Ueber die Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische und hyperelliptische.

Von

Leo Königsberger in Wien.

Im 4ten Hefte des 86ten Bandes des Borchardt'schen Journales habe ich die Frage behandelt, ob sich von vornherein charakteristische Eigenschaften für die Moduln derjenigen elliptischen Integrale angeben lassen, auf welche sich gewisse Abel'sche Integrale von der Form

$$\int f(x, \sqrt[m]{R(x)})\, dx$$

reduciren lassen, worin f eine rationale und R eine ganze Function von x bedeutet; ich fand dort, dass, wenn ein Abel'sches Integral erster Gattung — und auf Integrale erster Gattung sind, wie ich früher gezeigt habe, alle Transformationsprobleme zurückzuführen — von der Form

$$\int \psi(x)\, (\sqrt[n]{R(x)})^r\, dx,$$

worin $n > 2$, auf ein elliptisches Integral reducirbar sein soll, dies nur für $n = 3, 4, 6$ der Fall sein kann, und zwar haben die elliptischen Integrale, auf welche sich die Integrale

$$\int \psi(x)\, (\sqrt[3]{R(x)})^r\, dx, \qquad \int \psi(x)\, (\sqrt[6]{R(x)})^r\, dx$$

reduciren lassen, wenn im ersten Falle $r = 1, 2$, im zweiten $r = 1, 2, 4, 5$ ist, den Modul der complexen Multiplication $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ oder einen aus diesem transformirten, während die elliptischen Integrale, auf welche die Abel'schen

$$\int \psi(x)\, (\sqrt[4]{R(x)})^r\, dx$$

zurückführbar sein können, worin $r = 1, 3$ ist, den complexen Multiplicationsmodul $\sqrt{\frac{1}{2}}$ oder einen aus diesem transformirten besitzen.

Mit Rücksicht auf die in der vorliegenden Arbeit folgenden Untersuchungen will ich auf Grund des in der oben citirten Arbeit bewiesenen Satzes, dass gleiche Multiplicatoren nur dann zwei verschiedenen Moduln der complexen Multiplication zugehören können, wenn die Moduln in einander transformirbar sind, und zufolge der Bemerkung, dass die elliptischen Integrale

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^3-1}}, \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{z^4-1}},$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^6-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y(y^3-1)}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} \quad \left(\text{für } y = \frac{1}{t}\right)$$

die complexe Multiplication mit den Multiplicatoren

$$\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}, \quad \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4}, \quad \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6}$$

besitzen, den obigen Satz so aussprechen, dass die Integrale von der Form

$$\int \psi(x)\,(\sqrt[3]{R(x)})^r\,dx, \quad \int \psi(x)\,(\sqrt[4]{R(x)})^r\,dx, \quad \int \psi(x)\,(\sqrt[6]{R(x)})^r\,dx,$$

mit den oben angegebenen Beschränkungen für die Zahl r sich nur auf die resp. Integrale

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^3-1}} \quad \text{und} \quad \int \frac{dz}{\sqrt{z^4-1}}$$

welche die 3^{te} und 4^{te} Einheitswurzel zu Multiplicatoren haben, reduciren lassen können.

Es blieb jedoch noch eine wichtige Frage unerledigt, nämlich *alle Abel'schen Integrale der bezeichneten Form anzugeben, welche auf elliptische Integrale reducirbar sind*, und die vollständige Beantwortung dieser Frage soll den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bilden, indem ich zugleich die Frage der Reduction selbst etwas zu verallgemeinern suchen werde.

Sei die irreductible algebraische Gleichung

$$f(x, y) = 0,$$

für welche wir die zugehörigen Abel'schen Integrale untersuchen wollen, eine algebraisch auflösbare, so dass in der bekannten Abel'schen Bezeichnungsweise y als algebraische Function μ^{ter} Ordnung dargestellt die Form hat

$$y = q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

worin $q_0, q_1, \cdots q_{n-1}$ und p algebraische Functionen $\mu - 1^{\text{ter}}$ Ordnung bedeuten, und n für die folgende Untersuchung jede positive ganze Zahl vorstellen darf; sei ferner ein Integral

$$\int F(x, y)\, dx$$

vorausgesetzt, das sich durch eine algebraische Transformation auf elliptische und hyperelliptische Integrale reduciren lässt, so dass

$$(\alpha)\quad F(x,y)\, dx = F_1\left(z_1, \sqrt{R_{2p_1+1}(z_1)}\right) dz_1 + F_2\left(z_2, \sqrt{R_{2p_2+1}(z_2)}\right) dz_2 + \cdots$$
$$+ F_\nu\left(z_\nu, \sqrt{R_{2p_\nu+1}(z_\nu)}\right) dz_\nu + u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots$$
$$+ A_\varrho \log v_\varrho$$

wird, worin

$$R_{2p_1+1}(z), \quad R_{2p_2+1}(z), \cdots R_{2p_\nu+1}(z)$$

ganze Functionen von z von dem Grade bedeuten, den der Index angiebt,

$$z_1, z_2, \cdots z_\nu, \quad u, v_1, v_2, \cdots v_\varrho$$

algebraische Functionen von x, und $A_1, A_2, \cdots A$ Constanten vorstellen.

Mit Hülfe ähnlicher Schlüsse, wie ich sie in meinen „Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale" für die Behandlung des Transformationsproblems gemacht, kann leicht gezeigt werden, dass *dann jedenfalls auch eine Beziehung von der Form existirt*

$$\delta \cdot F(x,y)\, dx = \sum_1^{p_1}{}_\alpha F_1\left(\zeta_\alpha^{(1)}, \sqrt{R_{2p_1+1}(\zeta_\alpha^{(1)})}\right) d\zeta_\alpha^{(1)}$$
$$+ \sum_1^{p_2}{}_\alpha F_2\left(\zeta_\alpha^{(2)}, \sqrt{R_{2p_2+1}(\zeta_\alpha^{(2)})}\right) d\zeta_\alpha^{(2)} + \cdots$$
$$+ \sum_1^{p_\nu}{}_\alpha F_\nu\left(\zeta_\alpha^{(\nu)}, \sqrt{R_{2p_\nu+1}(\zeta_\alpha^{(\nu)})}\right) d\zeta_\alpha^{(\nu)}$$
$$+ M + B_1 \log V_1 + \cdots + B_\sigma \log V_\sigma,$$

worin δ eine positive ganze Zahl, die Grössen

$$\zeta_1^{(r)}, \zeta_2^{(r)}, \cdots \zeta_{p_r}^{(r)}$$

Lösungen einer algebraischen Gleichung p_r^{ten} Grades sind, deren Coefficienten rational aus x und y zusammengesetzt sind, die Irrationalitäten

$$\sqrt{R_{2p_r+1}(\zeta_1^{(r)})}, \quad \sqrt{R_{2p_r+1}(\zeta_2^{(r)})}, \cdots \sqrt{R_{2p_r+1}(\zeta_{p_r}^{(r)})}$$

mit Hülfe eben dieser Grössen x und y durch die resp. Grössen $\zeta^{(r)}$ rational ausdrückbar sind, endlich die Grössen

$$U, V_1, V_2, \cdots V_\sigma$$

rationale Functionen von x und y bedeuten.

Und endlich wird ebenso, wie für die Transformation der hyperelliptischen Integrale hergeleitet worden, folgen — alle diese Sätze gelten ganz allgemein für die Transformation Abel'scher Integrale irgend eines Geschlechtes auf Abel'sche Integrale desselben oder eines andern Geschlechtes —, *dass für die Integrale erster Gattung*

$$\frac{\zeta_1^{(r)^k}\, d\zeta_1^{(r)}}{\sqrt{R_{2p_r+1}(\zeta_1^{(r)})}} + \frac{\zeta_2^{(r)^k}\, d\zeta_2^{(r)}}{\sqrt{R_{2p_r+1}(\zeta_2^{(r)})}} + \cdots + \frac{\zeta_{p_r}^{(r)^k}\, d\zeta_{p_r}^{(r)}}{\sqrt{R_{2p_r+1}(\zeta_{p_r}^{(r)})}} = F_1(x,y)\,dx$$

ist, worin k *irgend eine der Zahlen* $0, 1, 2, \cdots p_r - 1$ *bedeutet und* $F_1(x, y)\,dx$ *ein Abel'sches Differential erster Gattung vorstellt*, welches der obigen Annahme gemäss die Form haben wird

$$(\beta) \qquad \left(Q_0 + Q_1 p^{\frac{1}{n}} + Q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + Q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}\right) dx.$$

Es ist somit das ursprüngliche Problem wieder auf die Behandlung des Reductionsproblems der Integrale erster Gattung zurückgeführt, indem gezeigt worden, dass *jedenfalls zur Gleichung* $f(x, y) = 0$ *gehörige Integrale erster Gattung existiren müssen, welche auf je ein zu jedem hyperelliptischen Integrale der rechten Seite von* (α) *gehöriges System gleichartiger hyperelliptischer Integrale erster Gattung reducirbar sind oder auf je ein elliptisches Integral erster Gattung von den in der Gleichung* (α) *befindlichen elliptischen Integralen.*

Von den Integralen erster Gattung der Form (β) wollen wir für jetzt nur die Fundamentalintegrale einer näheren Untersuchung unterwerfen und als solche die in den Formen

$$\int Q_0\,dx, \quad \int Q_1 p^{\frac{1}{n}}\,dx, \quad \cdots \int Q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}\,dx$$

enthaltenen definiren; es seien die *nothwendigen und hinreichenden Bedingungen* dafür aufzustellen, dass ein Fundamentalintegral erster Gattung

$$\int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{n}}\,dx,$$

worin ϱ und n relativ prim sind, auf *ein* elliptisches Integral erster Gattung zurückgeführt werden kann, wobei wieder nach dem oben angeführten, allgemein gültigen Satze angenommen werden darf, dass die Gleichung

$$(1) \qquad \int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{n}}\,dx = \int \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}}$$

so befriedigt werden kann, dass z und $\sqrt{\varphi(z)}$ rationale Functionen von x und $Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{n}}$ sind.

Ich könnte nun auf die aus der Theorie der complexen Multiplication hergeleiteten Resultate meiner oben erwähnten Arbeit mich stützend, unmittelbar schliessen, dass n nur die Werthe 2, 3, 4, 6 haben kann, ziehe es jedoch vor an dieser Stelle jenes Resultat noch einmal in einer etwas veränderten Form abzuleiten, wie es für den Uebergang zur Reduction auf hyperelliptische Integrale sich als nothwendig erweisen wird.

Lässt man nämlich die Variable x einen geschlossenen Umkreis von der Art beschreiben, dass $p^{\frac{\varrho}{n}}$ in den Werth $\alpha p^{\frac{\varrho}{n}}$ übergeht, worin

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

ist, und gehe vermöge des vorausgesetzten rationalen Zusammenhanges

$$z \text{ in } \zeta, \quad \sqrt{\varphi(z)} \text{ in } \sqrt{\varphi(\zeta)}$$

über, so wird sich die Beziehung ergeben

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{\varphi(\zeta)}} = \alpha \cdot \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}}, \tag{2}$$

für welche z und ζ durch eine algebraische Gleichung mit einander verbunden sind. Setzt man die Polynome $\varphi(z)$ und $\varphi(\zeta)$ in der Legendre'schen Normalform voraus — was nur der Kürze halber wegen der folgenden Einführung des ϑ-Moduls geschieht —, so liefert bekanntlich die Bedingung der algebraischen Beziehung zwischen z und ζ für die Perioden des elliptischen Integrales die Relationen

$$m\omega = \alpha r\,\omega + \alpha s\,\omega',$$
$$m\omega' = \alpha r'\omega + \alpha s'\omega',$$

worin m, r, s, r', s' positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, oder

$$\begin{vmatrix} \alpha r - m & \alpha s \\ \alpha r' & \alpha s' - m \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. *es muss α die Lösung einer ganzzahligen quadratischen Gleichung sein.* Nun kann aber $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ nur die Lösung einer quadratischen ganzzahligen Gleichung sein, wenn $n = 2, 3, 4, 6$ ist, und diese Gleichungen lauten, wenn der Fall $n = 2$ ausgeschlossen wird,

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \quad \alpha^2 + 1 = 0, \quad \alpha^2 - \alpha + 1 = 0;$$

daraus ist aber auch die Form der zugehörigen Moduln der ϑ-Functionen sofort zu erkennen, denn aus den oben aufgestellten Periodenbeziehungen folgt durch Elimination von α, wenn $\frac{2\omega'}{\omega} = \tau$ gesetzt wird, die quadratische Gleichung

$$s \cdot \tau^2 + 2(r - s') \cdot \tau - 4r' = 0$$

also

$$\tau = -\frac{r-s'}{s} + \frac{1}{s}\sqrt{(r-s')^2 + 4r's} = -\frac{r-s'}{s} + \frac{1}{s}\sqrt{(r+s')^2 - 4(r's - rs')},$$

und da vermöge der obigen Bestimmungsgleichungen für α die drei Relationen zwischen den Transformationscoefficienten gelten müssen

$$\frac{m(r+s')}{rs'-r's} = -1, 0, 1, \qquad \frac{m^2}{rs'-r's} = 1,$$

so folgt leicht, dass die ϑ-Moduln in den drei in Frage kommenden Fällen die beiden verschiedenen Formen haben werden

$$\tau = -\frac{r-s'}{s} + \frac{m}{s}\sqrt{-3} \quad \text{und} \quad \tau = -\frac{2r}{s} + \frac{2m}{s}\sqrt{-1}.$$

Beachtet man ferner, dass, wenn zwei Gleichungen von der Form

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{\varphi(\zeta)}} = \alpha\frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}} \quad \text{und} \quad \frac{d\zeta_1}{\sqrt{\varphi_1(\zeta_1)}} = \alpha\frac{dz_1}{\sqrt{\varphi_1(z_1)}}$$

zu gleicher Zeit bestehen, die entsprechenden Periodenbeziehungen

$$m\omega = \alpha r\omega + \alpha s\omega', \qquad m_1\omega_1 = \alpha r_1\omega_1 + \alpha s_1\omega_1'$$

zwischen den ϑ-Moduln

$$\frac{2\omega'}{\omega} = \tau, \quad \frac{2\omega_1'}{\omega_1} = \tau_1$$

die Beziehung liefern

$$\tau_1 = \frac{m_1 s\tau + 2(rm_1 - r_1 m)}{ms_1},$$

und jeder linearen Beziehung zwischen ϑ-Moduln auch wirklich eine algebraische Transformation entspricht, so wird immer, wenn überhaupt eine Reduction auf elliptische Integrale möglich, diese Reduction auch auf die Integrale

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z^3-1}}, \quad \int\frac{dz}{\sqrt{z^4-1}}, \quad \int\frac{dz}{\sqrt{z^6-1}} = \frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{y(y^3-1)}} = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$$

ausführbar sein, und es folgt somit der Satz,

dass wenn ein Abel'sches Fundamentalintegral erster Gattung von der Form

$$\int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{n}}\,dx$$

auf ein elliptisches Integral reducirbar sein soll, dies nur für $n=2, 3, 4, 6$ *der Fall sein kann, und zwar werden für* $n=3, 4, 6$ *die beiden einzigen Formen der reducirten elliptischen Integrale*

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z^3-1}} \quad \text{und} \quad \int\frac{dz}{\sqrt{z^4-1}}$$

sein.

Es wird sich jetzt darum handeln, die Form aller jener reducirbaren Abel'schen Integrale festzustellen und die Transformationen anzugeben, welche diese Reduction leisten — eine Aufgabe, die vollständig gelöst werden soll für den Fall, dass Q_ϱ und p algebraische

Functionen 0^{ter} Ordnung sind oder dass die zu untersuchenden Abel'schen Integrale von der Form sind

$$\int \psi(x) \left(\sqrt[n]{R(x)}\right)^{\varrho} dx.$$

Legen wir zuerst die Reductionsgleichung

$$\int Q_1 p^{\frac{1}{2}} dx = \int \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}} \tag{3}$$

unserer Betrachtung zu Grunde, aus welcher eine Bedingung für das Polynom $\varphi(z)$ sich aus der Theorie der complexen Multiplication der elliptischen Functionen nicht ergiebt, und lässt man x einen geschlossenen Weg von der Art beschreiben, dass $p^{\frac{1}{2}}$ den entgegengesetzten Werth annimmt, während z und $\sqrt{\varphi(z)}$ in ζ und $\sqrt{\varphi(\zeta)}$ übergehen, so erhält man

$$2\int Q_1 p^{\frac{1}{2}} dx = \int \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}} - \int \frac{d\zeta}{\sqrt{\varphi(\zeta)}}$$

und daher, wenn

$$\varphi(z) = (1-z^2)(1-k^2 z^2)$$

gesetzt wird,

$$2\int Q_1 p^{\frac{1}{2}} dx = \int \frac{dZ}{\sqrt{\varphi(Z)}}, \tag{4}$$

worin bekanntlich Z sich als das Product einer in x und $Q_1{}^2 p$ rationalen Function in $Q_1 p^{\frac{1}{2}}$ darstellt, während $\sqrt{\varphi(Z)}$ eine rationale Function von x und $Q_1{}^2 p$ bedeutet. Es ist aber auch leicht zu sehen, dass, wenn

$$Z = f_1(x, Q_1{}^2 p) Q_1 p^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{\varphi(Z)} = f_2(x, Q_1{}^2 p) \tag{5}$$

ist, wegen

$$dZ = \left[\frac{df_1(x, Q_1{}^2 p)}{dx} + \frac{1}{2} \frac{f_1(x, Q_1{}^2 p) \frac{d(Q_1{}^2 p)}{dx}}{Q_1{}^2 p}\right] Q_1 p^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\frac{dZ}{\sqrt{\varphi(Z)}} = F(x) Q_1 p^{\frac{1}{2}} dx$$

wird, worin $F(x)$ eine algebraische Function μ^{ter} Ordnung bedeutet, sich also ein auf elliptische Integrale reducirbares Abel'sches Integral der betrachteten Art ergiebt. Es ist die Untersuchung somit auf die Erfüllung der Gleichungen (5) zurückgeführt, oder darauf, dass

$$\sqrt{(1-f_1(x, Q_1{}^2 p)^2 Q_1{}^2 p)(1-k^2 f_1(x, Q_1{}^2 p)^2 Q_1{}^2 p)}$$

sich als rationale Function von x und $Q_1{}^2 p$ darstellen lässt.

Betrachten wir den speciellen Fall, dass $Q_1{}^2 p$ eine algebraische

Function 0^{ter} Ordnung, also eine rationale Function ist, so würde eine Function

$$Z = f(x)\sqrt{R(x)},$$

worin $f(x)$ eine rationale Function und $R(x)$ eine ganze Function von x bedeutet, so zu bestimmen sein, dass

$$\sqrt{[1-f^2(x)\,R(x)]\,[1-k^2 f^2(x)\,R(x)]},$$

worin die Constanten in $f(x)$, in $R(x)$ und k selbst passend zu wählen sind, eine rationale Function von x wird, oder *es werden jene unbestimmten Coefficienten der Bedingung genügen müssen, dass*

$$(1-f^2(x)\,R(x))\,(1-k^2 f^2(x)\,R(x))$$

nur Doppelfactoren besitzt; alle diese und nur diese Fälle werden die auf je ein elliptisches Integral reducirbaren hyperelliptischen Integrale erster Gattung liefern; zugleich ist mit diesen Integralen die Substitution gefunden, welche sie in die elliptischen Integrale überführt.

Wie das Problem für den oben zu Grunde gelegten Fall der algebraischen Function μ^{ter} Ordnung weiter zu behandeln ist, soll hier nicht näher erörtert werden; ich gebe die dabei in Anwendung kommenden Betrachtungsweisen in einer im 3^{ten} Hefte des 87^{ten} Bandes des Borchardt'schen Journals demnächst erscheinenden Arbeit über die „Erweiterung des Jacobi'schen Transformationsprincips" ausführlich an, in welcher die Unmöglichkeit der algebraischen Transformation für Abel'sche Integrale, deren $p > 2$ ist, nachgewiesen wird, eine Untersuchung, die mit dem Gegenstande der vorliegenden Arbeit in engem Zusammenhange steht.

Ich gehe jetzt zur Untersuchung der Gleichung

$$(6)\qquad \int Q_\varrho\, p^{\frac{\varrho}{3}}\, dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^3-1}}$$

über, in welcher ϱ die Werthe 1 oder 2 annehmen darf und z sowie $\sqrt{z^3-1}$ wiederum als rationale Functionen von x und $Q_\varrho\, p^{\frac{\varrho}{3}}$ betrachtet werden dürfen. Dies Problem lässt eine bedeutende und für das Nachfolgende sehr wesentliche Vereinfachung zu.

Aus (6) gehen nämlich, wenn x geschlossene Wege durchläuft, welche, wenn $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ gesetzt wird, $p^{\frac{1}{3}}$ successive in $\alpha p^{\frac{1}{3}}$ und $\alpha^2 p^{\frac{1}{3}}$ überführen, die Beziehungen hervor

$$(7)\quad Q_\varrho\, p^{\frac{\varrho}{3}}\, dx = \frac{dz_1}{\sqrt{z_1^3-1}},\quad \alpha\, Q_\varrho\, p^{\frac{\varrho}{3}}\, dx = \frac{dz_2}{\sqrt{z_2^3-1}},\quad \alpha^{2\varrho} Q_\varrho\, p^{\frac{\varrho}{3}}\, dx = \frac{dz_3}{\sqrt{z_3^3-1}},$$

in welchen

$$(8)\quad \begin{cases} z_1 = f\left(x,\ Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}}\right), & \sqrt{z_1^3 - 1} = F\left(x,\ Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}}\right), \\ z_2 = f\left(x,\ \alpha^\varrho Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}}\right), & \sqrt{z_2^3 - 1} = F\left(x,\ \alpha^\varrho Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}}\right), \\ z_3 = f\left(x, \alpha^{2\varrho} Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}}\right), & \sqrt{z_3^3 - 1} = F\left(x, \alpha^{2\varrho} Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}}\right) \end{cases}$$

ist, worin f und F rationale Functionen der in ihnen enthaltenen Grössen und zwar in den drei Gleichungssystemen dieselben bedeuten.

Nun folgt aber aus (7) durch Addition der drei mit $1, \alpha^{-\varrho}, \alpha^{-2\varrho}$ multiplicirten Gleichungen

$$(9)\qquad 3 Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}}\, dx = \frac{dz_1}{\sqrt{z_1^3 - 1}} + \alpha^{-\varrho} \frac{dz_2}{\sqrt{z_2^3 - 1}} + \alpha^{-2\varrho} \frac{dz_3}{\sqrt{z_3^3 - 1}},$$

und vermöge der mit Hilfe der Substitutionen

$$z_1 = Z_1, \quad z_2 = \alpha^\varrho Z_2, \quad z_3 = \alpha^{2\varrho} Z_3$$

hergeleiteten complexen Multiplicationsgleichungen

$$\frac{dz_1}{\sqrt{z_1^3 - 1}} = \frac{dZ_1}{\sqrt{Z_1^3 - 1}}, \quad \frac{dz_2}{\sqrt{z_2^3 - 1}} = \frac{\alpha^\varrho\, dZ_2}{\sqrt{Z_2^3 - 1}}, \quad \frac{dz_3}{\sqrt{z_3^3 - 1}} = \frac{\alpha^{2\varrho}\, dZ_3}{\sqrt{Z_3^3 - 1}}$$

die Beziehung

$$(10)\qquad 3 Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}}\, dx = \frac{dZ_1}{\sqrt{Z_1^3 - 1}} + \frac{dZ_2}{\sqrt{Z_2^3 - 1}} + \frac{dZ_3}{\sqrt{Z_3^3 - 1}},$$

worin, wenn der Kürze halber $Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}} = y$ gesetzt wird, den Gleichungen (8) zufolge

$$(11)\quad \begin{cases} Z_1 = f(x, y) \quad, & \sqrt{Z_1^3 - 1} = F(x, y) \quad, \\ Z_2 = \alpha^{2\varrho} f(x,\ \alpha^\varrho y), & \sqrt{Z_2^3 - 1} = F(x,\ \alpha^\varrho y), \\ Z_3 = \alpha^\varrho f(x, \alpha^{2\varrho} y), & \sqrt{Z_3^3 - 1} = F(x,\ \alpha^{2\varrho} y), \end{cases}$$

sein wird.

Setzen wir nun zur Addition der drei elliptischen Integrale der Gleichung (10) nach dem Abel'schen Theorem

$$(12)\qquad a_2 z^2 + a_1 z + a_0 - b\sqrt{z^3 - 1} = 0,$$

welcher Gleichung die drei Werthe Z_1, Z_2, Z_3 mit den zugehörigen Irrationalitäten genügen sollen, so folgen nach (11), wie man leicht sieht, für die Constanten a_0, a_1, a_2, b die drei Bestimmungsgleichungen

$$(12)\quad\begin{cases} a_2(P_2+Q_2y+R_2y^2)+a_1(P_1+Q_1y+R_1y^2) \\ \qquad\qquad +a_0-b(\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}y+\mathfrak{R}y^2)=0, \\ a_2\alpha^\varrho(P_2+\alpha^\varrho Q_2y+\alpha^{2\varrho}R_2y^2)+a_1\alpha^{2\varrho}(P_1+\alpha^\varrho Q_1y+\alpha^{2\varrho}R_1y^2) \\ \qquad\qquad +a_0-b(\mathfrak{P}+\alpha^\varrho\mathfrak{Q}y+\alpha^{2\varrho}\mathfrak{R}y^2)=0, \\ a_2\alpha^{2\varrho}(P_2+\alpha^{2\varrho}Q_2y+\alpha^\varrho R_2y^2)+a_1\alpha^\varrho(P_1+\alpha^{2\varrho}Q_1y+\alpha^\varrho R_1y^2) \\ \qquad\qquad +a_0-b(\mathfrak{P}+\alpha^{2\varrho}\mathfrak{Q}y+\alpha^\varrho\mathfrak{R}y^2)=0, \end{cases}$$

worin die Grössen

$$P_2,\ Q_2,\ R_2,\ P_1,\ Q_1,\ R_1\ ,\mathfrak{P}_1,\ \mathfrak{Q}_1,\ \mathfrak{R}_1$$

rationale Functionen von x und $y^3=Q_\varrho{}^3p^\varrho$ sind.

Multiplicirt man nun das Gleichungssystem (12) der Reihe nach mit

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1, \\ 1 & \alpha^\varrho & \alpha^{2\varrho}, \\ 1 & \alpha^{2\varrho} & \alpha^\varrho, \end{matrix}$$

und addirt je drei Gleichungen, so folgt

$$\begin{aligned} a_2R_2y^2+a_1Q_1y+a_0\cdot 1-b\mathfrak{P}\ &=0, \\ a_2Q_2y^2+a_1P_1\ +a_0\cdot 0-b\mathfrak{R}y^2&=0, \\ a_2P_2\ +a_1R_1y^2+a_0\cdot 0-b\mathfrak{Q}y&=0, \end{aligned}$$

und hieraus wiederum durch Multiplication der drei Gleichungen mit $1, y, y^2$, wenn ausserdem die eine Constante $a_2=1$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} a_1\cdot L_1y+a_0\cdot 1-b\cdot M_1&=N_1y^2, \\ a_1\cdot L_2y+a_0\cdot 0-b\cdot M_2&=N_2y^2, \\ a_1\cdot L_3y+a_0\cdot 0-b\cdot M_3&=N_3y^2, \end{aligned}$$

worin

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ M_1,\ M_2,\ M_3,\ N_1,\ N_2,\ N_3$$

wiederum rationale Functionen von x und $y^3=Q_\varrho{}^3p^\varrho$ sind. Somit wird also, wenn U, V, W den Charakter ebensolcher Functionen haben,

$$(13)\qquad a_1=U\cdot y,\quad a_0=V\cdot y^2,\quad b=W\cdot y^2$$

sein und sich daher vermöge der Gleichung

$$(z^2+a_1z+a_0)^2-b^2(z^3-1)=(z-Z_1)(z-Z_2)(z-Z_3)(z-Z),$$

aus welcher für $z=0$

$$a_0{}^2+b^2=Z_1Z_2Z_3Z$$

hervorgeht, nach (11) und vermöge des Umstandes, dass

$$Z_1Z_2Z_3=f(x,y)\cdot f(x,\alpha^\varrho y)\,f(x,\alpha^{2\varrho}y)$$

sich als rationale symmetrische Function von y, $\alpha^\varrho y$, $\alpha^{2\varrho}y$ rational durch x und y^3 ausdrücken lässt, die Bestimmungsgleichung

$$(14)\qquad Z=T\cdot y$$

ergeben, worin T eine rationale Function von x und $Q_\varrho{}^3 p^\varrho$ bedeutet, und Z der Gleichung genügt

$$\frac{dZ_1}{\sqrt{Z_1{}^3-1}}+\frac{dZ_2}{\sqrt{Z_2{}^3-1}}+\frac{dZ_3}{\sqrt{Z_3{}^3-1}}=\frac{dZ}{\sqrt{Z^3-1}}.$$

Zugleich folgt aus der Gleichung (12) die zu Z gehörige Irrationalität in der Form

$$\sqrt{Z^3-1}=\frac{Z^2+a_1Z+a_0}{b}$$

oder nach (13)

$$\sqrt{Z^3-1}=\frac{T^2+TU+V}{W}=T_1$$

eine rationale Function von x und $Q_\varrho{}^3 p^\varrho$.

Wir erhalten somit den Satz, dass, *wenn ein Abel'sches Integral von der Form* $\int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}}\,dx$ *auf ein elliptisches Integral reducirbar sein soll, die Reductionsgleichung*

$$\int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}}\,dx=\int\frac{dZ}{\sqrt{Z^3-1}}$$

lauten muss, in welcher

$$Z=T\cdot Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{3}}\quad\text{und}\quad\sqrt{Z^3-1}=T_1$$

sind, wenn T und T_1 rationale Functionen von x und $Q_\varrho{}^3 p^\varrho$ bedeuten.

Betrachten wir jetzt wieder den Fall, in welchem Q_ϱ und p rationale Functionen von x bedeuten, so dass es sich um die Gleichung

$$(15)\qquad \int\psi(x)\,(\sqrt[3]{R(x)})^\varrho\,dx=\int\frac{dZ}{\sqrt{Z^3-1}}$$

handelt, worin, wie eben gezeigt worden,

$$(16)\qquad Z=f(x)\,(\sqrt[3]{R(x)})^\varrho,\quad \sqrt{Z^3-1}=F(x)$$

sein muss, wenn $f(x)$ und $F(x)$ rationale Functionen, $R(x)$ eine ganze Function von x bedeutet, und suchen wir nunmehr alle möglichen Formen von $\psi(x)$ und $R(x)$ anzugeben, für welche eine Reduction auf ein elliptisches Integral möglich ist. Da nun aus (16)

$$dZ=\left(\frac{\varrho}{3}f(x)\frac{R'(x)}{R(x)}+f'(x)\right)(\sqrt[3]{R(x)})^\varrho\,dx,$$

also

$$(17)\qquad \frac{dZ}{\sqrt{Z^3-1}}=\frac{\frac{\varrho}{3}f(x)R'(x)+f'(x)R(x)}{R(x)\,F(x)}\,(\sqrt[3]{R(x)})^\varrho\,dx$$

folgt, die Existenz der Gleichungen (16) somit immer eine solche Reductionsformel für die betrachtete Gattung Abel'scher Integrale nach sich zieht, so wird das Problem jetzt darauf reducirt sein, Z der ersten der Gleichungen (16) gemäss so zu bestimmen, dass $\sqrt{Z^3-1}$ eine rationale Function von x wird, oder $f(x)$ *und* $R(x)$ *so zu wählen, dass*

$$\sqrt{f(x)^3\,R(x)^\varrho - 1}$$

rational in x *ausdrückbar ist; sind die Constanten in* $f(x)$ *und* $R(x)$ *so bestimmt, dass der Ausdruck unter der Wurzel nur Doppelfactoren besitzt, so liefert für das nach Gleichung* (17) *hergestellte Abel'sche Integral die erste der Gleichungen* (16) *die zugehörige Transformation, und sämmtliche Abel'schen Integrale dieser Form, welche auf elliptische Integrale reducirbar sind, werden durch den Ausdruck dargestellt*

$$\int \frac{\frac{\varrho}{3}\,f(x)R'(x)+f'(x)R(x)}{R(x)\sqrt{f(x)^3R(x)^\varrho-1}}\,(\sqrt[3]{R(x)})^\varrho\,dx.$$

Man findet leicht durch Abzählung der in $f(x)$ und $R(x)$ enthaltenen Constanten und Zusammenstellung dieser Zahl mit der Anzahl der durch die Existenz der Doppelfactoren geforderten Bedingungsgleichungen, dass nur wenn $R(x)$ vom dritten oder einem niedrigeren Grade ist, die Reduction auf elliptische Integrale stets möglich wird, dass jedoch, wenn der Grad dieses Polynoms grösser als 3 ist, zwischen den Coefficienten desselben gewisse Bedingungen stattfinden müssen, welche durch die obige Methode unmittelbar gegeben werden.

Genau dieselbe Entwickelung liefert für die Existenz der Gleichung

$$\int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{6}}\,dx = \int \frac{dZ}{\sqrt{Z(Z^3-1)}}$$

die Beziehungen

$$Z = T\cdot y^2, \qquad \sqrt{Z(Z^3-1)} = U\cdot y,$$

wenn $Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{6}} = y$ gesetzt wird und T und U rationale Functionen von x und $y^6 = Q_\varrho{}^6 p^\varrho$ bedeuten. Sind wieder Q_ϱ und p rationale Functionen, so folgen für die Gleichung

$$\int \psi(x)(\sqrt[6]{R(x)})^\varrho\,dx = \int \frac{dZ}{\sqrt{Z(Z^3-1)}} \tag{18}$$

die nothwendigen Beziehungen

$$Z = f(x)\,(\sqrt[3]{R(x)})^\varrho \quad \text{und} \quad \sqrt{Z(Z^3-1)} = F(x)\,(\sqrt[6]{R(x)})^\varrho, \tag{19}$$

in welchen $f(x)$ und $F(x)$ rationale Functionen von x sind. Da aber aus (19) wiederum

$$\frac{dZ}{\sqrt{Z(Z^3-1)}} = \frac{\frac{\varrho}{3}\,f(x)R'(x)-f'(x)R(x)}{R(x)F(x)}\,(\sqrt[6]{R(x)})^\varrho\,dx$$

folgt, so wird man zur Auffindung *aller* zur 6^{ten} Wurzel gehörigen Abel'schen Fundamentalintegrale erster Gattung der obigen Art, nur *die rationale Function* $f(x)$ *und die ganze Function* $R(x)$ *so zu bestimmen brauchen, dass*

$$f(x)\,[f(x)^3 R(x)^\varrho - 1]$$

ein vollständiges Quadrat wird; man erhält dann alle Integrale mit den zugehörigen Substitutionen.

Gehen wir endlich zur Untersuchung der Gleichung

$$\int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}\,dx = \int \frac{dz}{\sqrt{z^4-1}}$$

über, für welche die Untersuchung theils der Einfachheit wegen theils aber auch wegen der weiteren Reductionsfragen auf hyperelliptische Integrale in etwas veränderter Form geführt werden soll.

Genau in der früheren Weise erhält man aus den 4 Gleichungen

$$Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}\,dx = \frac{dz_1}{\sqrt{z_1^4-1}},\quad i^\varrho Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}\,dx = \frac{dz_2}{\sqrt{z_2^4-1}},\quad -\,Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}\,dx = \frac{dz_3}{\sqrt{z_3^4-1}},$$

$$-i^\varrho Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}\,dx = \frac{dz_4}{\sqrt{z_4^4-1}}$$

die Beziehung

$$(20)\qquad 4\,Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}\,dx = \frac{dz_1}{\sqrt{z_1^4-1}} + i^{-\varrho}\frac{dz_2}{\sqrt{z_2^4-1}} - \frac{dz_3}{\sqrt{z_3^4-1}} - i^{-\varrho}\frac{dz_4}{\sqrt{z_4^4-1}},$$

worin, wenn zur Abkürzung $Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}} = y$ gesetzt wird,

$$(21)\qquad \begin{cases} z_1 = f(x, y) & \sqrt{z_1^4 - 1} = F(x, y), \\ z_2 = f(x, i^\varrho y) & \sqrt{z_2^4 - 1} = F(x, i^\varrho y), \\ z_3 = f(x, -y) & \sqrt{z_3^4 - 1} = F(x, -y), \\ z_4 = f(x, -i^\varrho y) & \sqrt{z_4^4 - 1} = F(x, -i^\varrho y) \end{cases}$$

ist.

Bildet man nun

$$\frac{dz_1}{\sqrt{z_1^4-1}} - \frac{dz_3}{\sqrt{z_3^4-1}} = \frac{dZ_1}{\sqrt{Z_1^4-1}}$$

nach dem Abel'schen Theorem, indem wir

$$(z-1)\,(a_1 z + a_0) - b\sqrt{z^4-1} = 0$$

setzen, so findet man leicht mit Berücksichtigung der Gleichungen (21) genau in der früher angegebenen Weise, wenn U und V rationale Functionen von x und $Q_\varrho^2 p^{\frac{\varrho}{2}}$ bedeuten, für die Coefficienten die Bestimmungen

$$a_0 = 1, \quad a_1 = U, \quad b = V \cdot y,$$

sodass aus der Gleichung

$$(z-1)^2 (a_1 z + 1)^2 - b^2 (z^4 - 1) = (z-1)(z-z_1)(z-z_3)(z-Z_1)$$

für $z = 0$

$$Z_1 = \frac{1-b^2}{z_1 z_3} = T$$

folgt, während sich

$$\sqrt{Z_1^4 - 1} = \frac{(Z_1 - 1)(a_1 Z_1 + 1)}{b} = T_1 \cdot y$$

ergiebt, worin wieder T und T_1 rationale Functionen von x und $y^2 = Q_\varrho^2 p^{\frac{\varrho}{2}}$ bedeuten.

Genau ebenso wird offenbar

$$\frac{dz_2}{\sqrt{z_2^4 - 1}} - \frac{dz_4}{\sqrt{z_4^4 - 1}} = \frac{dZ_2}{\sqrt{Z_2^4 - 1}}$$

folgen, worin die Werthe von Z_2 und $\sqrt{Z_2^4 - 1}$ aus den früheren hervorgehen, wenn nur $i^\varrho y$ an die Stelle von y gesetzt wird, und sich daher

$$Z_2 = T', \quad \sqrt{Z_2^4 - 1} = i^\varrho T_1' y$$

ergiebt, wenn T' und T_1' die entsprechenden rationalen Functionen von x und $-y^2 = -Q_\varrho^2 p^{\frac{\varrho}{2}}$ sind.

Aus der Gleichung (20) folgt aber

$$4 Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}} dx = \frac{dZ_1}{\sqrt{Z_1^4 - 1}} + i^{-\varrho} \frac{dZ_2}{\sqrt{Z_2^4 - 1}}$$

oder, wenn

$$Z_2 = i_\varrho Z_1'$$

gesetzt wird,

$$4 Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}} dz = \frac{dZ_1}{\sqrt{Z_1^4 - 1}} + \frac{dZ_1'}{\sqrt{Z_1'^4 - 1}},$$

worin

$$Z_1 = \quad T = t + uy^2, \qquad \sqrt{Z_1^4 - 1} = T_1 y = y(t_1 + u_1 y^2),$$

$$Z_1' = i^{-\varrho} T' = i^{-\varrho}(t - uy^2), \quad \sqrt{Z_1'^4 - 1} = i^\varrho T_1' y = i^\varrho y (t_1 - u_1 y^2)$$

und t, u, t_1, u_1 rationale Functionen von x und $y^4 = Q_\varrho^4 p^\varrho$ sind.

Setzt man aber

$$\frac{dZ_1}{\sqrt{Z_1^4 - 1}} + \frac{dZ_1'}{\sqrt{Z_1'^4 - 1}} = \frac{dZ}{\sqrt{Z^4 - 1}},$$

so ist nach dem Additionstheorem

$$Z = \frac{Z_1 \sqrt{Z_1'^4 - 1} + Z_1' \sqrt{Z_1^4 - 1}}{1 + Z_1^2 Z_1'^2}$$

oder wie unmittelbar zu sehen,

$$Z = L \cdot y^3$$

und ebenso

$$\sqrt{Z^4 - 1} = M \cdot y^2,$$

worin L und M rationale Functionen von x und $y^4 = Q_3{}^4 p^\varrho$ bedeuten.

Wir sehen somit, dass, wenn ein Abel'sches Fundamentalintegral erster Gattung der betrachteten Art auf ein elliptisches Integral reducirbar sein soll, die Transformationsgleichung

$$\int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}\, dx = \int \frac{dZ}{\sqrt{Z^4 - 1}}$$

lauten muss, worin

$$Z = L \cdot Q_\varrho{}^3 p^{\frac{3\varrho}{4}}, \quad \sqrt{Z^4 - 1} = M Q_\varrho{}^2 p^{\frac{\varrho}{2}}$$

ist, und L und M rationale Functionen von x und $Q_\varrho{}^4 p^\varrho$ bedeuten.

Aber es lässt sich noch eine weitere Transformation mit dieser Beziehung vornehmen; setzt man nämlich $-p^{\frac{1}{4}}$ statt $p^{\frac{1}{4}}$, so erhält man

$$-\int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}\, dx = \int \frac{dZ'}{\sqrt{Z'^4 - 1}}$$

worin

$$Z' = -L Q_\varrho{}^3 p^{\frac{3\varrho}{4}}, \quad \sqrt{Z'^4 - 1} = M Q_\varrho{}^2 p^{\frac{\varrho}{2}},$$

und durch Subtraction der beiden Integralgleichungen nach dem Additionstheorem

$$2\int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}\, dx = \int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^4 - 1}},$$

worin, wie leicht zu entwickeln,

$$\zeta = U \cdot Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}, \quad \sqrt{\zeta^4 - 1} = V$$

wird, und U und V rationale Functionen von x und $Q_\varrho{}^4 p^\varrho$ bedeuten.

Führen wir somit die früher gebrauchten Bezeichnungen wieder ein, so *ergiebt sich für die als nothwendig erkannte Gestalt der Reductionsformel*

$$\int Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}\, dx = \int \frac{dZ}{\sqrt{Z^4 - 1}}$$

die Beziehung

$$Z = T \cdot Q_\varrho p^{\frac{\varrho}{4}}, \quad \sqrt{Z^4 - 1} = T_1,$$

worin T und T_1 rational aus x und $Q_\varrho{}^4 p^\varrho$ zusammengesetzt sind.

Sind jetzt wiederum Q_ϱ und p rationale Functionen von x, handelt es sich also um die Beziehung

$$\int \psi(x)\, (\sqrt[4]{R(x)})^\varrho\, dx = \int \frac{dZ}{\sqrt{Z^4 - 1}},$$

in welcher
$$Z = f(x)\,(\sqrt[4]{R(x)})^{\varrho}, \quad \sqrt{Z^4 - 1} = F(x),$$
und $f(x)$ und $F(x)$ rationale Functionen von x bedeuten, so folgt wieder unmittelbar, dass, weil aus diesen letzten Bestimmungsgleichungen
$$\frac{dZ}{\sqrt{Z^4 - 1}} = \frac{\frac{\varrho}{4}\, f(x) R'(x) + f'(x) R(x)}{R(x)\, F(x)}\, (\sqrt[4]{R(x)})^{\varrho}\, dx$$
sich ergiebt, *alle jene reducirbaren Fundamentalintegrale erhalten werden, wenn man die in*
$$f(x)^4\, R(x)^{\varrho} - 1$$
enthaltenen Constanten so bestimmt, dass dieses Polynom nur Doppelfactoren enthält.

Somit wäre die Frage nach den auf je ein elliptisches Integral reducirbaren Fundamentalintegralen erster Gattung der obigen Art vollständig beantwortet, da die Form derselben und die Transformationen selbst festgestellt worden sind.

Gehen wir noch in Kurzem auf die Frage der Reduction der Abel'schen Integrale erster Gattung von der Form
$$\int \psi(x)\, (\sqrt[n]{R(x)})^r\, dx$$
auf hyperelliptische Integrale derselben Gattung näher ein — es handelte sich, wie gezeigt worden, stets nur um das Transformationsproblem der Integrale *erster Gattung* — so wird die zu untersuchende Gleichung nach den am Anfange dieser Arbeit gemachten Auseinandersetzungen folgendermassen lauten
$$(22)\quad \int \psi(x) (\sqrt[n]{R(x)})^r\, dx = \int \frac{f(z_1)\, dz_1}{\sqrt{\varphi(z_1)}} + \int \frac{f(z_2)\, dz_2}{\sqrt{\varphi(z_2)}} + \cdots + \int \frac{f(z_p)\, dz_p}{\sqrt{\varphi(z_p)}},$$
worin $f(z)$ eine ganze Function höchstens vom $p - 1^{\text{ten}}$ Grade bedeutet, $\varphi(z)$ ein ganzes Polynom vom $2p + 1^{\text{ten}}$ Grade ist, und
$$z_1,\ z_2,\ \cdots z_p$$
die Lösungen einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades
$$(23)\quad z^p + f_1\big(x, (\sqrt[n]{R(x)})^r\big)\, z^{p-1} + \cdots + f_p\big(x, (\sqrt[n]{R(x)})^r\big) = 0$$
sind, deren Coefficienten rational in x und $(\sqrt[n]{R(x)})^r$ ausgedrückt sind, während die zugehörigen Irrationalitäten durch die Gleichung bestimmt sind
$$(23\text{a})\quad \sqrt{\varphi(z_r)} = F\big(z_r,\ x,\ (\sqrt[n]{R(x)})^r\big),$$
in der F eine rationale Function bedeutet.

Nimmt man r wiederum relativ prim zu n an, und lässt x einen geschlossenen Umkreis derart beschreiben, dass $(\sqrt[n]{R(x)})^r$ in

$$e^{\frac{2\pi i}{n}}(\sqrt[n]{R(x)})^r = \alpha(\sqrt[n]{R(x)})^r$$

übergeht — die Wahl grade dieses Umkreises geschieht nur der Kürze der Darstellung halber — so mögen

$$z_1, z_2, \cdots z_p, \sqrt{\varphi(z_1)}, \sqrt{\varphi(z_2)}, \cdots \sqrt{\varphi(z_p)}$$

in

$$\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_p, \sqrt{\varphi(\zeta_1)}, \sqrt{\varphi(\zeta_2)}, \cdots \sqrt{\varphi(\zeta_p)}$$

übergehen, und wir erhalten die Beziehung

$$(24) \quad \alpha\int\psi(x)(\sqrt[n]{R(x)})^r dx = \int\frac{f(\zeta_1)d\zeta_1}{\sqrt{\varphi(\zeta_1)}} + \int\frac{f(\zeta_2)d\zeta_2}{\sqrt{\varphi(\zeta_2)}} + \cdots + \int\frac{f(\zeta_p)d\zeta_p}{\sqrt{\varphi(\zeta_p)}},$$

welche mit (22) verbunden die Gleichung

$$(25) \quad \sum_1^p {}_r \int\frac{f(\zeta_r)\,d\zeta_r}{\sqrt{\varphi(\zeta_r)}} = \alpha\sum_1^p {}_r \int\frac{f(z_r)\,dz_r}{\sqrt{\varphi(z_r)}}$$

liefert, worin $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_p$ die Lösungen der algebraischen Gleichung

$$(26) \quad \zeta^p + f_1\left(x, \alpha(\sqrt[n]{R(x)})^r\right)\zeta^{p-1} + \cdots + f_p\left(x, \alpha(\sqrt[n]{R(x)})^r\right) = 0$$

darstellen, während die zugehörigen Irrationalitäten durch den Ausdruck

$$\sqrt{\varphi(\zeta_r)} = F\left(\zeta_r, x, \alpha(\sqrt[n]{R(x)})^r\right)$$

bestimmt sind.

Bezeichnen wir die Periodicitätsmoduln des Integrales erster Gattung an den $2p$ Querschnitten mit

$$\omega_1, \omega_1', \omega_2, \omega_2', \cdots \omega_p, \omega_p'$$

und bemerken, dass vermöge der Gleichungen (23) und (26) ein algebraischer Zusammenhang zwischen z und ζ besteht, so folgt leicht, dass, wenn man in der Gleichung (25) einen der Integrationswege der z-Variablen den ersten Querschnitt einmal schneiden lässt, auf der linken Seite, da die rechte Seite in den Grenzen unverändert geblieben ist und nur um eine additive Constante vermehrt worden, die Grenzen nur in die anderen Lösungen der zwischen z und ζ bestehenden algebraischen Gleichung übergegangen sein können, und dass, weil die Anzahl dieser ζ-Werthe nur eine endliche ist, wir jedenfalls den ersten Querschnitt so oft werden durchschneiden können, bis einmal zwei Werthsysteme der p Grössen ζ einander gleich werden; dann wird auf der linken Seite die der rechts hinzutretenden constanten Grösse, welche ein ganzes Multiplum von ω_1 ist, äquivalente Constante nur von dem Durchschneiden der Querschnitte durch die Integrationswege der linken

Seite herstammen, somit nur ein ganzes Vielfaches der $2p$ Periodicitätsmoduln sein können. Verfährt man ebenso mit jedem der $2p$ Periodicitätsmoduln, so ergiebt sich das folgende System von Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\alpha m_1\,\omega_1 &= a_{11}\omega_1 + b_{11}\omega_1' + a_{12}\omega_2 + b_{12}\omega_2' + \cdots + a_{1p}\omega_p + b_{1p}\omega_p',\\
\alpha m_1'\omega_1' &= a_{11}'\omega_1 + b_{11}'\omega_1' + a_{12}'\omega_2 + b_{12}'\omega_2' + \cdots + a_{1p}'\omega_p + b_{1p}'\omega_p',\\
\alpha m_2\,\omega_2 &= a_{21}\omega_1 + b_{21}\omega_1' + a_{22}\omega_2 + b_{22}\omega_2' + \cdots + a_{2p}\omega_p + b_{2p}\omega_p',\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\alpha m_p'\omega_p' &= a_{p1}'\omega_1 + b_{p1}'\omega_1' + a_{p2}'\omega_2 + b_{p2}'\omega_2' + \cdots + a_{pp}'\omega_p + b_{pp}'\omega_p',
\end{aligned}
$$

und daher die Bestimmungsgleichung für α

$$
(27)\qquad \begin{vmatrix}
a_{11}-\alpha m_1 & b_{11} & a_{12} & b_{12} & \cdots & a_{1p} & b_{1p}\\
a_{11}' & b_{11}'-\alpha m_1' & a_{12}' & b_{12}' & \cdots & a_{1p}' & b_{1p}'\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
a_{p1}' & b_{p1}' & a_{p2}' & b_{p2}' & \cdots & a_{pp}' & b_{pp}'-\alpha m_p'
\end{vmatrix} = 0.
$$

Wir finden somit, *dass, wenn eine Reductionsgleichung von der Form* (22) *möglich sein soll,* $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ *die Lösung einer Gleichung* $2p^{\text{ten}}$ *Grades mit rationalen Coefficienten sein muss* — woraus nach bekannten Principien die Feststellung der möglichen Werthe für die Zahl n hervorgeht.

So wird die Möglichkeit der Reduction auf hyperelliptische Integrale erster Ordnung, für welche $p = 2$ ist, für n die Werthe

$$2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$$

erfordern, und wenn man nur diejenigen hyperelliptischen Integrale complexer Multiplication mit den Multiplicatoren

$$e^{\frac{2\pi i}{5}},\quad e^{\frac{2\pi i}{8}},\quad e^{\frac{2\pi i}{10}},\quad e^{\frac{2\pi i}{12}}$$

in Betracht zieht, welche binomischen Polynomen vom Grade 5, 8, 10, 12 entsprechen, so wird leicht zu sehen sein, dass sie sämmtlich der ersten Ordnung angehören, da von den dieser Ordnung unmittelbar angehörigen Integralen erster Gattung

$$\int \frac{(a+bx)\,dx}{\sqrt{x^5-1}}$$

abgesehen,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^8-1}} &= -\frac{e^{\frac{5\pi i}{8}}}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y(y^4+1)}}\\
&= \frac{e^{\frac{5\pi i}{8}}}{4}\left\{\int \frac{dt}{\sqrt{(t+1)(2t^2-1)}} \mp \int \frac{dt}{\sqrt{(t-1)(2t^2-1)}}\right\}
\end{aligned}
$$

vermöge der Substitutionen $x^2 = e^{\frac{\pi i}{4}} y,\ y + \frac{1}{y} = 2t,$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^8-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y^4-1}} \quad \text{vermöge } x^2 = y,$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^8-1}} = -\frac{e^{\frac{5\pi i}{8}}}{2}\int \frac{y\,dy}{\sqrt{y(y^4-1)}}$$

$$= -\frac{e^{\frac{5\pi i}{8}}}{2}\left\{\int \frac{dt}{\sqrt{(t+1)(2t^2-1)}} \pm \int \frac{dt}{\sqrt{(t-1)(2t^2-1)}}\right\}$$

vermöge derselben Substitutionen, ferner

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^{10}-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y(y^5-1)}} = -\frac{1}{2}\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^5}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^{10}-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y^5-1}},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^{10}-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{y\,dy}{\sqrt{y(y^5-1)}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^5}},$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^{10}-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{y\,dy}{\sqrt{y^5-1}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^{12}-1}} = -\frac{e^{\frac{7\pi i}{12}}}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y(y^6-1)}}$$

$$= \frac{e^{\frac{7\pi i}{12}}}{2^{\frac{3}{2}}}\left\{\int \frac{dt}{\sqrt{4t^3-3t}} \mp \int \frac{t\,dt}{\sqrt{(t^2-1)(4t^3-3t)}}\right\}$$

vermöge der Substitutionen $x^2 = ye^{\frac{\pi i}{6}}$, $y + \frac{1}{y} = 2t$,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^{12}-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y^6-1}} = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} \quad \text{vermöge } x^2 = y,\ y^2 = \frac{1}{t},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^{12}-1}} = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{\sqrt{y^4-1}}, \qquad \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^{12}-1}} = \frac{1}{4}\int \frac{dy}{\sqrt{y^3-1}},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^{12}-1}} = \frac{e^{\frac{7\pi i}{12}}}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y(y^6+1)}}$$

$$= \frac{e^{\frac{7\pi i}{12}}}{2^{\frac{3}{2}}}\left\{\int \frac{dy}{\sqrt{4t^3-3t}} \pm \int \frac{t\,dt}{\sqrt{(t^2-1)(4t^3-3t)}}\right\}.$$

Es sei nun die Aufgabe gestellt, die Abel'schen Fundamentalintegrale erster Gattung von der Form

$$\int \psi(x)\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r dx$$

zu ermitteln, welche auf hyperelliptische Integrale mit der Irrationalität

$$\sqrt{x^{2p+1}-1}$$

zurückführbar sind, oder die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz der Gleichung

$$(28)\qquad \int \psi(x) \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r dx = \int \frac{f(z_1)\, dz_1}{\sqrt{z_1^{2p+1}-1}} + \int \frac{f(z_2)\, dz_2}{\sqrt{z_2^{2p+1}-1}} + \cdots + \int \frac{f(z_p)\, dz_p}{\sqrt{z_p^{2p+1}-1}}$$

aufzustellen, in welcher $f(z)$ eine ganze Function höchstens vom $p-1^{\text{ten}}$ Grade bedeutet, während $z_1, z_2, \cdots, z_p$, wie früher gezeigt worden, die Lösungen einer Gleichung p^{ten} Grades

$$(29)\qquad z^p + f_1\left(x, \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right) z^{p-1} + \cdots + f_p\left(x, \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right) = 0$$

bedeuten, in welcher $f_1, f_2, \cdots, f_p$ rational aus den in ihnen enthaltenen Grössen zusammengesetzt sind, und die zu jenen z-Grössen gehörigen Irrationalitäten durch einen Ausdruck von der Form bestimmt sind

$$(30)\qquad \sqrt{z_\varrho^{2p+1}-1} = F\left(z_\varrho, x, \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right),$$

in welchem F wiederum eine rationale Function vorstellt.

Nehmen wir wieder an, dass r und $2p+1$ relativ prim sind, und lassen x successive geschlossene Umläufe beschreiben, welche $\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r$ resp. in

$$\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r, \quad \alpha\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r, \quad \alpha^2\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r, \cdots, \alpha^{2p}\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r$$

überführen, worin

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{2p+1}}$$

gesetzt ist, bezeichnen wir ferner die der Multiplication der Irrationalität mit α^s entsprechende, aus (29)hergeleitete algebraische Gleichung, deren Lösungen

$$z_{1s}, z_{2s}, \cdots, z_{ps}$$

sein sollen, mit

$$(31)\quad z^p + f_1\left(x, \alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right) z^{p-1} + \cdots + f_p\left(x, \alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right) = 0,$$

und drücken die zugehörigen Irrationalitäten durch

$$\sqrt{z_{\varrho s}^{2p+1}-1} = F\left(z_{\varrho s}, x, \alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)$$

oder mit Hilfe von Gleichung (31) durch

$$(32)\quad \sqrt{z_{\varrho s}^{2p+1}-1} = \varphi_1\left(x,\, \alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right) z_{\varrho s}^{p-1} + \varphi_2\left(x,\, \alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right) z_{\varrho s}^{p-2} + \cdots + \varphi_{p-1}\left(x,\, \alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)$$

aus, so erhält man die Integralgleichung

$$(33)\quad \alpha^s \int \psi(x)\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r dx = \int \frac{f(z_{1s})\,dz_{1s}}{\sqrt{z_{1s}^{2p+1}-1}} + \int \frac{f(z_{2s})\,dz_{2s}}{\sqrt{z_{2s}^{2p+1}-1}} + \cdots + \int \frac{f(z_{ps})\,dz_{ps}}{\sqrt{z_{ps}^{2p+1}-1}},$$

und indem man die letzte Gleichung mit α^{-s} multiplicirt und die Summe der so entstehenden Gleichungen für $s = 0, 1, 2, \cdots 2p$ nimmt,

$$(34)\quad (2p+1)\int \psi(x)\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r dx = \sum_0^{2p}{}^s\, \alpha^{-s} \sum_1^{p}{}^{\varrho} \int \frac{f(z_{\varrho s})\,dz_{\varrho s}}{\sqrt{z_{\varrho s}^{2p+1}-1}}\,.$$

Setzt man

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_{p-1} z^{p-1},$$

so geht (34) in

$$(35)\quad (2p+1)\int \psi(x)\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r dx = \sum_0^{p-1}{}^{\varkappa} A_\varkappa \sum_0^{2p}{}^s \alpha^{-s} \sum_1^{p}{}^{\varrho} \int \frac{z_{\varrho s}^{\varkappa}\,dz_{\varrho s}}{\sqrt{z_{\varrho s}^{2p+1}-1}}$$

über, und mit einer solchen Theilsumme

$$(\mathrm{A}_\varkappa)\qquad \sum_0^{2p}{}^s \alpha^{-s} \sum_1^{p}{}^{\varrho} \int \frac{z_{\varrho s}^{\varkappa}\,dz_{\varrho s}}{\sqrt{z_{\varrho s}^{2p+1}-1}}$$

wollen wir uns im Folgenden beschäftigen.

Macht man auf den Ausdruck $(\mathrm{A}_\varkappa)$ die Substitution

$$(36)\qquad z_{\varrho s} = \alpha^{m_s} t_{\varrho s}\,,$$

worin m_s aus der Congruenz bestimmt wird

$$(37)\qquad m_s(\varkappa+1) \equiv s \mod (2p+1),$$

welche, wenn wir $2p+1$ als Primzahl annehmen, wie es für die hyperelliptischen Integrale erster Ordnung der Fall ist, stets auflösbar ist*), so geht $(\mathrm{A}_\varkappa)$ in

---

*) Diese Annahme ist jedoch für das Folgende nicht nothwendig; denn wenn ein Integral der Form

$$\int \frac{z^{\varkappa}\,dz}{\sqrt{z^{2p+1}-1}}$$

$$(\mathrm{B}_\varkappa) \qquad \sum_0^{2p} {}_s \sum_1^{p} {}_\varrho \int \frac{t_{\varrho s}^\varkappa \, d t_{\varrho s}}{\sqrt{t_{\varrho s}^{2p+1} - 1}}$$

über, und die in diesen Integralen vorkommenden Variabeln und Irrationalitäten genügen nach den Beziehungen (31), (32), (36) den Gleichungen

$$(38) \quad \alpha^{p m_s} t^p + \alpha^{(p-1) m_s} f_1\left(x, \alpha^s \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right) t^{p-1} + \cdots + f_p\left(x, \alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right) = 0$$

und

$$(39) \quad \begin{aligned} \sqrt{t_{\varrho s}^{2p+1} - 1} &= \alpha^{(p-1) m_s} \varphi_1\left(x, \alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right) t_{\varrho s}^{p-1} \\ &+ \alpha^{(p-2) m_s} \varphi_2\left(x, \alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right) t_{\varrho s}^{p-2} + \cdots + \varphi_{p-1}\left(x, \alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right). \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$(40) \quad \sum_0^{2p} {}_s \sum_1^{p} {}_\varrho \int \frac{t_{\varrho s}^\varkappa \, d t_{\varrho s}}{\sqrt{t_{\varrho s}^{2p+1} - 1}} = \int \frac{Z_1^\varkappa \, d Z_1}{\sqrt{Z_1^{2p+1} - 1}} + \cdots + \int \frac{Z_p^\varkappa \, d Z_p}{\sqrt{Z_p^{2p+1} - 1}},$$

so ist nach dem Abel'schen Theorem eine Function $p(t)$ vom $p(p+1)^{\text{ten}}$ Grade

$$(41) \qquad p(t) = t^{p(p+1)} + a_{p(p+1)-1} t^{p(p+1)-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

und eine Function $q(t)$ vom $p^2 - 1^{\text{ten}}$ Grade

$$(42) \qquad q(t) = b_{p^2-1} t^{p^2-1} + b_{p^2-2} t^{p^2-2} + \cdots + b_1 t + b_0$$

so zu wählen, dass die Gleichung

$$(43) \qquad p(t) - q(t)\sqrt{t^{2p+1} - 1} = 0$$

befriedigt wird durch die $p(2p+1)$ Werthe $t_{\varrho s}$ und die dazu gehörigen Irrationalitäten; nach Bestimmung der Coefficienten a und b in den Polynomen $p(t)$ und $q(t)$ wird durch

$$(44) \quad p(t)^2 - q(t)^2 (t^{2p+1} - 1) = \prod_0^{2p} {}_s \prod_1^{p} {}_\varrho (t - t_{\varrho s}) \cdot (t - Z_1) \cdots (t - Z_p)$$

---

vorkommt, in welchem $\varkappa + 1$ und $2p + 1$ den grössten gemeinsamen Theiler δ haben, so dass $\varkappa + 1 = \delta . \varepsilon$, $2p + 1 = \delta . \eta$ ist, so setze man

$$z^\delta = y, \quad \text{also } z^{\varkappa+1} = y^\varepsilon, \quad z^{2p+1} = y^\eta$$

und erhält

$$\int \frac{z^\varkappa \, dz}{\sqrt{z^{2p+1} - 1}} = \frac{\varepsilon}{\varkappa + 1} \int \frac{y^{\varepsilon - 1} \, dy}{\sqrt{y^\eta - 1}},$$

somit ein ebensolches Integral, jedoch von einer niedrigeren Ordnung und so beschaffen, dass jetzt $\varepsilon - 1 + 1 = \varepsilon$ und η relativ prim sind, wie es oben zur Auflösung der Congruenz (37) gefordert ist.

die Gleichung geliefert, deren Lösungen die gesuchten neuen Integralgrenzen sind.

Beachtet man, dass die in Gleichung (43) vorkommende Irrationalität nach (39) durch eine ganze Function $p-1^{\text{ten}}$ Grades des entsprechenden t dargestellt ist, so wird der Factor des unbestimmten Coefficienten b_ν die Form haben

$$b_\nu : \alpha^{(p-1)m_s}\varphi_1\left(x, \alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right) t_{\varrho s}^{p+\nu-1}$$
$$+\alpha^{(p-2)m_s}\varphi_2\left(x,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right) t_{\varrho s}^{p+\nu-2} + \cdots + \varphi_{p-1}\left(x,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right) t_{\varrho s}^{\nu};$$

setzt man ferner die Potenzsumme der Lösungen der Gleichung (38)

$$t_{1s}^\mu + t_{2s}^\mu + \cdots + t_{ps}^\mu = S_{s\mu},$$

und addirt von den $p(2p+1)$ Gleichungen (43) je p, die zu den Lösungen derselben Gleichung (38), also zu demselben s gehören, nachdem sie der Reihe nach mit

$$\begin{array}{llll} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_{1s}^{\varkappa+1} & t_{2s}^{\varkappa+1} & \cdots & t_{ps}^{\varkappa+1} \\ t_{1s}^{2(\varkappa+1)} & t_{2s}^{2(\varkappa+1)} & \cdots & t_{ps}^{2(\varkappa+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{1s}^{(p-1)(\varkappa+1)} & t_{2s}^{(p-1)(\varkappa+1)} & \cdots & t_{ps}^{(p-1)(\varkappa+1)} \end{array}$$

multiplicirt sind, so erhält man das folgende System von Gleichungen, in welchem $s=0, 1, 2, \cdots 2p$ zu setzen ist:

$$(45)\quad S_{s\,p(p+1)} + a_{p(p+1)-1}S_{s\,p(p+1)-1} + \cdots + a_1 S_{s1} + a_0 S_{s0}$$
$$+b_{p^2-1}\left\{\alpha^{(p-1)m_s}\varphi_1\left(x,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)S_{s\,p(p+1)-2}\right.$$
$$+\alpha^{(p-2)m_s}\varphi_2\left(x,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)S_{s\,p(p+1)-3} + \cdots + \varphi_{p-1}\left(x,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)S_s$$
$$+b_{p^2-2}\left\{\alpha^{(p-1)m_s}\varphi_1\left(x,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)S_{s\,p(p+1)-3} + \cdots + \varphi_{p-1}\left(x,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)S_s\right.$$
$$+\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot$$
$$+\quad b_0\left\{\alpha^{(p-1)m_s}\varphi_1\left(x,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)S_{s\,p-1} + \cdots + \varphi_{p-1}\left(x,\alpha^s\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r\right)S_{s0}\right\}$$

und noch $p-1$ ähnlich gestaltete, die sich von der Gleichung (45) nur dadurch unterscheiden, dass alle zweiten Indices des S um resp. $\varkappa+1$, $2(\varkappa+1)$, $3(\varkappa+1)$, $\cdots$, $(p-1)(\varkappa+1)$ Einheiten erhöht sind.

Fassen wir jetzt die gleichartigen $2p+1$ Gleichungen (45) auf, welche den Werthen $s=0, 1, 2, \cdots 2p$ entsprechen, und beachten, dass, wenn für $S_{0\lambda}$ als Potenzsumme der Lösungen der Gleichung (29)

$$S_{0\lambda} = \mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{B}_\lambda \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r + \mathfrak{C}_\lambda \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^{2r} + \cdots + \mathfrak{L}_\lambda \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^{2pr}$$

gesetzt wird, sich

$$(46) \qquad S_{s\lambda} = \alpha^{-\lambda m_s}\Big\{\mathfrak{A}_\lambda + \alpha^s \mathfrak{B}_\lambda \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r + \alpha^{2s}\mathfrak{C}_\lambda \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^{2r} + \cdots + \alpha^{2ps}\mathfrak{L}_\lambda \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^{2pr}\Big\}$$

ergiebt, so wird, wenn bemerkt wird, dass aus den einzelnen Klammern, welche die Factoren der b-Coefficienten bilden, die resp. Einheitswurzeln

$$\alpha^{-(p^2-1)m_s}, \quad \alpha^{-(p^2-2)m_s}, \ldots, \alpha^{-0\, m_s}$$

heraustreten, während die Klammern wieder die Form annehmen

$$(47) \quad b_\nu \cdot \alpha^{-\nu m_s}\Big\{\mathsf{A}_\nu + \alpha^s \mathsf{B}_\nu \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r + \alpha^{2s}\Gamma_\nu \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^{2r} + \cdots + \alpha^{2ps}\mathsf{M}_\nu \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^{2pr}\Big\},$$

die Addition der $2p+1$ Gleichungen (45), wenn der Kürze halber

$$\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r = y$$

gesetzt wird, wie leicht zu sehen, folgendermassen bewerkstelligt werden.

Bezeichnen nämlich ε und η gegebene ganze Zahlen und bestimmt man, was immer möglich ist, zwei ganze Zahlen τ_ε und u_η aus den Congruenzen

$$(48) \qquad \left.\begin{aligned} \tau_\varepsilon\,(\varkappa+1) &\equiv \varepsilon \\ u_\eta\,(\varkappa+1) &\equiv \eta \end{aligned}\right\} \bmod (2p+1),$$

wo $\varkappa$ die oben definirte Zahl bedeutet, so wird in der Additionsgleichung der Coefficient von a_ε lauten

$$(49) \quad \mathfrak{A}_\varepsilon \sum_0^{2p}{}_s\, \alpha^{-\varepsilon m_s} + \mathfrak{B}_\varepsilon y \sum_0^{2p}{}_s\, \alpha^{-\varepsilon m_s + s} + \mathfrak{C}_\varepsilon y^2 \sum_0^{2p}{}_s\, \alpha^{-\varepsilon m_s + 2s} + \cdots + \mathfrak{L}_\varepsilon y^{2p} \sum_0^{2p}{}_s\, \alpha^{-\varepsilon m_s + 2ps},$$

und der von b_η:

$$(50) \qquad \mathsf{A}_\eta \sum_0^{2p}{}_s\, \alpha^{-\eta m_s} + \mathsf{B}_\eta y \sum_0^{2p}{}_s\, \alpha^{-\eta m_s + s} + \cdots + \mathsf{M} y^{2p} \sum_0^{2p}{}_s\, \alpha^{-\eta m_s + 2ps},$$

und wenn man berücksichtigt, dass nach den Congruenzen (37) und (48)

$-\varepsilon m_s + \tau_\varepsilon s \equiv 0 \bmod (2p+1)$ und $-\eta m_s + u_\eta s \equiv 0 \bmod (2p+1)$

ist, so folgt, dass der Coefficient von a_ε nur noch lautet

$$\mathfrak{T}_\varepsilon y^{\tau_\varepsilon},$$

während der Coefficient von b_η

$$T_\eta y^{u_\eta}$$

wird, und somit das Resultat der Addition:

$$(51)\quad \mathfrak{T}_{p(p+1)} y^{\tau_{p(p+1)}} + a_{p(p+1)-1}\mathfrak{T}_{p(p+1)-1} y^{\tau_{p(p+1)-1}} + \cdots + a_1 \mathfrak{T}_1 y^{\tau_1} + a_0 \mathfrak{T}_0 y^{\tau_0}$$
$$+ b_{p^2-1} T_{p^2-1} y^{u_{p^2-1}} + b_{p^2-2} T_{p^2-2} y^{u_{p^2-2}} + \cdots + b_1 T_1 y^{u_1} + b_0 T_0 y^{u_0} = 0$$

worin die $\mathfrak{T}$ und T rationale Functionen von x bedeuten.

Multiplicirt man die $2p+1$ Gleichungen (45) der Reihe nach mit

$$\begin{matrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \cdots & \alpha^{2p} \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \cdots & \alpha^{4p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha^{2p} & \alpha^{4p} & \cdots & \alpha^{4p^2}, \end{matrix}$$

wodurch also, wenn mit $(\alpha^\varrho)^0, (\alpha^\varrho)^1 \cdots (\alpha^\varrho)^{2p}$ multiplicirt wird, in (45) jede der a und b-Grössen nur mit $\alpha^{\varrho s}$ multiplicirt wird, so lautet, wenn die Gleichungen addirt werden, der Coefficient von a_ε:

$$(52)\quad \mathfrak{A}_\varepsilon \sum_0^{2p}{}_s\, \alpha^{-\varepsilon m_s + \varrho s} + \mathfrak{B}_\varepsilon y \sum_0^{2p}{}_s\, \alpha^{-\varepsilon m_s + (\varrho+1)s} + \cdots + \mathfrak{L}_\varepsilon y^{2p} \sum_0^{2p}{}_s\, \alpha^{-\varepsilon m_s + (2p+\varrho)s}$$

und der von b_η:

$$(53)\quad \mathsf{A}_\eta \sum_0^{2p}{}_s\, \alpha^{-\eta m_s + \varrho s} + \mathsf{B}_\eta y \sum_0^{2p}{}_s\, \alpha^{-\eta m_s + (\varrho+1)s} + \cdots + \mathsf{M}_\eta y^{2p} \sum_0^{2p}{}_s\, \alpha^{-\eta m_s + (2p+\varrho)s},$$

oder es wird mit Berücksichtigung der obigen Congruenzen und Wahl ähnlicher Bezeichnungen wie oben, das Resultat der Addition die Form haben:

$$(54)\quad \mathfrak{T}^{(\varrho)}_{p(p+1)} y^{\tau_{p(p+1)}-\varrho} + a_{p(p+1)-1}\mathfrak{T}^{(\varrho)}_{p(p+1)-1} y^{\tau_{p(p+1)-1}-\varrho} + \cdots + a_1 \mathfrak{T}^{(\varrho)}_1 y^{\tau_1-\varrho} + a_0 \mathfrak{T}^{(\varrho)}_0 y^{\tau_0-\varrho}$$
$$+ b_{p^2-1} T^{(\varrho)}_{p^2-1} y^{u_{p^2-1}-\varrho} + b_{p^2-2} T^{(\varrho)}_{p^2-2} y^{u_{p^2-2}-\varrho} + \cdots + b_1 T^{(\varrho)}_1 y^{u_1-\varrho} + b_0 T^{(\varrho)}_0 y^{u_0-\varrho} = 0,$$

worin für ϱ der Reihe nach $0, 1, 2, \cdots 2p$ zu setzen ist, oder wenn mit y^ϱ multiplicirt wird:

$$(55)\quad \mathfrak{T}^{(\varrho)}_{p(p+1)} y^{\tau_{p(p+1)}} + a_{p(p+1)-1}\mathfrak{T}^{(\varrho)}_{p(p+1)-1} y^{\tau_{p(p+1)-1}} + \cdots + a_0 \mathfrak{T}^{(\varrho)}_0 y^{\tau_0}$$
$$+ b_{p^2-1} T^{(\varrho)}_{p^2-1} y^{u_{p^2-1}} + b_{p^2-2} T^{(\varrho)}_{p^2-2} y^{u_{p^2-2}} + \cdots + b_0 T^{(\varrho)}_0 y^{u_0} = 0\,.$$

Man sieht leicht, dass in all' den Gleichungen, welche man auf dieselbe Weise aus der Gleichung (45) herleitet, nachdem in derselben die zweiten Indices von S um resp. $\varkappa + 1, 2(\varkappa+1), \cdots (p-1)(\varkappa+1)$ Einheiten erhöht worden, nur statt ε und η die Grössen $\varepsilon + (\varkappa+1)\delta$ und $\eta + (\varkappa+1)\delta$ auftreten werden, wenn der Index von S um $(\varkappa+1)\delta$ Einheiten erhöht ist, und wenn man daher wieder zwei ganze Zahlen v_ε und w_η aus den Congruenzen bestimmt:

$$(56) \qquad \left.\begin{aligned} v_\varepsilon(\varkappa+1) &\equiv \varepsilon + (\varkappa+1)\delta \\ w_\eta(\varkappa+1) &\equiv \eta + (\varkappa+1)\delta \end{aligned}\right\} \bmod (2p+1),$$

so wird die der Gleichung (51) analoge Gleichung folgendermassen lauten:

$$\mathfrak{T}^{0\delta}_{p(p+1)} y^{v_{p(p+1)}} + a_{p(p+1)-1}\mathfrak{T}^{0\delta}_{p(p+1)-1} y^{v_{p(p+1)-1}} + \cdots + a_1 \mathfrak{T}^{0\delta}_1 y^{v_1} + a_0 \mathfrak{T}^{0\delta}_0 y^{v_0}$$
$$+ b_{p^2-1} T^{0\delta}_{p^2-1} y^{w_{p^2-1}} + b_{p^2-2} T^{0\delta}_{p^2-2} y^{w_{p^2-2}} + \cdots + b_0 T^{0\delta}_0 y^{w_0} = 0;$$

wenn man aber berücksichtigt, dass wegen

$$(\varkappa+1)(v_\varepsilon - \delta) \equiv \varepsilon \quad \text{und} \quad (\varkappa+1)\tau_\varepsilon \equiv \varepsilon \bmod (2p+1)$$

auch

$$v_\varepsilon \equiv \tau_\varepsilon + \delta \pmod{2p+1} \quad \text{ebenso} \quad w_\eta \equiv u_\eta + \delta \pmod{2p+1}$$

folgt, so ergeben sich, wenn die Gleichungen mit $y^{-\delta}$ multiplicirt werden, endlich die $p(2p+1)$ Bestimmungsgleichungen für die im Abel'schen Theorem vorkommenden Constanten a und b in der Form:

$$(57) \quad \mathfrak{T}^{\varrho\delta}_{p(p+1)} y^{\tau_{p(p+1)}} + a_{p(p+1)-1}\mathfrak{T}^{\varrho\delta}_{p(p+1)-1} y^{\tau_{p(p+1)-1}} + \cdots + a_0 \mathfrak{T}^{\varrho\delta}_0 y^{\tau_0}$$
$$+ b_{p^2-1} T^{\varrho\delta}_{p^2-1} y^{u_{p^2-1}} + b_{p^2-2} T^{\varrho\delta}_{p^2-2} y^{u_{p^2-2}} + \cdots + b_0 T^{\varrho\delta}_0 y^{u_0} = 0,$$

worin für ϱ alle Zahlen $0, 1, 2, \cdots 2p$, für δ die Zahlen $0, 1, 2, \cdots p-1$ zu setzen sind.

Aus diesem Gleichungssystem (57) ist nun unmittelbar zu ersehen, dass, wenn

$$\tau_{p(p+1)} - \tau_{p(p+1)-\sigma} = \mu_\sigma, \qquad \tau_{p(p+1)} - u_{p^2-\sigma} = \nu_\sigma$$

gesetzt wird,

$$a_{p(p+1)-\sigma} = U_\sigma \cdot y^{\mu_\sigma}, \qquad b_{p^2-\sigma} = V_\sigma \cdot y^{\nu_\sigma}$$

wird, worin U_σ und V_σ rationale Functionen von x sind, und man erhält somit

$$(58) \qquad p(t)^2 - q(t)^2(t^{2p+1} - 1)$$
$$= \left[t^{p(p+1)} + U_1 y^{\mu_1} t^{p(p+1)-1} + \cdots + U_{p(p+1)-1} y^{\mu_{p(p+1)-1}} t + U_{p(p+1)} y^{\mu_{p(p+1)}}\right]^2$$

Da nun nach den Congruenzen (48)

$$\left.\begin{aligned} \tau_{p(p+1)}(\varkappa+1) &\equiv p(p+1) \\ \tau_{p(p+1)-\sigma}(\varkappa+1) &\equiv p(p+1)-\sigma \end{aligned}\right\} \bmod (2p+1)$$

also

(59) $(\varkappa+1)\left[\tau_{p(p+1)}-\tau_{p(p+1)-\sigma}\right] = (\varkappa+1)\mu_\sigma \equiv \sigma \bmod (2p+1)$

und ebenso

$$\tau_{p(p+1)}(\varkappa+1) \equiv p(p+1)$$
$$u_{p^2-\sigma}(\varkappa+1) \equiv p^2-\sigma$$

also

(60) $(\varkappa+1)\left[\tau_{p(p+1)}-u_{p^2-\sigma}\right] = (\varkappa+1)\nu_\sigma \equiv p+\sigma \bmod (2p+1)$

ist, so wird, wenn man für t die Substitution macht

(m) $$t = w\cdot y^\lambda,$$

worin λ eine Lösung der Congruenz

(61) $$\lambda(\varkappa+1)\equiv 1 \bmod (2p+1)$$

sein soll, ein Posten des ersten Quadrates der Gleichung (58) lauten

$$U_\sigma y^{\mu_\sigma+\lambda[p(p+1)-\sigma]}\,.\,w^{p(p+1)-\sigma}$$

oder vermöge der Congruenzen (59) und (61), wie leicht zu sehen,

$$\mathfrak{U}_\sigma y^{\lambda p(p+1)} w^{p(p+1)-\sigma},$$

worin $\mathfrak{U}_\sigma$ wieder eine rationale Function von x ist; ferner wird ein Posten des zweiten Quadrates der Gleichung (58)

$$V_\sigma y^{\nu_\sigma+\lambda(p^2-\sigma)} w^{p^2-\sigma}$$

oder vermöge der Congruenzen (60) und (61)

$$\mathfrak{V}_\sigma y^{\lambda p(p+1)}\,.\,w^{p^2-\sigma},$$

worin $\mathfrak{V}_\sigma$ auch wieder eine rationale Function von x bedeutet.

Die Gleichung (58) nimmt daher die Form an:

(62) $$p(t)^2-q(t)^2(t^{2p+1}-1)$$
$$= y^{2\lambda p(p+1)}\Big[(w^{p(p+1)}+\mathfrak{U}_1 w^{p(p+1)-1}+\cdots+\mathfrak{U}_{p(p+1)})^2$$
$$-(\mathfrak{V}_1 w^{p^2-1}+\cdots+\mathfrak{V}_{p^2})^2(w^{2p+1}y^{\lambda(2p+1)}-1)\Big],$$

wobei in der Klammer [ ] die Coefficienten der Potenzen von w rationale Functionen von x sind.

Untersuchen wir jetzt die rechte Seite der Gleichung (44); es ist offenbar nach Gleichung (38)

$$\prod_{0}^{2p}{}_s \prod_{1}^{p}{}_\varrho (t - t_{\varrho s})$$

$$= \prod_{0}^{2p}{}_s \left\{ \alpha^{p m_s} t^p + \alpha^{(p-1) m_s} f_1 \left(x, \alpha^s \left(\sqrt[2p+1]{R(x)} \right)^r \right) t^{p-1} + \cdots + f_p \left(x, \alpha^s \left(\sqrt[2p+1]{R(x)} \right)^r \right) \right\}$$

und wenn auch hier die vorher gebrauchte Substitution (m) angewandt wird,

$$\prod_{0}^{2p}{}_s \prod_{1}^{p}{}_\varrho (t - t_{\varrho s})$$

$$= \prod_{0}^{2p}{}_s \left\{ \alpha^{p m_s} y^{\lambda p} w^p + \alpha^{(p-1) m_s} y^{\lambda (p-1)} f_1(x, \alpha^s y) w^{p-1} + \cdots + f_p(x, \alpha^s y) \right\}$$

oder endlich, wenn man beachtet, dass aus den beiden Congruenzen (37) und (61)

$$m_s \equiv s\lambda \mod (2p+1)$$

folgt,

(63)
$$\prod_{0}^{2p}{}_s \prod_{1}^{p}{}_\varrho (t - t_{\varrho s})$$

$$= \prod_{0}^{2p}{}_s \left\{ (\alpha^s)^{p\lambda} y^{\lambda p} w^p + (\alpha^s)^{(p-1)\lambda} y^{(p-1)\lambda} f_1(x, \alpha^s y) w^{p-1} + \cdots + f_p(x, \alpha^s y) \right\},$$

woraus zu erkennen, dass das Product eine symmetrische Function von

$$y, \ \alpha y, \ \alpha^2 y, \ \cdots \alpha^{2p} y$$

ist und dasselbe somit eine ganze Function von w wird, deren Coefficienten rationale Functionen von x vorstellen.

Beachtet man nun, dass die aus den Beziehungen (44), (62), (63) hervorgehende Gleichung des Abel'schen Theorems als Coefficienten der höchsten w-Potenz auf der linken Seite die Grösse

$$y^{2\lambda p(p+1)}$$

hat, während (63) als Coefficienten der höchsten w-Potenz

$$y^{\lambda p(2p+1)}$$

liefert, so wird der vermöge der Substitution (m) nach Gleichung (44) übrig bleibende Theil

$$(y^\lambda w - Z_1)(y^\lambda w - Z_2) \cdots (y^\lambda w - Z_p)$$
$$= y^{\lambda p}[w^p + \mathfrak{M}_1 w^{p-1} + \cdots + \mathfrak{M}_{p-1} w + \mathfrak{M}_p]$$

sein, worin $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots \mathfrak{M}_p$ rationale Functionen von x bedeuten, oder

$$(t-Z_1)\cdots(t-Z_p)=t^p+\mathfrak{M}_1 y^\lambda t^{p-1}+\mathfrak{M}_2 y^{2\lambda}t^{p-2}+\cdots+\mathfrak{M}_p y^{p\lambda}$$

d. h. die Grössen $Z_1, Z_2, \cdots Z_p$, welche die Grenzen der p Additionsintegrale der Gleichung (40) sind, sind die Lösungen einer algebraischen Gleichung der Form

$$(64) \qquad t^p+\mathfrak{M}_1 y^\lambda t^{p-1}+\mathfrak{M}_2 y^{2\lambda}t^{p-2}+\cdots+\mathfrak{M}_p y^{p\lambda}=0$$

in welcher

$$y=\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r$$

ist und $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots \mathfrak{M}_p$ rationale Functionen von x sind.

Endlich werden sich nach Gleichung (43) die zu den Z-Grenzen gehörigen Irrationalitäten in der Form ergeben

$$\sqrt{Z_\varrho^{2p+1}-1}=\frac{p(Z_\varrho)}{q(Z_\varrho)}.$$

Dieses hiermit erhaltene Resultat können wir auch so aussprechen: *die Gleichung* (40) *ist so beschaffen, dass, wenn man*

$$(65) \qquad Z_\varrho=W_\varrho y^\lambda$$

setzt, worin

$$y=\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r \quad \text{und} \quad \lambda(\varkappa+1)\equiv 1 \mod (2p+1)$$

ist, die Grössen

$$W_1,\ W_2,\ \cdots\ W_p$$

die Lösungen einer Gleichung

$$(66) \qquad W^p+\mathfrak{M}_1 W^{p-1}+\cdots+\mathfrak{M}_{p-1}W+\mathfrak{M}_p=0$$

sind, deren Coefficienten rational aus x zusammengesetzt sind, während die Irrationalitäten

$$\sqrt{W_\varrho^{2p+1}y^{\lambda(2p+1)}-1}$$

oder

$$(67) \qquad \sqrt{W_\varrho^{2p+1}R(x)^{\lambda r}-1}$$

sich als rationale Functionen von W_ϱ darstellen lassen, deren Coefficienten wiederum rational aus x zusammengesetzt sind.

Es ist aber auch leicht zu sehen, dass alle durch die Gleichungen (65), (66), (67) definirten Z-Grössen auch wirklich eine Reductionsformel eines Abel'schen Integrales der angegebenen Art auf hyperelliptische Integrale p^{ter} Ordnung liefern. Denn da aus (65) folgt

$$(68) \qquad dZ_\varrho=\left(\frac{r\lambda}{2p+1}W_\varrho\frac{R'(x)}{R(x)}+\frac{dW_\varrho}{dx}\right)\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^{r\lambda}dx,$$

worin $\frac{dW_\varrho}{dx}$ nach Gleichung (66) sich als rationale Function von W_ϱ und x darstellen lässt, ferner nach (67)

$$\sqrt{Z_\varrho^{2p+1}-1}=f(W_\varrho,\ x),$$

worin f eine rationale Function bedeutet, so wird

$$\sum_1^p \frac{Z_\varrho^\varkappa\, d\, Z_\varrho}{\sqrt{Z_\varrho^{2p+1}-1}}=\sum_1^p \frac{\frac{r\lambda}{2p+1}\, W_\varrho \frac{R'(x)}{R(x)}+\frac{d\, W_\varrho}{dx}}{f(W_\varrho,x)}\cdot W_\varrho^\varkappa\cdot\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^{r\lambda(\varkappa+1)} dx,$$

und da die rationale symmetrische Function der W-Grössen sich aus der Gleichung (66) als rationale Function von x ausdrücken lässt, ausserdem der Exponent der Irrationalität in Folge der Congruenz $\lambda(\varkappa+1)\equiv 1 \bmod (2p+1)\,r$ ist, so erhalten wir die Beziehung

$$\sum_1^p \int \frac{Z_\varrho^\varkappa\, d\, Z_\varrho}{\sqrt{Z_\varrho^{2p+1}-1}}=\int \varphi(x)\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r dx,$$

also eine Reductionsformel der betrachteten Art; *in den obigen Formeln* (65), (66), (67) *sind also sämmtliche Beziehungen enthalten, welche derartige Transformationen liefern.*

Ist $p=2$, haben wir es also mit dem Reductionsproblem

$$(68)\qquad \int \psi(x)\left(\sqrt[5]{R(x)}\right)^r dx=\int\frac{Z_1^\varkappa\, d\, Z_1}{\sqrt{Z_1^5-1}}+\int\frac{Z_2^\varkappa\, d\, Z_2}{\sqrt{Z_2^5-1}}$$

zu thun, so werden, wenn eine Zahl λ aus der Congruenz bestimmt ist

$$\lambda(\varkappa+1)\equiv 1\ (\mathrm{mod.}\ 5),$$

und

$$(69)\qquad Z_1=W_1\left(\sqrt[5]{R(x)}\right)^{r\lambda},\quad Z_2=W_2\left(\sqrt[5]{R(x)}\right)^{r\lambda}$$

gesetzt wird, W_1 und W_2 die Lösungen einer quadratischen Gleichung

$$(70)\qquad W^2+\mathfrak{M}_1\, W+\mathfrak{M}_2=0$$

sein müssen, deren Coefficienten $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ rationale Functionen von x sind, während

$$\sqrt{W_1{}^5 R(x)^{\lambda r}-1}\quad \text{und}\quad \sqrt{W_2{}^5 R(x)^{\lambda r}-1}$$

rationale Functionen von W_1 resp. W_2 und x sein sollen.

Da aus (70)

$$W=-\frac{\mathfrak{M}_1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{M}_1{}^2-4\mathfrak{M}_2}$$

folgt, so wird, wenn

$$W^5 R(x)^{\lambda r}-1=\mathfrak{N}_1\pm\mathfrak{N}_2\sqrt{\mathfrak{M}_1{}^2-4\mathfrak{M}_2}$$

gesetzt wird, worin $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ rationale Functionen von x bedeuten, welche sich aus $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ und $R(x)$ zusammensetzen,

$$\sqrt{\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2\sqrt{\mathfrak{M}_1{}^2-4\mathfrak{M}_2}}=\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2\sqrt{\mathfrak{M}_1{}^2-4\mathfrak{M}_2}$$

und

$$\sqrt{\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2 \sqrt{\mathfrak{M}_1^2 - 4\mathfrak{M}_2}} = \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2 \sqrt{\mathfrak{M}_1^2 - 4\mathfrak{M}_2}$$

sein müssen, wenn $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ wieder rational aus x zusammengesetzt sind, und daraus endlich

$$\sqrt{\mathfrak{N}_1^2 - \mathfrak{N}_2^2(\mathfrak{M}_1^2 - 4\mathfrak{M}_2)} = \mathfrak{P}_1^2 - \mathfrak{P}_2^2(\mathfrak{M}_1^2 - 4\mathfrak{M}_2),$$

wonach die rationalen Functionen von x $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ und $R(x)$ so beschaffen sein werden, dass der Ausdruck

$$\mathfrak{N}_1^2 - \mathfrak{N}_2^2(\mathfrak{M}_1^2 - 4\mathfrak{M}_2)$$

nur Doppelfactoren hat, alle diesen Bedingungen genügenden Functionen und nur diese werden nach Gleichung (68) auf $\varkappa^{te}$ hyperelliptische Fundamentalintegrale erster Ordnung reducirbare Abel'sche Integrale der betrachteten Form liefern.

Wie für hyperelliptische Integrale höherer Ordnung die Bedingungsgleichungen herzustellen sind, denen nach den Gleichungen (66) und (67) die Coefficienten der Substitutionsfunctionen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots \mathfrak{M}_p$ und des Polynoms des Abel'schen Integrales unterliegen müssen, zeige ich in der schon oben erwähnten, demnächst im 3ten Hefte des 87ten Bandes von Borchardt's Journal erscheinenden Arbeit „Erweiterung des Jacobi'schen Transformationsprincips“ und ich behalte mir die Anwendung der dort gegebenen Methoden auf die oben behandelten Probleme bis zur Veröffentlichung dieser Arbeit vor.

Wir fügen zum Schlusse noch ein Wort zur Lösung der allgemeinen, ursprünglich gestellten Aufgabe hinzu, die durch die Gleichung (35) ausgedrückt war; nachdem die Summe $(A_\varkappa)$ in die Form (40) gebracht worden, worin die Grössen $Z_1, Z_2, \cdots Z_p$ und die dazu gehörigen Irrationalitäten den durch die Gleichungen (65), (66), (67) ausgedrückten Bedingungen genügen, werden wir die Gleichung (35) in die Form setzen können

$$70)\quad (2p+1)\int \psi(x)\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r dx = \sum_0^{p-1} A_\varkappa \left\{ \int \frac{Z_{1\varkappa}^\varkappa \, dZ_{1\varkappa}}{\sqrt{Z_{1\varkappa}^{2p+1} - 1}} + \cdots + \int \frac{Z_{p\varkappa}^\varkappa \, dZ_{p\varkappa}}{\sqrt{Z_{p\varkappa}^{2p+1} - 1}} \right.$$

und die Grössen $Z_{1\varkappa}, Z_{2\varkappa}, \cdots Z_{p\varkappa}$ mit den dazu gehörigen Irrationalitäten genügen den (65), (66), (67) analogen Gleichungen.

Da nun aber, wie oben gezeigt worden, sich bei Erfüllung dieser Bedingungen stets

$$\sum_1^p{}^{\varrho} \int \frac{Z_{\varrho\varkappa}^\varkappa \, dZ_{\varrho\varkappa}}{\sqrt{Z_{\varrho\varkappa}^{2p+1} - 1}} = \int \varphi_\varkappa(x)\left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r dx$$

ergiebt, so folgt, dass

$$\sum_{0}^{p-1} A_\varkappa \sum_{1}^{p} \int \frac{Z_{\varrho\varkappa}^{\varkappa}\, d\, Z_{\varrho\varkappa}}{\sqrt{Z_{\varrho\varkappa}^{2p+1} - 1}}$$

$$= \int \big(A_0 \varphi_0(x) + A_1 \varphi_1(x) + \cdots + A_{p-1} \varphi_{p-1}(x)\big) \left(\sqrt[2p+1]{R(x)}\right)^r dx$$

wird, d. h. dass dann die Reduction für willkürlich gewählte $A_1, A_2, \cdots A_p$ möglich ist und

$$\psi(x) = A_0 \varphi_0(x) + A_1 \varphi_1(x) + \cdots + A_{p-1} \varphi_{p-1}(x)$$

wird. Die Lösung des oben behandelten Problems giebt also auch die Lösung der allgemeinen Aufgabe.

Wien.