $u$ , aber alle Werthe von  $u$  werden im nämlichen Verhältnisse abgeändert oder deutlicher, mit der nämlichen Zahl multiplicirt:

Während also die mathematische Temperatur  $u$  von der Wärmeeinheit ganz unabhängig ist, wird sie durch eine Verlegung des zweiten Fixpunktes  $g_1$  nur im constanten Verhältnisse abgeändert.

Für gewöhnlich reicht es aus,  $\gamma$  interpolatorisch in der Form:

$$\gamma = \beta(1 + 2\epsilon g)$$

darzustellen, wobei sich für  $\epsilon$  sehr kleine Werthe ergeben, deren höhere Potenzen gegen die erste vernachlässigt werden können. Das gibt:

$$cu = \beta(g + \epsilon g^2);$$

nimmt man:

$$g_1 = 1,$$

so wird:

$$c = \beta(1 + \epsilon), \quad u = \frac{g + \epsilon g^2}{1 + \epsilon}$$

oder mit gleicher Annäherung:

$$u = g + \epsilon g \cdot (g - 1).$$

§ 7. Für unseren Zweck ist es nothwendig, zu ermitteln, inwieweit die Fourier'sche Theorie der Wärmeleitung überhaupt Veranlassung geben kann, auf den Begriff der specifischen Wärme Rücksicht zu nehmen.

Die Mischungsmethode zur Bestimmung der specifischen Wärme von  $K$  setzt voraus, dass man den erwärmten Körper  $K$  in eine Flüssigkeit  $w$  von bestimmter Gewichtsmenge und in diese ein Thermometer  $T$  eintaucht, welches letztere abgelesen wird, sobald alle Temperaturen constant geworden sind. Seien in diesem Schlusszustande:

$u_K, u_w, u_T$  die betreffenden mathematischen,  
 $g_K, g_w, g_T$  die thermometrischen Eigentemperaturen,  
 sodass  $g_T$  durch Ablesung erhalten wird.

Die Fourier'sche Theorie der Wärmeleitung unterscheidet sich bekanntlich von der Poisson'schen durch die Grenzbedingungen; aber es ist bekannt, dass aus beiden für den Schlusszustand  $u_K = u_w, u_w = u_T$  folgt. Also ist:

$$(A) \quad u_K = u_T,$$

wie wenn  $T$  in  $K$  selbst eingetaucht worden wäre.

Benutzen wir nun der Einfachheit wegen die interpolatorischen Formeln am Schlusse des vorigen Abschnittes, so ist zu setzen:

$$\begin{aligned} \gamma_K &= \beta_K \cdot (1 + 2\epsilon_K g_K), & u_K &= g_K + \epsilon_K \cdot g_K (g_K - 1), \\ \gamma_T &= \beta_T \cdot (1 + 2\epsilon_T g_T), & u_T &= g_T + \epsilon_T \cdot g_T (g_T - 1), \end{aligned}$$

und man erkennt Folgendes:

1) Um die mathematische Temperatur von  $K$  zu finden, bedarf es beim obigen Versuche nur der genauen Kenntniss des Thermometers  $T$ , d. h. der Formel:

$$\gamma_T = \beta_T (1 + 2\epsilon_T g_T),$$

aus welcher die Formel für  $u_T$  folgt; dann ist, aus welcher Substanz auch  $K$  bestehen mag:

$$(A_1) \quad u_K = g_T + \epsilon_T g_T (g_T - 1).$$

2) Dagegen hat man für die „thermometrische Eigentemperatur“ von  $K$  zunächst:

$$g_K + \epsilon_K g_K (g_K - 1) = g_T + \epsilon_T g_T (g_T - 1).$$

Das gibt in erster Annäherung  $g_K = g_T$ , und in zweiter, bei welcher wir stehen bleiben müssen,

$$(B) \quad g_K = g_T + (\epsilon_T - \epsilon_K) g_T (g_T - 1).$$

3) Wenn man nun die spezifische Wärme von  $K$  nicht durch die Eigentemperatur von  $K$ , sondern wie üblich ist, durch die an  $T$  abgelesene Temperatur  $g_T$  ausdrückt, so darf in  $1 + 2\epsilon_K g_K$  für  $g_K$  nur die erste Annäherung benutzt werden, und dann folgt:

$$(C) \quad \gamma_K = \beta_K (1 + 2\epsilon_K g_T).$$

4) Hieraus muss der Ausdruck  $(A_1)$  sich wieder ergeben. Es ist aber:

$$c_K u_K = \int_0^{g_K} \gamma_K \cdot \partial g_K,$$

ferner, wenn  $g_T = g$  gesetzt wird, mit Rücksicht auf (B):

$$\gamma_K \cdot \partial g_K = \beta_K (1 + 2 \varepsilon_K g) (1 + [\varepsilon_T - \varepsilon_K] [2g - 1]) \partial g$$

oder:  $\gamma_K \cdot \partial g_K = \beta_K (1 + \varepsilon_K + \varepsilon_T [2g - 1]) \cdot \partial g,$

da die zweite Annäherung nicht überschritten werden darf; endlich, da  $g$  von 0 bis  $g_T$  geht, wird:

$$c_K u_K = \beta_K [(1 + \varepsilon_K) g_T + \varepsilon_T g_T (g_T - 1)].$$

Für  $g_T = 1$  wird auch  $g_K = 1$ , also  $u_K = 1$ , mithin ist:

$$c_K = \beta_K (1 + \varepsilon_K),$$

und es folgt:

$$u_K = g_T + \frac{\varepsilon_T}{1 + \varepsilon_K} \cdot g_T (g_T - 1),$$

d. h.

$$u_K = g_T + \varepsilon_T \cdot g_T \cdot (g_T - 1),$$

da  $\varepsilon_T, \varepsilon_K$  und die höheren Potenzen von  $\varepsilon_K$  vernachlässigt werden, also der Ausdruck  $(A_1)$ .

§ 8. Der Begriff der „thermometrischen Eigentemperatur“  $g_K$  von  $K$  im Gegensatze zur Temperatur  $g_T$ , welche das Thermometer  $T$  am Körper  $K$  zeigt, dürfte sich zur täglichen Anwendung in der Physik wohl wenig empfehlen, wenn er auch gelegentlich nicht abgewiesen werden kann, und alle Festsetzungen über spezifische Wärme implicite auf ihn Bezug nehmen.

Will man ihn vermeiden, so muss man aus den Rechnungen alles Thermometermaass entfernen, es wäre denn ein Thermometer  $T$ , für welches  $\gamma_T$  constant ist, was  $g_T = u_T$  gibt (§ 5).

Die thermometrischen Methoden sind damit nicht ausgeschlossen, da man nach der Formel:

$$(A) \quad u_K = u_T,$$

die mathematische Temperatur für jede beliebige Substanz  $K$  hat, sobald das Thermometer  $T$  und seine spezifische Wärme  $\gamma_T$  so genau bekannt ist, dass man zu jeder Ablesung  $g_T$  sofort  $u_T$  berechnen kann.



Dies alles gilt unter Voraussetzung der Fourier-Poisson'schen Wärmeleitungstheorie, und unter **dieser Voraussetzung** gibt demnach sogar die **experimentelle** Bestimmung von  $\alpha_K$  keine Veranlassung, um auf die spezifische Wärme von  $K$  einzugehen, sodass für diese letztere in der erwähnten Theorie sich überall keine Stelle findet.

§ 9. Aber hier ist noch eine Schwierigkeit übrig, welche sich an die Formel (B) knüpft und auf einen directen Widerspruch zwischen der Fourier-Poisson'schen Theorie und den zuverlässigsten Ergebnissen der Thermometrie hinzuweisen scheint.

Seien  $K$  und  $K'$  zwei beliebige Körper und  $U$ ,  $U'$  ihre mathematischen,  $G$  und  $G'$  ihre thermometrischen Eigentemperaturen, also etwa des Beispiels wegen:

$$U = G + \epsilon G(G - 1), \quad U' = G' + \epsilon' G'(G' - 1).$$

Werden die Körper, ohne dass ihnen immer von neuem Wärme zugeführt wird, längere Zeit in Berührung gebracht, so folgt mit Zugrundelegung der bekannten Grenzbedingung Poisson's (Uebergangswiderstand), dass an der Berührungsstelle die Differenz  $U - U'$  äusserst klein, wenn auch nicht gleich Null wird. Fourier setzt geradezu  $U - U' = 0$ . Die thermometrischen Eigentemperaturen  $G$  und  $G'$  werden also nicht einander gleich, gerade weil nach Fourier genau, fast genau nach Poisson,  $U = U'$  wird.

Dies scheint nun allen bekannten Thatsachen zu widersprechen, da ein Thermometer  $T$  zu beiden Seiten der Berührungsstelle die gleiche Temperatur zeigt.

Dieser Widerspruch ist nur ein scheinbarer.

Seien  $u$  und  $u'$  die mathematischen Temperaturen, welche  $T$  beim Anlegen an  $K$  und  $K'$  erlangt;  $g$  und  $g'$  seien die Grade, die es anzeigt. Die Theorie fordert in einem Falle  $u = U$ , im anderen  $u' = U'$ , aber ausserdem  $U' = U$ , was zusammen:

$$u' = u$$

gibt. Daraus aber folgt auch:

$$g' = g,$$

d. h. auch die Theorie fordert, dass  $T$  an beiden Körpern gleich viel Grade  $g$  zeigt; aber dies ist weder die thermo-

metrische Eigentemperatur  $G$  des einen, noch die thermometrische Eigentemperatur  $G'$  des anderen Körpers.

Will man die letzteren auch noch ermitteln, so müssen  $U$  und  $U'$  und  $u$  als Functionen von  $G$ , resp.  $G'$  und  $g$  bekannt sein: die Wärmeleitungstheorie gibt zu dieser Aufgabe gar keine Veranlassung.

### Zweiter Abschnitt.

Ueber die Dehnung der Körper durch die Wärme und das Leitungsvermögen.

§ 1. Es liege ein wärmeleitender Körper vor, in welchem überall die Temperatur  $u = 0$  herrsche. Bei dieser Temperatur seien  $x, y, z$  die Coordinaten eines unbestimmten Massentheilchens  $m$ ,  $v_0$  ein Volumen innerhalb des Körpers,  $\sigma_0$  seine Oberfläche,  $\rho_0$  die Dichtigkeit (das Gewicht eines Volumentheilchens in Kilogrammen ausgedrückt). Wird der Körper erwärmt, so ändert infolge der Dehnung  $m$  seine Lage,  $v_0$  und  $\sigma_0$  ihre Gestalt; seien  $\xi, \eta, \zeta$  die neuen Coordinaten des nämlichen Theilchens  $m$ ,  $v$  und  $\sigma$  das Volumen und die Oberfläche, welche die nämlichen Theilchen des Körpers enthalten wie  $v_0$  und  $\sigma_0$  bei der Temperatur  $u = 0$ ; die Dichtigkeit bei der Temperatur  $u$  heisse  $\rho$ .

Es handelt sich zunächst um den Wärmehalt  $w$  von  $v$ .

Die Grösse, welche als Temperaturconstante bezeichnet wurde, gibt die Anzahl von Wärmeeinheiten an, welche ein Kilogramm der vorliegenden Substanz von  $0^\circ$  auf  $100^\circ$  C. bringen: sie hat mit der Frage nach der Dehnung nichts zu thun.

Demnach ist der Wärmehalt des Elements  $\partial v$  von  $v$  folgender:

$$cu\rho\partial v.$$

Der Wärmehalt von  $v$  selbst ist das Integral:

$$w = c \int u \cdot \rho \cdot \partial v.$$

Wenn daher  $\partial v_0$  bei der Temperatur  $u = 0$  die nämlichen Körpertheilchen enthält, wie  $\partial v$  bei der Temperatur  $u$ , so ist  $\rho \cdot \partial v = \rho_0 \cdot \partial v_0$ , und es folgt, wenn man  $u$  auf die Körpertheilchen selbst bezieht, unabhängig davon, welche Lage sie im Raum einnehmen:

$$w = c \int u \cdot \rho_0 \cdot \partial v_0.$$

In den nächsten  $\delta t$  Secunden nimmt also der Wärmehalt von  $v$  zu um:

$$(A) \quad \delta w = c \delta t \int \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \varrho_0 \cdot \partial v_0.$$

§ 2. Es handelt sich nun darum, diese Reduction vom Volumen  $v$  auf das ursprüngliche Volumen  $v_0$  auch für den Ausdruck von  $\delta w$  herzuleiten, den die Wärmeleitung ergibt, und dies wird die aufzustellenden Hypothesen liefern.

Ist bei der Temperatur  $u$ , also im gedehnten Volumen  $v$ ,  $\omega$  ein Flächenelement,  $N$  seine Normale,  $K$  das Leitungsvermögen, so gehen durch  $\omega$  in  $\delta t$  Secunden gegen die Richtung von  $N$ :

$$K \frac{\partial u}{\partial N} \omega \delta t$$

Wärmeeinheiten (Hypothese Fourier's). Nehmen wir für  $\omega$  die Elemente  $\partial \sigma$  der Oberfläche  $\sigma$  von  $v$  und für  $N$  jedesmal die aus  $v$  heraustretende Normale, so folgt:

$$(B) \quad \delta w = \delta t \cdot \int K \frac{\partial u}{\partial N} \cdot \partial \sigma.$$

Dies ist also der Ausdruck, in welchem die Integration über  $\sigma$  auf eine Integration über die Elemente von  $\sigma_0$  reducirt werden soll.

Nun führe ich eine erste Beschränkung meiner Untersuchung ein, nämlich die folgende:

I. Dass die Dehnung des Körpers infolge seiner Erwärmung, sei es infolge ihrer Kleinheit, sei es infolge der Constitution der leitenden Substanz, die kleinsten Abtheilungen des Körpers nur so deformirt, dass sie nicht aufhören, ihrer früheren Gestalt ähnlich zu bleiben.

Krystallinische Substanzen sind demnach unbedingt ausgeschlossen, und führe ich diese Discussion mit der vorstehenden Einschränkung um so lieber aus, als vielleicht gerade dadurch hervortritt, welches die wahren Grundlagen einer Theorie der Wärmeleitung in Krystallen sind.

Ist unter der vorstehenden Voraussetzung  $\epsilon$  der lineare Ausdehnungscoefficient, so wird  $\partial \sigma = (1 + \epsilon)^2 \cdot \partial \sigma_0$ , wobei  $\partial \sigma_0$  dasjenige Element der ursprünglichen Oberfläche  $\sigma_0$  bedeutet, aus welchem  $\partial \sigma$  durch Dehnung hervorgegangen ist. —

Wegen I. aber bildeten diejenigen Massentheilchen  $m$ , welche auf der Normale  $N$  von  $\partial\sigma$  gelagert sind, ursprünglich die Normale  $N_0$  von  $\partial\sigma_0$ , und wenn  $\partial N_0$  dasjenige Element der letzteren ist, aus welchem  $\partial N$  durch Dehnung hervorgegangen ist, so ist  $\partial N = (1 + \epsilon) \partial N_0$ .

In  $\partial u / \partial N$  bedeutet  $\partial u$  die Temperaturdifferenz zwischen denjenigen beiden Körpertheilchen, welche Anfang und Ende von  $\partial N$  bilden: Da wir  $u$  unter allen Umständen zunächst auf das Körpertheilchen  $m$  selbst, dann erst auf Coordinaten beziehen, so ist es gleichgültig, ob wir  $u$  bezeichnen als die Temperatur, gehörig zu den Coordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  im gedehnten, oder als die Temperatur, gehörend zu den Coordinaten  $x, y, z$  im ungedehnten Volumen.

In diesem Sinne ist  $\partial u$  nichts als die Temperaturdifferenz vom Anfang bis zum Ende von  $\partial N_0$ , und so folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \frac{1}{1 + \epsilon} \cdot \frac{\partial u}{\partial N_0}.$$

Jetzt erhalten wir aus (B):

$$\delta w = \delta t \int K(1 + \epsilon) \frac{\partial u}{\partial N_0} \cdot \partial \sigma_0.$$

§ 3. Diese Formel gibt uns die zweite Hypothese, welche erforderlich ist, um zu den Formeln Fourier's zu kommen, nämlich die folgende:

II. Dass  $K(1 + \epsilon) = k$  von der Dehnung unabhängig ist. Wird diese Hypothese, die sofort discutirt werden soll, ebenfalls angenommen, so folgt:

$$\delta w = k \delta t \cdot \int \frac{\partial u}{\partial N_0} \cdot \partial \sigma_0,$$

oder nach bekannten Sätzen:

$$\delta w = k \delta t \int \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \partial v_0.$$

Hieraus erhalten wir durch Gleichsetzung mit dem Ausdrucke:

$$(A) \quad \delta w = c \delta t \int \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \varrho_0 \cdot \partial v_0,$$

$$\int \left[ c \varrho_0 \frac{\partial u}{\partial t} - k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right] \partial v_0 = 0,$$

also die Fourier'sche Differentialgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{q_0 c} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

mit dem Zusatz:

III. Dass  $xyz$  zwar die Coordinaten desjenigen Theilchens bedeuten, dessen Temperatur durch  $u$  bezeichnet ist; aber es sind nicht die Coordinaten im gedehnten Zustande der Substanz, sondern reducirt auf die Temperatur  $u = 0$ .

§ 4. Für den Nachweis der Bedeutung, welchen die Hypothese II hat, ist die Formel:

$$K(1 + \epsilon) = k,$$

allein nicht ausreichend, sondern man muss auch ihren Einfluss auf den Wärmestrom ermitteln. Bei dem Temperaturgefälle:

$$\frac{\partial u}{\partial N} = u'$$

ist für das oben eingeführte Element  $\omega$  der Wärmestrom:

$$S = Ku' \omega.$$

Ist  $\omega_0$  das Element, aus welchem  $\omega$  durch Dehnung hervorgegangen ist, so ist  $\omega = (1 + \epsilon)^2 \omega_0$ , und da  $K(1 + \epsilon) = k$  sein soll, so folgt:

$$K\omega = (1 + \epsilon)k\omega_0 \quad \text{also} \quad S = (1 + \epsilon)ku' \omega_0.$$

Während also die Formel  $K = k/(1 + \epsilon)$  aussagt, dass nach der Hypothese II das Leitungsvermögen durch Dehnung abnimmt, zeigt der Ausdruck für  $S$ , dass bei gleichem Temperaturgefälle  $u'$  der Wärmestrom zwischen gleichen Körpertheilchen, nämlich den durch  $\omega$ , also auch durch  $\omega_0$  geschiedenen, mit der Dehnung zunimmt, und zwar jenes wie dieser im Verhältniss von 1 zu  $1 + \epsilon$ , wenn  $\epsilon$  die Lineardilatation ist.

So also können wir sagen:

Wendet man die Maassbestimmungen Fourier's nur auf solche Fälle an, in welchen — gleichviel aus welchen Gründen — die Dehnungen der wärmeleitenden Substanz zwar das Volumen, aber nicht die Gestalt der kleinsten Körpertheilchen ändern, und setzt man dann zu den Annahmen Fouriers über das Maass des Wärmestroms noch die folgende:

Dass bei gleichem Temperaturgefälle der Wärmestrom

zwischen den gleichen Körpertheilchen im Verhältniss von  $1:(1 + \epsilon)$  wächst, wenn eine Linearausdehnung im gleichen Verhältniss erfolgt, so gilt die von Fourier gegebene Differentialgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

wenn man unter  $x, y, z$  die Coordinaten versteht, welche das Körpertheilchen vor jeder Dehnung bei der allgemeinen Temperatur  $u = 0$  hatte.

### Dritter Abschnitt.

Die Bedingungen für stetig fortschreitende Unstetigkeiten bei der Wärmeleitung. (Aenderung des Aggregatzustandes).

§ 1. Im Folgenden soll an einigen und zwar den einfachsten Beispielen gezeigt werden, dass die Fourier-Poisson'sche Theorie ausreicht, auch diejenigen Wärmeprobleme zu behandeln, bei welchen die Temperaturerhöhungen längs einer gewissen Fläche Aenderungen des Aggregatzustandes hervorrufen, sodass auf der einen Seite dieser Fläche die leitende Substanz sich z. B. im festen, auf der anderen Seite im flüssigen Zustande befindet. Wir werden uns auf den einfachsten Fall beschränken, dass die Temperaturvertheilung nur von einer Coordinate abhängt, dass also die Fläche, längs welcher die Aenderung des Aggregatzustandes stattfindet, und die wir Uebergångsfläche nennen wollen, eine Ebene ist. Da sich bei den zu behandelnden Problemen ein Theil der leitenden Substanz stets im flüssigen Zustande befindet, so ist, wenn Strömungen principiell vermieden werden sollen, diese Beschränkung nothwendig. Da es sich ferner hier nur darum handelt, den bei Wärmeproblemen dieser Art einzuschlagenden Weg zu weisen, so setzen wir als wärmeleitende Substanz Wasser und Eis voraus, indem hierbei bei der von Fourier gewählten Wärmeeinheit die für die Uebergangsebene sich ergebende Grenzbedingung eine möglichst einfache wird.

Um zu dieser Grenzbedingung zu gelangen, denken wir uns Wasser und Eis, beide unendlich ausgedehnt, in einer zur Coordinatenrichtung senkrechten Ebene  $Q_0$  zusammen-

stossen und betrachten ein zu  $Q_0$  senkrechtes Prisma, welches demnach aus einer Wasser- und einer Eissäule zusammengesetzt ist. Ist dann  $\omega_1$  die Geschwindigkeit, mit welcher die Wassersäule wächst,  $\omega_2$  diejenige, mit welcher die Eissäule abschmilzt, so verlängert sich die Wassersäule in  $\Delta t$  Secunden um  $\omega_1 \cdot \Delta t$  Meter; die Eissäule wird zugleich um  $\omega_2 \Delta t$  Meter kürzer. Wiegt bei der Temperatur Null ein Kubikmeter Wasser  $\rho_1$ , ein Kubikmeter Eis  $\rho_2$  Kilogramm, und ist  $Q$  der Querschnitt beider Säulen, so ist  $\rho_2 \cdot \omega_2 \cdot Q \cdot \Delta t$  die Masse Eis, welche in  $\Delta t$  Secunden schmilzt,  $\rho_1 \cdot \omega_1 \cdot Q \cdot \Delta t$  die Masse des hierbei gebildeten Wassers, also:

$$(I) \quad \rho_1 \omega_1 = \rho_2 \omega_2.$$

Sind  $\omega_1$  und  $\omega_2$  negativ, findet also nicht ein Abschmelzen des Eises, sondern ein Anfrieren des Wassers statt, so ist  $-\rho_1 \omega_1 Q \Delta t = -\rho_2 \omega_2 Q \Delta t$  die Masse, die ihren Aggregatzustand ändert.

Seien  $\omega_1$  und  $\omega_2$  wieder positiv, und an der Uebergangsfläche Eis und Wasser auf den Schmelztemperaturen:

$$(II) \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0,$$

so ist der Wärmehalt einer unendlich dünnen Doppelschicht, in deren Inneren sich die Uebergangsebene befindet, gleich Null und bleibt gleich Null. Die ganze Wärmemenge, welche während  $\Delta t$  Secunden in diese Schicht hineinströmt, wird also verbraucht, um  $\rho_2 \omega_2 Q \Delta t$  kg Eis von  $0^\circ$  in  $\rho_1 \omega_1 Q \Delta t$  kg Wasser von  $0^\circ$  zu verwandeln, wozu nach dem Wärmemaass Fourier's  $\rho_2 \omega_2 Q \Delta t$  Wärmeeinheiten erforderlich sind.

Sind  $S_1 Q \Delta t$  und  $S_2 Q \Delta t$  die Wärmeströme und nach der Uebergangsstelle gerichtet, so ist diese Anzahl von Wärmeeinheiten  $= (S_1 + S_2) Q \Delta t$ ; mithin folgt:

$$(III) \quad S_1 + S_2 = \rho_1 \omega_1 = \rho_2 \omega_2.$$

Sind  $\omega_1$  und  $\omega_2$  beide negativ, so bleibt auch diese Formel richtig.

§ 2. Wir führen jetzt ein veränderliches Coordinatensystem ein, indem wir den Nullpunkt der zu  $Q_0$  senkrechten  $X$ -Axe stets in die Uebergangsebene fallen lassen, sodass die Grenze zwischen Wasser und Eis immer bei  $x = 0$  bleibt. Wir zählen ferner in beiden Massen Abscissen, die nach dem Unendlichen hin wachsen.

a) Ist  $Q_0$  die Uebergangsstelle und  $Q_1$  ein Querschnitt der Wassersäule, dadurch charakterisirt, dass er stets durch die nämlichen Theilchen gebildet wird, also mit der Zeit  $t$  seine Lage (in Bezug auf die Uebergangsebene) ändert, so zählen wir von  $Q_0$  bis  $Q_1$  Abscissen  $x_1$ , die also mit der Geschwindigkeit  $\omega_1$  wachsen und von einem mit  $Q_1$  zugleich fortschreitenden Querschnitte  $Q_1^0$  an, der für  $t = 0$  die Uebergangsebene war, bis  $Q_1$  Abscissen  $\xi_1$ . Dann ist:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \omega_1, \quad x_1 = \xi_1 + \int_0^t \omega_1 \partial t,$$

da  $x_1 = \xi_1$  ist für  $t = 0$ .

b) Wird ebenso im Eise von  $Q_0$  bis zu einem Querschnitte  $Q_2$ , der stets durch die nämlichen Theilchen gebildet wird, die mit der Geschwindigkeit  $\omega_2$  abnehmende Abscisse  $x_2$  gezählt, und ist für  $t = 0$ ,  $x_2 = \xi_2$ , so ist:

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = -\omega_2, \quad x_2 = \xi_2 - \int_0^t \omega_2 \partial t.$$

Beide Formeln a) und b) gelten auch, wenn  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  negativ sind, nur dass dann die Geschwindigkeit, mit der  $x_1$  zu- und diejenige, mit der  $x_2$  abnimmt, eine negative ist.

Mit Hülfe der so eingeführten Coordinatensysteme sind die in (III) benutzten Wärmeströme.

$$(IV) \quad S_1 = k_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}, \quad S_2 = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}.$$

Ausserdem gelten die Differentialgleichungen:

$$(V_a) \quad \varrho_1 c_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2}, \quad \varrho_2 c_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} = k_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2^2},$$

wenn Eis und Wasser zusammen einen nach allen Richtungen unendlich ausgedehnten Körper bilden. Liegt dagegen nur ein nach beiden Seiten unendlich langes Prisma mit dem Querschnitte  $Q$  vor, und ist  $S$  der Umfang von  $Q$ ,  $U$  die Temperatur der Umgebung, so lauten die Differentialgleichungen:

$$(V_b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho_1 c_1 Q \frac{\partial u_1}{\partial t} = k_1 Q \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} - g_1 S(u_1 - U), \\ \varrho_2 c_2 Q \frac{\partial u_2}{\partial t} = k_2 Q \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2^2} - g_2 S(u_2 - U). \end{array} \right.$$



Hierin sollen nun  $u_1, u_2$  statt durch  $\xi_1$ , resp.  $\xi_2$  und  $t$  durch  $x_1$ , resp.  $x_2$  und  $t$  ausgedrückt werden. Sei:

$$u_1 = u_1(x_1, t), \quad u_2 = u_2(x_2, t);$$

dann enthalten die Ausdrücke dieser Art die Variable  $t$  explicit und implicite, und es lauten die in (IV) und (V) erforderlichen Werthe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \omega_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t} - \omega_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Zugleich aber ist:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}.$$

Demnach erhalten wir folgende Bedingungsgleichungen:

$$(A) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial t} &= \omega_1, & \frac{\partial x_2}{\partial t} &= -\omega_2; & x_1 &= \xi_1 \\ & & & & x_2 &= \xi_2 \end{aligned} \right\} \text{ für } t = 0,$$

$$(B) \quad \left. \begin{aligned} u_1 &= 0, & u_2 &= 0, \\ k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= \varrho_1 \omega_1 = \varrho_2 \omega_2 \end{aligned} \right\} \text{ für } \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0, \end{aligned}$$

(C) a) für den unendlichen Raum:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \omega_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \frac{k_1}{\varrho_1 c_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \omega_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= \frac{k_2}{\varrho_2 c_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \end{aligned} \right\} \text{ für } \begin{aligned} x_1 &> 0 \\ x_2 &> 0, \end{aligned}$$

b) für ein unendlich langes Prisma:

$$\left. \begin{aligned} Q \varrho_1 c_1 \left[ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \omega_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] &= k_1 Q \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - q_1 S(u_1 - U) \\ Q \varrho_2 c_2 \left[ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \omega_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] &= k_2 Q \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - q_2 S(u_2 - U) \end{aligned} \right\} \text{ für } \begin{aligned} x_1 &> 0 \\ x_2 &> 0. \end{aligned}$$

worin  $1/q_1$  und  $1/q_2$  den „Uebergangswiderstand“ für den Wärmestrom zwischen Wasser, resp. Eis und der gemeinsamen Umgebung bedeuten.

Hierbei ist noch zu bemerken, dass in allen diesen Gleichungen  $x_1$  und  $x_2$  Coordinaten eines Systems sind, das im Laufe der Zeit seinen Anfangspunkt beständig im Raume verschiebt. Man kann auch — und dies wird zur Vereinfachung der Anschauung beitragen — umgekehrt  $x_1$  und  $x_2$  als Coordinaten eines im Raum festliegenden Systems be-

trachten, wenn man die ganze leitende Masse sich so bewegt denkt, dass die Uebergangsebene stets denselben Ort im Raume einnimmt.

§ 3. Der stationäre Zustand. Im vorliegenden Falle ist ein Beharrungszustand auf zweierlei Art denkbar. Drückt man etwa  $u_1$  aus durch  $\xi_1$  und  $t$ , und wird dann  $u_1$  unabhängig von  $t$ , so heisst dies, dass ein jedes Massentheilchen seine Temperatur  $u_1$  unverändert beibehält, während es — wegen der Vorgänge an der Uebergangsebene — seinen Ort im Raume (seine Entfernung von der Uebergangsstelle) — ändert. Verhält es sich ebenso mit  $u_2$ , so wird der Zustand ein stationärer sein für einen Beobachter, der an der Bewegung einer der beiden Massen theilnimmt, aber nicht für denjenigen, der ausserhalb steht. Dieser stationäre Zustand ist von keinem Interesse; denn da die einzelnen, sowohl Wasser- wie Eistheilchen, an der Uebergangsstelle die Temperatur  $u = 0$  haben, weil ferner die Uebergangsebene im Laufe der Zeit über jedes Theilchen entweder schon hinweggeschritten ist oder noch darüber hinwegschreiten wird, so herrscht überall und zu jeder Zeit im Wasser und im Eise die Temperatur Null.

Für einen ausserhalb stehenden Beobachter wird die Temperaturvertheilung in dem Falle eine stationäre sein, wenn  $u_1$  und  $u_2$ , ausgedrückt durch  $x_1$ , resp.  $x_2$  und  $t$  in Functionen von  $x_1$  und  $x_2$  (ohne explicites  $t$ ) übergehen.

Diesen zweiten stationären Zustand wollen wir untersuchen.

I. Eis und Wasser zusammen bilden einen nach allen Richtungen unendlichen Körper.

Der stationäre Zustand fordert zunächst:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0,$$

sodass wir die Gleichungen erhalten:

$$(A) \quad \left. \begin{matrix} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{matrix} \right\} \omega_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{k_1}{\varrho_1 c_1} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = 0; \quad \omega_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{k_2}{\varrho_2 c_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0,$$

$$(B) \quad \left. \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \right\} u_1 = 0; \quad u_2 = 0; \quad k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \varrho_1 \omega_1 = \varrho_2 \omega_2.$$

Die Gleichungen (A) lehren, dass  $\omega_1$  und  $\omega_2$  von  $t$  unabhängig, also constant sein müssen.

Particularlösungen sind:

$$u_1 = a e^{\alpha x_1}, \quad u_2 = b e^{\beta x_2},$$

wofern  $\alpha$  und  $\beta$  den Gleichungen genügen:

$$\alpha \left( \omega_1 - \frac{k_1}{\varrho_1 c_1} \alpha \right) = 0, \quad \beta \left( \omega_2 + \frac{k_2}{\varrho_2 c_2} \beta \right) = 0,$$

welche für  $\alpha$  und  $\beta$  folgende Werthe liefern:

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0, \\ \alpha_2 = \frac{\varrho_1 \omega_1 c_1}{k_1}, \quad \beta_2 = -\frac{\varrho_2 \omega_2 c_2}{k_2}.$$

Mit Hülfe dieser Werthe und mit Berücksichtigung der Bedingung (B), nach welcher, für  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 0$ ,  $u_1 = 0$  und  $u_2 = 0$  sein soll, erhält man für  $u_1$  und  $u_2$  die Ausdrücke:

$$u_1 = a \left( e^{\frac{\varrho_1 \omega_1 c_1}{k_1} x_1} - 1 \right), \quad u_2 = b \left( e^{-\frac{\varrho_2 \omega_2 c_2}{k_2} x_2} - 1 \right).$$

Diese Lösungen genügen auch der letzten Grenzbedingung unter (B), wofern zwischen  $a$  und  $b$  die Beziehung herrscht:

$$a c_1 - b c_2 = 1.$$

Die Constante  $b$  bleibt willkürlich wählbar. Ihre Bedeutung ergibt sich, wenn man  $x_2 = \infty$  setzt; man erhält dann  $u_2 = -b$ , sodass  $-b$  die Temperatur des Eises im Unendlichen bedeutet.

II. Eis und Wasser bilden einen nach beiden Seiten unendlich langen prismatischen Raum.

Die Bedingungen lauten:

$$(A) \quad \begin{cases} x_1 > 0 \left\{ k_1 Q \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \varrho_1 \omega_1 c_1 Q \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \gamma_1 S(u_1 - U) = 0, \right. \\ x_2 > 0 \left\{ k_2 Q \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \varrho_2 \omega_2 c_2 Q \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \gamma_2 S(u_2 - U) = 0, \right. \end{cases} \\ (B) \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \left\{ \begin{aligned} u_1 &= 0, \quad u_2 = 0, \quad k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \varrho_1 \omega_1 = \varrho_2 \omega_2. \end{aligned} \right.$$

Die Bedingungen (A) lehren: 1) dass  $\omega_1$  und  $\omega_2$  von  $t$  unabhängig sein müssen, 2) dass auch  $U$ , die Temperatur der Umgebung, stationär sein muss, und zwar in demselben Sinne wie  $u_1$  und  $u_2$ . Dies ist sicher der Fall, wenn  $U$  auch noch von  $x$  unabhängig, also eine Constante ist. Nehmen

wir zur weiteren Vereinfachung noch an, dass die constante Temperatur  $U$  der Umgebung den Werth Null hat, dann ergibt sich ganz auf dieselbe Weise, wie eben, folgende Lösung:

$$u_1 = a \left( e^{\frac{\rho_1 \omega_1 c_1}{2k_1} (\lambda_1 + 1) x_1} - e^{-\frac{\rho_1 \omega_1 c_1}{2k_1} (\lambda_1 - 1) x_1} \right),$$

$$u_2 = b \left( e^{-\frac{\rho_2 \omega_2 c_2}{2k_2} (\lambda_2 + 1) x_2} - e^{+\frac{\rho_2 \omega_2 c_2}{2k_2} (\lambda_2 - 1) x_2} \right),$$

Hierin muss zwischen  $a$  und  $b$  die Beziehung herrschen:

$$a c_1 \lambda_1 - b c_2 \lambda_2 = 1,$$

und es bedeutet:

$$\lambda_1 = + \sqrt{1 + \frac{4k_1 q_1}{(\rho_1 \omega_1 c_1)^2} \cdot \frac{S}{Q}}, \quad \lambda_2 = + \sqrt{1 + \frac{4k_2 q_2}{(\rho_2 \omega_2 c_2)^2} \cdot \frac{S}{Q}}.$$

Ich habe auch noch den Fall behandelt, in welchem die Temperatur  $U$  der Umgebung stationär, also eine Function von  $x$  ist. Dabei ergeben sich aber so complicirte, unübersichtliche Formeln, dass es sich nicht der Mühe lohnt, sie hier mitzutheilen.

Buchsweiler im Elsass, den 3. November 1881.

---

### III. Ueber die Beziehung des Gefrierpunktes von Salzlösungen zu deren Spannkraftsgesetze; von Franz Koláček.

---

Den Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen bildet die Thatsache, dass aus einer Salzlösung blos reines Wasser ausfriert. Die stabile Coëxistenz von festem Eis und der Salzlösung bei der Erstarrungstemperatur führt zu dem Schlusse, dass der Gefrierpunkt einer Salzlösung derjenige Punkt ist, wo Eis und Lösung dieselbe Dampfspannkraft besitzen. Die Aufgabe lässt sich dann graphisch lösen. Man construirt nach den Zahlen von Regnault über der Abscissenaxe der Temperaturen die Dampfdruckcurve des Eises, sodass die Ordinaten den Spannkraften, und der Coordinatenursprung dem Eirpunkte entspricht. Die Spannkraftscurve des reinen Wassers trifft die Eiscurve auf der