

Zur Gruppe der acht harmonisch zugeordneten Flächen zweiten Grades.

Von

GEORG KOBER in Halle a./S.

In meiner Inauguraldissertation*) habe ich mir die Aufgabe gestellt, aus einem Tetraeder, dessen Kanten von einer Fläche zweiten Grades berührt werden, die Configuration der harmonisch zugeordneten Tetraeder und deren Beziehung zu den harmonisch zugeordneten Flächen zweiten Grades auf synthetischem Wege zu entwickeln. Insofern in der vorhandenen Literatur des Gegenstandes gerade auf jenen Zusammenhang mit den harmonisch zugeordneten Flächen nicht näher Bezug genommen ist, sei mir gestattet, denselben in den nachfolgenden Sätzen kurz zu bezeichnen — wobei bezüglich der näheren Ausführung eben auf meine Dissertation verwiesen sein mag**).

Das räumliche Analogon des vollständigen Viereckes sowohl als des vollständigen Vierseites der Ebene ist das *Paar harmonisch zugeordneter Tetraeder*. Es repräsentirt beides, das vollständige Fünfeck und das vollständige Fünfseit des Raumes, weil es durch ein Tetraeder und einen fünften Punkt oder eine fünfte Ebene vollständig bestimmt ist. Ein solches Tetraederpaar, welches stets zu den Ecken und Seiten eines dritten harmonisch zugeordneten Tetraeders perspectiv liegt, lässt folgende Doppelauffassung zu:

*) Die harmonisch zugeordneten Flächen zweiten Grades, Halle 1888.

**) Dem dort gegebenen Literatur-Verzeichnisse sind, wie mir von hochgeschätzter Seite mitgetheilt wurde, noch nachzutragen: die Arbeiten der Herren Retali (Mem. della Acc. di Bologna 1884, 1886) und Sturm (Math. Ann. Bd. 25. 26), ferner die Untersuchungen von Harnack über Raumcurven 4. Ordnung 1. Species im 13. Bande und die Bemerkungen des Herrn Caspary über desmische Tetraeder im 29. Bande dieser Annalen.

Die vier vollständigen Vierkante, in welchen ein Paar harmonisch zugeordneter Tetraeder identisch gesehen wird, ergänzen dasselbe zu einem vollständigen Achtecke (Hexaeder), dessen vier Diagonalepunkte die Mittelpunkte der vierfachen Perspective sind.

Die vier vollständigen Vierseite, in welchen ein Paar harmonisch zugeordneter Tetraeder identisch geschnitten wird, ergänzen dasselbe zu einem vollständigen Achteite (Octaeder), dessen vier Diagonalebene die Hauptebenen der vierfachen Perspective sind.

Oder:

Zwei harmonisch zugeordnete Tetraeder bestimmen ein vollständiges Achteck und ein vollständiges Achteit im Raume, welche das dritte harmonisch zugeordnete Tetraeder zum gemeinschaftlichen Diagonaltetraeder haben.

Jenes besteht aus vier einfachen Octaedern, deren Diagonalen je drei Eckkanten, dieses aus vier einfachen Hexaedern, deren Diagonalen je drei Seitenkanten des gemeinschaftlichen Diagonaltetraeders sind. Je ein Octaeder des einen und ein Hexaeder des anderen, deren Diagonalen einander zum gemeinschaftlichen Diagonaltetraeder ergänzen, sind einander ein- und umgeschrieben.

In reciproker Beziehung haben zwei harmonisch zugeordnete Tetraeder zu dem dritten harmonisch zugeordneten Tetraeder verschiedene Lage. Stets werden die Ecken des einen Tetraeders von einer geraden, die Ecken des anderen Tetraeders von einer ungeraden Anzahl Seiten des dritten Tetraeders ein- und ausgeschlossen. Wie die Ecken des einen Tetraeders zu den Seiten des anderen Tetraeders liegen, so liegen auch die Seiten des ersteren zu den Ecken des letzteren; denn von wieviel Seiten eines Tetraeders ein Punkt ein- und ausgeschlossen wird, soviel Ecken desselben trennt die harmonisch zugeordnete Ebene. Wir sagen:

Von zwei harmonisch zugeordneten Tetraedern hat stets das eine gerade, das andere ungerade Lage zum dritten harmonisch zugeordneten Tetraeder.

Da jedes Paar harmonisch zugeordneter Tetraeder durch das eine und eine Ecke oder Seite des anderen vollständig bestimmt ist, so stellen irgend zwei Paare harmonisch zugeordneter Tetraeder, wenn die Ecken des einen den Seiten des anderen entsprechend gesetzt werden, zwei reciproke Räume dar, in denen auch die dritten harmonisch zugeordneten Tetraeder einander entsprechen. Sind daher zwei Paare harmonisch zugeordneter Tetraeder demselben dritten Tetraeder harmonisch zugeordnet, so ist dieses ein Polartetraeder, und jene befinden sich in polarer Lage. Da aber durch ein Polartetraeder und ein Paar Pol und Polarebene ein Polarsystem vollständig

und eindeutig bestimmt ist, so liegen gleichzeitig acht Paare reciproker Räume polar, nämlich vier, in denen die gleichliegenden, und vier, in denen die ungleichliegenden Tetraeder einander entsprechen. Solche *acht räumlichen Polarsysteme*, welche durch zwei *conjugirte* (demselben dritten Tetraeder harmonisch zugeordnete) *Paare harmonisch zugeordneter Tetraeder* bestimmt sind, heissen *harmonisch zugeordnet*, ihre Kerne *harmonisch zugeordnete Flächen zweiten Grades*. In dieser Definition ist die Grundeigenschaft ausgesprochen, aus welcher sämtliche Eigenschaften harmonisch zugeordneter Flächen zweiten Grades fließen. Aus dem Umstande nämlich, dass die acht Paare Pole und Polarebenen des einen Polarsystemes die acht Polarebenen und die acht Pole des einen Paares Pol und Polarebene in Bezug auf die acht Polarsysteme sind, geht klar hervor:

Von acht harmonisch zugeordneten Polarsystemen ist jedes in Bezug auf jedes sein eigenes Polargebilde.

Ferner ergibt sich aus der perspectiven Lage harmonisch zugeordneter Tetraeder:

In acht harmonisch zugeordneten Polarsystemen gehören jeder Ecke und Seite des gemeinschaftlichen Polartetraeders bez. dieselben vier harmonisch zugeordneten Polarbündel und Polarfelder, jeder Kante desselben dieselben zwei harmonisch zugeordneten Punkt- und Ebeneninvolutionen zu.

Endlich zeigt sich allgemein:

Die acht Pole jeder Ebene und deren acht Polarebenen in Bezug auf acht harmonisch zugeordnete Polarsysteme bilden zwei Paare harmonisch zugeordneter Tetraeder, welche dem gemeinschaftlichen Polartetraeder harmonisch zugeordnet sind.

Insbesondere sind die beiden *Centraltetraeder* der acht harmonisch zugeordneten Polarsysteme einander und dem gemeinschaftlichen Polartetraeder harmonisch zugeordnet, woraus sowohl die allgemeine als auch die besondere Natur harmonisch zugeordneter Flächen zweiten Grades folgt:

Die acht harmonisch zugeordneten Flächen einer Gruppe zerfallen in zwei Reihen, in vier gerade und vier ungerade Flächen. Von den vier geraden Flächen ist die eine ein imaginäres Ellipsoid, die drei anderen sind hyperbolische Hyperboloide. Unter den vier ungeraden oder elliptischen Flächen ist ein oder kein Ellipsoid, je nachdem beide Centraltetraeder zu einander ungerade oder gerade Lage haben.

Schliesslich giebt es unter den conjugirten Paaren harmonisch zugeordneter Tetraeder ein sich selbst conjugirtes Paar harmonisch zugeordneter Tetraeder in Bezug auf die acht Flächen. Jedes dieser beiden Tetraeder ist in Bezug auf die vier geraden Flächen sein

eigenes, in Bezug auf die vier ungeraden Flächen des anderen Polargebilde. Hieraus folgt auf Grund der octaedrischen und hexaedrischen Auffassung harmonisch zugeordneter Tetraeder:

Je ein einfaches Octaeder und ein einfaches Hexaeder des sich selbst conjugirten Tetraederpaares, welche einander ein- und umgeschrieben sind, sind in Bezug auf jede der acht harmonisch zugeordneten Flächen zweiten Grades polarreciprok. Von den Gegenecken des ersteren und den Gegenseiten des letzteren enthalten bez. berühren drei elliptische Flächen je ein Paar, eine elliptische Fläche drei Paare, die drei hyperbolischen Flächen je zwei Paare, die imaginäre Fläche kein Paar.

Für die reellen Flächen heisst das:

Jede der vier elliptischen Flächen berührt die Kanten des sich selbst conjugirten Paares harmonisch zugeordneter Tetraeder in denjenigen Punkten, in welchen sie die Kanten des gemeinschaftlichen Polartetraeders schneidet, während jede der drei hyperbolischen Flächen beiden Tetraedern gleichzeitig um- und eingeschrieben ist.

Halle a./S., im September 1888.