

Mémoire.

Sur la loi de la pesanteur à la surface de la mer, dans son état d'équilibre.

Par Mr. Jean Plana.

Il y a une connexion intime entre la loi des rayons vecteurs conduits depuis le centre de gravité de la Terre à sa surface, et la loi de la pesanteur des corps à la surface de la mer. La forme algébrique est la même pour l'une et l'autre de ces deux fonctions de latitude et longitude géographique. En outre, la longueur des degrés mesurés dans le sens du méridien, est une troisième fonction de ces deux variables, qui, sous le rapport de la forme algébrique, s'identifie avec les deux premières. L'analyse démontre que la loi de la pesanteur, et celle de la longueur des degrés de latitude, dérivent de la loi des rayons vecteurs. Mais la variété inhérente aux coefficients qui affectent les mêmes quantités variables dans ces trois fonctions, exige des considérations fort délicates, pour obtenir des formules comparables avec l'ensemble des résultats fournis par les observations. La théorie que j'expose me paraît nouvelle sur plusieurs points, et propre à améliorer nos connaissances sur le vaste problème, qui, dans la Mécanique Céleste, embrasse la Figure de la Terre, la loi de la pesanteur, et la loi des oscillations de l'Océan. Je ne puis exposer clairement les nouveaux résultats que j'ai obtenus, sans répéter ici les réflexions qui sont convenablement placées dans le texte. Les Lecteurs de ce Mémoire, qui désirent en prendre connaissance sauront se passer d'une longue préface exempte de toute formule algébrique, et mieux apprécier mon travail par un examen tant soit peu réfléchi des différents paragraphes dont il est composé.

J'ai pris le parti de cette espèce de réticence préliminaire, après avoir inutilement essayé d'exposer avec clarté, et en peu de mots, comment il arrive que toute trace des irrégularités de l'Océan et des Continens, disparaît dans le résultat qui exprime la loi de la pesanteur à la surface de la mer, au point qu'il se présente identique à celui que l'on obtient, d'une manière sans comparaison plus facile, dans l'hypothèse de l'inondation totale de la terre. Ici, comme dans d'autres théories, il y a un contraste frappant entre la simplicité du résultat final, et la complication des moyens pour y parvenir.

Ce Mémoire se rattache aux autres que j'ai déjà publiés dans les No. 828, 850, 851, 860, 861 des *Astronomische*

Nachrichten: il en est en quelque sorte le complément. En approfondissant l'étude de cette partie de la Mécanique Céleste, on lira peut-être ces recherches avec un intérêt croissant, et l'on sentira que la difficulté du sujet réclame ce degré d'indulgence, qui peut être accordé ou refusé, après un examen sévère du travail entier, que je livre au jugement des Géomètres et des Astronomes.

§ I.

La loi de la pesanteur à la surface de la mer, a été donnée au No. 33 du 3ème livre de la Mécanique Céleste, en supposant le sphéroïde terrestre entièrement recouvert par une couche très-mince d'eau en équilibre. La petitesse de la profondeur que l'on attribue ainsi à la mer, et à sa masse totale, permet de négliger l'action qu'elle exerce sur ses propres molécules, soit comparativement à celle de la Terre, soit en comparaison de la force centrifuge, (beaucoup plus petite) née de sa rotation diurne. *Laplace*, considérant ensuite que sa théorie, fondée sur la double hypothèse d'une inondation générale, et de la nullité d'action à l'égard de la masse de la mer, ne pouvait pas représenter le cas de la nature, a repris la question dans le XIème livre de son ouvrage, pour la tracer avec plus de généralité. Le principe qu'il a employé pour tenir compte de l'action exercée par la couche discontinue des mers sur un point quelconque de sa surface extérieure, est celui qui, avant tout, exige une explication spéciale, afin d'avoir des idées claires sur le mode d'existence de l'équation

$$\left(\frac{dV''}{dr}\right) + \frac{1}{2}V'' = 0 \dots\dots\dots(a)$$

posée à la page 24 du 5ème volume de la Mécanique Céleste. Si l'on réfléchit que le binôme $\left(\frac{dV''}{dr}\right) + \frac{1}{2}V''$, par sa nature, doit être nécessairement une fonction des deux variables θ et ω , (dont la première tient lieu du complément de la latitude, et la seconde de la longitude). On conçoit qu'il serait absurde de regarder l'égalité de ce binôme à zéro, comme si elle avait lieu par identité; c'est-à-dire, en vertu d'une simple

destruction mutuelle et littérale entre les différentes parties qui le composent. Car, alors, l'équation (a) aurait lieu pour tout point de la surface de la mer, aussi bien que pour tout point placé sur la surface d'un continent. Et cependant, pour remplir les conditions voulues dans la solution de ce problème, il est indispensable que l'équation (a) soit exclusivement vraie pour la seule partie de la surface de la Terre qui est couverte par la mer. Ainsi en posant d'abord

$$\left(\frac{dV''}{dr}\right) + \frac{1}{2}V'' = F(\theta, \omega)$$

il faut regarder la fonction $F(\theta, \omega)$ comme du genre de celles que Fourier a, le premier, introduites dans l'analyse: c'est-à-dire, comme une fonction qui a la propriété d'être nulle pour une ou plusieurs étendues finies, tandis qu'elle acquiert des valeurs différentes de zéro pour d'autres étendues finies. C'est ainsi, par exemple, que la fonction

$$2\omega \left\{ \frac{\sin \omega \cdot \sin \theta}{\pi^2 - \omega^2} + \frac{\sin 2\omega \cdot \sin 2\theta}{\pi^2 - 2^2 \cdot \omega^2} + \frac{\sin 3\omega \cdot \sin 3\theta}{\pi^2 - 3^2 \cdot \omega^2} + \text{etc.} \right\}$$

considérée par Fourier à la page 245 de son ouvrage sur la Théorie de la Chaleur, a la propriété d'être égale à zéro pour toute valeur de θ , comprise entre les limites $\theta = \omega$, $\theta = \pi$; et de devenir égale à $\sin \theta$ pour toute valeur de θ comprise entre les limites $\theta = 0$, $\theta = \omega$.

La série plus simple

$$\frac{\pi}{4} - \cos \theta + \frac{1}{3} \cos 3\theta - \frac{1}{5} \cos 5\theta + \text{etc.}$$

offre un phénomène semblable d'analyse algébrique: car, elle demeure égale à zéro, pour toute valeur de θ comprise entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$, tandis qu'elle devient égale à une quantité différente de zéro pour toute valeur de θ qui surpasse $\frac{\pi}{2}$.

En envisageant l'équation (a) de Laplace sous ce point de vue, qui est le seul compatible avec son existence, on fait disparaître toute obscurité; mais on reconnaît en même temps, que sa démonstration fondée sur la simple considération des éléments de l'intégrale, est inadmissible. Il s'agit ici d'un cas singulier, qui échappe à l'analyse ordinaire, et l'on est forcé de lui appliquer la théorie des fonctions discontinues entre deux variables, pour les transformer en fonctions continues, à l'aide des principes exposés par Poisson dans plusieurs de ses Mémoires, et, en particulier, au Chapitre VIII de sa Théorie de la Chaleur. C'est de quoi je vais d'abord m'occuper, en conservant autant que possible, pour plus de brièveté, les lettres et les définitions de la Mécanique Céleste.

§ II.

Soient R , R' , R'' trois rayons vecteurs ayant pour origine commune le centre de gravité du sphéroïde terrestre, formé

par des couches solidifiées, dont la densité est, depuis la surface extérieure, successivement croissante en passant d'une couche à la suivante. Le premier

$$R = 1 + \alpha \bar{y}$$

représente le rayon vecteur d'un point quelconque de cette surface, telle qu'on la verrait si la mer était anéantie. Le second

$$R' = 1 + \alpha \bar{y} + \alpha y'$$

appartient à la surface de la mer censée continuée dans l'intérieur des continents et des îles: de manière que la fonction $\alpha y'$ aura une valeur positive ou négative, suivant que le point auquel elle sera rapportée, sera situé à l'extrémité d'un rayon R , qui aboutit au fond de la mer, ou sur un continent. Enfin, le troisième rayon vecteur

$$R'' = 1 + \alpha \bar{y} + \alpha y' + \alpha z'$$

appartient uniquement aux points situés sur des continents. Pour cela, il faudra que la valeur de $\alpha z'$ soit nulle pour tout point placé sur la surface de la mer, et devienne égale à $-\alpha y'$ pour tout point placé sur la surface d'un continent, où la valeur de R'' doit coïncider avec celle désignée par R . Les trois fonctions $\alpha \bar{y}$, $\alpha y'$, $\alpha z'$ des deux angles θ et ω , quoiqu'inconnues, peuvent toujours être représentées par des séries convergentes, à l'aide des fonctions entières et rationnelles de deux variables, introduites par Legendre et Laplace dans la Théorie de l'attraction des sphéroïdes. Et l'on sait qu'une même fonction ne peut être ainsi représentée que d'une seule manière. Soient donc

$$\alpha \bar{y} = \alpha \{ Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + \text{etc.} \};$$

$$\alpha y' = \alpha \{ Y'^{(0)} + Y'^{(1)} + Y'^{(2)} + Y'^{(3)} + \text{etc.} \};$$

$$\alpha z' = \alpha \{ Z^{(0)} + Z^{(1)} + Z^{(2)} + Z^{(3)} + \text{etc.} \};$$

les trois séries convergentes qui tiennent lieu de chacune de ces fonctions. Les coefficients qui entrent dans la composition de chacun de leurs termes, sont censés déterminés par des mesures effectives (en très-grand nombre), des quantités $R-1$, $R'-R$, $R''-R'$ auxquelles on aurait appliqué la double intégration (par la méthode des quadratures) entre les limites $\theta' = 0$, $\theta' = \pi$, $\omega' = 0$; $\omega' = 2\pi$, conformément à la formule générale désignée par (4) à la page 220 de la Théorie de la Chaleur par Poisson.

Ayant ainsi exprimé par des fonctions continues les fonctions discontinues, qui, dans l'état primitif, représentent les trois rayons vecteurs R , R' , R'' , on pourra considérer la totalité de l'eau des mers comme composée: 1° d'une couche ayant pour épaisseur $R'-R$ dans un de ses points quelconques: 2° d'une autre couche ayant pour épaisseur $R''-R'$.

La somme des molécules de la première couche, [dirigées, chacune par sa distance à un point attiré, qui lui est extérieur, étant nommée U' , sera exprimée par la série

$$U' = 4\pi\rho' \cdot \alpha \left\{ \frac{Y'^{(0)}}{r} + \frac{Y'^{(1)}}{3r^2} + \frac{Y'^{(2)}}{5r^3} + \frac{Y'^{(3)}}{7r^4} + \text{etc.} \right\} \dots (1)$$

r étant la distance du point attiré au centre de gravité du sphéroïde, et ρ' la densité de la mer. De même, la somme analogue U'' relative à la seconde couche, sera exprimée par

$$U'' = 4\pi\rho' \cdot \alpha \left\{ \frac{Z'^{(0)}}{r} + \frac{Z'^{(1)}}{3r^2} + \frac{Z'^{(2)}}{5r^3} + \frac{Z'^{(3)}}{7r^4} + \text{etc.} \right\} \dots (2)$$

$$-\left(\frac{dU'}{dr}\right) - \frac{1}{2}U' = 2\pi\rho' \cdot \alpha \left\{ \frac{Y'^{(0)}}{r} + \frac{Y'^{(1)}}{r^2} + \frac{Y'^{(2)}}{r^3} + \frac{Y'^{(3)}}{r^4} + \text{etc.} \right\} + 4\pi\rho' \cdot \left(\frac{1}{r} - 1\right) \alpha \left\{ \frac{Y'^{(0)}}{r} + \frac{2Y'^{(1)}}{3r^2} + \frac{3Y'^{(2)}}{5r^3} + \frac{4Y'^{(3)}}{7r^4} + \text{etc.} \right\}$$

$$-\left(\frac{dU''}{dr}\right) - \frac{1}{2}U'' = 2\pi\rho' \cdot \alpha \left\{ \frac{Z'^{(0)}}{r} + \frac{Z'^{(1)}}{r^2} + \frac{Z'^{(2)}}{r^3} + \frac{Z'^{(3)}}{r^4} + \text{etc.} \right\} + 4\pi\rho' \cdot \left(\frac{1}{r} - 1\right) \alpha \left\{ \frac{Z'^{(0)}}{r} + \frac{2Z'^{(1)}}{3r^2} + \frac{3Z'^{(2)}}{5r^3} + \frac{4Z'^{(3)}}{7r^4} + \text{etc.} \right\}.$$

Donc, si l'on observe que pour tout point placé à la surface de la mer, on doit faire

$$r = R' = 1 + \alpha\bar{y} + \alpha y'$$

on voit qu'il suffit de poser $r = 1$, dès qu'on néglige les quantités multipliées par le carré de α ; ce qui donne

$$-\left(\frac{dU'}{dr}\right) - \frac{1}{2}U' = 2\pi\rho' \cdot \alpha \left\{ Y'^{(0)} + Y'^{(1)} + Y'^{(2)} + Y'^{(3)} + \text{etc.} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

$$-\left(\frac{dU''}{dr}\right) - \frac{1}{2}U'' = 2\pi\rho' \cdot \alpha \left\{ Z'^{(0)} + Z'^{(1)} + Z'^{(2)} + Z'^{(3)} + \text{etc.} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

ou bien

$$-\left(\frac{dU'}{dr}\right) - \frac{1}{2}U' = 2\pi\rho' \cdot \alpha\Phi' \dots \dots \dots (5)$$

$$-\left(\frac{dU''}{dr}\right) - \frac{1}{2}U'' = 2\pi\rho' \cdot \alpha z' \dots \dots \dots (6)$$

Mais la fonction de θ et ω qui représente la valeur de $\alpha z'$ par la série $Z'^{(0)} + Z'^{(1)} + \text{etc.}$ doit converger indéfiniment vers zéro pour tout point placé à la surface de la mer: donc, pour ces points, (et exclusivement pour eux) l'équation (6) donnera

$$-\left(\frac{dU''}{dr}\right) - \frac{1}{2}U'' = 0 \dots \dots \dots (7)$$

c'est-à-dire, l'équation employée par *Laplace*. Par cette démonstration, on conçoit de quelle manière la même fonction peut demeurer égale à zéro dans une étendue finie, et prendre ensuite des valeurs différentes de zéro dans une autre étendue finie. Le caractère distinctif de l'équation (7) est donc d'avoir lieu pour des portions, et non pour la totalité de la surface sphérique, décrite avec un rayon égal à l'unité. Remarquons maintenant que l'équation (7) se rapporte à une couche, dont les surfaces ayant R' , R'' pour rayon vecteur, respectivement, ne sont sphériques ni l'une ni l'autre. Mais s'il était question

Ainsi, quoique l'on ait, non par identité, mais par une convergence indéfinie

$$Z'^{(0)} + Z'^{(1)} + Z'^{(2)} + \text{etc.} = 0,$$

pour tout point placé sur la surface de la mer, l'on n'aura pas, en même temps, $U'' = 0$, puisqu'il n'y aura pas égalité entre la partie positive et négative de la série

$$Z' + \frac{Z'^{(1)}}{3} + \frac{Z'^{(2)}}{5} + \frac{Z'^{(3)}}{7} + \text{etc.}$$

Or, sans rien statuer d'avance sur la valeur de la distance r du point attiré à l'origine des rayons vecteurs, ces expressions de U' , U'' donnent;

d'une couche comprise entre une surface sphérique ayant $R'' = a$ pour rayon, et une autre surface peu différente de la sphérique, ayant pour rayon vecteur

$$R^{IV} = a \{1 + \alpha f(\theta, \omega)\},$$

on obtiendrait une équation qui doit être distinguée des précédentes.

Pour plus de facilité nous supposons que l'intégrale $V = \int \frac{dm}{f}$ est relative à la totalité des molécules dm d'un sphéroïde homogène. En décomposant ce sphéroïde (peu différent de la sphère) en deux masses, dont une soit la sphère du rayon a , et l'autre la couche dont l'épaisseur est $\alpha\alpha f(\theta, \omega)$, l'on aura pour un point extérieur placé à la distance r du centre de la sphère

$$V = \frac{4\pi\rho \cdot a^3}{3 \cdot r} + u;$$

ρ étant la densité du sphéroïde, et u la valeur de l'intégrale $\int \frac{dm}{f}$, relative aux molécules de la couche disséminée sur la surface de la sphère. Cette équation, différentiant par rapport $a'r$, donne

$$0 = a \left(\frac{dV}{dr} \right) + \frac{1}{2} V + \frac{4 \pi \rho \cdot a^4}{3 r^2} - \frac{2 \pi \rho \cdot a^3}{3 r} - a \left(\frac{du}{dr} \right) - \frac{1}{2} u.$$

Maintenant, si l'on fait $r = a \{1 + \alpha f(\theta, \omega)\}$, l'on aura, en négligeant le carré de α ;

$$0 = a \left(\frac{dV}{dr} \right) + \frac{1}{2} V + \frac{2 \pi \rho \cdot a^2}{3} - 2 \pi \rho a^2 \cdot \alpha f(\theta, \omega) - a \left(\frac{du}{dr} \right) - \frac{u}{2}.$$

Mais, l'analyse qui nous a fourni l'équation, (5) donnerait ici

$$-a \left(\frac{du}{dr} \right) - \frac{u}{2} = 2 \pi \rho a^2 \cdot \alpha f(\theta, \omega);$$

donc, l'on a

$$0 = a \left(\frac{dV}{dr} \right) + \frac{1}{2} V + \frac{2 \pi \rho}{3} \cdot a^3 - 2 \pi \rho a^2 \cdot \alpha f(\theta, \omega) + 2 \pi \rho a^2 \cdot \alpha f(\theta, \omega);$$

c'est-à-dire, identiquement, et pour toute la surface de la sphère du rayon a ;

$$a \left(\frac{dV}{dr} \right) + \frac{1}{2} V + \frac{2 \pi \rho}{3} \cdot a^2 = 0;$$

ou bien, en faisant $a = 1$;

$$- \left(\frac{dV}{dr} \right) - \frac{1}{2} V = \frac{2 \pi \rho}{3} \dots \dots \dots (8)$$

Le premier membre de cette équation n'est point une fonction de θ et ω , ni continue, ni discontinue; c'est une quantité constante égale à $\frac{2 \pi \rho}{3}$, dès que l'on néglige dans l'expression de V les quantités de l'ordre du carré de α . L'équation (8) n'est pas susceptible de la transition qui est inhérente à l'équation (7): elle demeure invariable pour tout point attiré, placé sur la surface du sphéroïde. En ce sens, l'équation (8), qui est celle trouvée d'abord, et publiée ensuite à la page 28 du second volume de la Mécanique Céleste, ne pouvait pas être immédiatement appliquée à l'action exercée par la masse discontinue des eaux de la mer. Mais Laplace a saisi, avec sa sagacité, la modification convenable qu'il fallait faire à l'équation (8) pour la plier au cas de la nature; ce qui lui a fourni l'équation, (a) dont j'ai d'abord parlé.

Toutefois, il faut avouer que sa démonstration est inadmissible. Pour compléter celle que je viens d'en donner j'ajouterai qu'en appliquant la formule de Poisson

$$Y_n = \left(\frac{2n+1}{4\pi} \right) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_n \cdot f(\theta', \omega') \sin \theta' \cdot d\theta' d\omega'$$

que j'ai citée, il conviendra de remplacer le facteur P_n par sa valeur exprimée par des termes, ayant chacun la forme $F(\theta, \omega) \cdot F'(\theta', \omega')$ afin de faire sortir le facteur $F(\theta, \omega)$ hors du signe intégral. On trouve la valeur de P_n sous cette forme à la page 269 du second volume des Exercices de Calcul Intégral de Legendre.

§ III.

Voici maintenant l'analyse propre à établir avec une grande généralité la loi de la pesanteur p qui a lieu à la surface de la mer dans son état d'équilibre.

Les forces attractives des molécules du sphéroïde terrestre et de la mer, ainsi que les forces centrifuges étant multipliées, respectivement, par la différentielle de leurs directions, et ensuite intégrées, donnent, en désignant par Q cette intégrale, relativement à tout point attiré, extérieur à la Terre, et qui participe à son mouvement de rotation

$$Q = \frac{M'}{r} + M' \cdot \alpha \varphi \left\{ \frac{r^2}{3} - \frac{r^2}{2} (\mu^2 - \frac{1}{2}) \right\} + U' + U'' + 4 \pi \alpha \int_0^1 \rho d \left\{ \frac{a^3 Y^{(0)}}{r} + \frac{a^4 Y^{(1)}}{3 r^2} + \frac{a^5 Y^{(2)}}{5 r^3} + \frac{a^6 Y^{(3)}}{7 r^4} + \text{etc.} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

où

$$M' = \frac{4 \pi}{3} \int_0^1 \rho d \cdot a^3, \quad \mu = \cos \theta, \quad \text{et} \quad \alpha \varphi = \frac{1}{2 \frac{1}{3} 6} = 0,0034602;$$

c'est-à-dire, la petite fraction qui exprime le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sur l'équateur. La lettre r désigne la distance du point attiré au centre de gravité du sphéroïde terrestre, et la lettre ρ représente une fonction du paramètre α propre à exprimer la loi de la densité de ses couches. En rapprochant les Nos. 23 et 29 du second volume de la Mécanique Céleste, on voit quelle est l'origine du premier, du se-

cond, et du cinquième terme, (affecté du signe intégral) qui entrent dans cette valeur de Q .

Maintenant si, sans rien statuer d'avance sur la valeur de r , nous tirons de là l'expression du binôme $-\left(\frac{dQ}{dr}\right) - \frac{1}{2} Q$ on obtient

$$-\left(\frac{dQ}{dr}\right) - \frac{1}{2}Q = \frac{M'}{r^2} - \frac{M'}{2r} - M'\alpha\varphi\left\{\frac{2}{3}r + \frac{r^2}{6} - (r + \frac{r^2}{4})(\mu^2 - \frac{1}{2})\right\} - \left(\frac{dU'}{dr}\right) - \frac{1}{2}U' - \left(\frac{dU''}{dr}\right) - \frac{1}{2}U'' \\ + 4\pi\alpha\int_0^1 \rho d\left\{\frac{a^3 Y^{(0)}}{2r^2}(2-r) + \frac{a^4 Y^{(1)}}{6r^3}(4-r) + \frac{a^5 Y^{(2)}}{10r^4}(6-r) + \frac{a^6 Y^{(3)}}{14r^5}(8-r) + \frac{a^7 Y^{(4)}}{18r^6}(10-r) + \text{etc.}\right\}$$

Cela posé, si l'on fait $r = 1 + \alpha\bar{y} + \alpha y'$, et seulement $r=1$ dans les termes multipliés par α , l'on aura, à la surface de la mer;

$$\left. \begin{aligned} -\left(\frac{dQ}{dr}\right) - \frac{1}{2}Q &= \frac{1}{2}M' - \frac{5}{6}M'\alpha\varphi + \frac{5}{2}M'\alpha\varphi(\mu^2 - \frac{1}{2}) - \frac{3}{2}M' \cdot \alpha\bar{y} - \frac{3}{2}M' \alpha y' \\ &+ 2\pi\rho' \cdot \alpha y' + 2\pi\alpha\int_0^1 \rho d\left\{a^3 Y^{(0)} + a^4 Y^{(1)} + a^5 Y^{(2)} + a^6 Y^{(3)} + \text{etc.}\right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

en observant que nos équations (5) et (7) donnent;

$$-\left(\frac{dU'}{dr}\right) - \frac{1}{2}U' = 2\pi\rho' \cdot \alpha y'; \quad -\left(\frac{dU''}{dr}\right) - \frac{1}{2}U'' = 0.$$

Mais, d'après le principe fondamental de l'hydrostatique, la valeur de Q doit se réduire à une quantité constante pour tout point placé à la surface de la mer: donc, en observant que l'équation (9) devient à cette surface;

$$Q = M'(1 - \alpha\bar{y} - \alpha y') + \frac{M'\alpha\varphi}{3} - \frac{M'\alpha\varphi}{2}(\mu^2 - \frac{1}{2}) + U' + U'' + 4\pi\alpha\int_0^1 \rho d\left\{a^3 Y^{(0)} + \frac{a^4}{3}Y^{(1)} + \frac{a^5}{5}Y^{(2)} + \frac{a^6}{7}Y^{(3)} + \text{etc.}\right\}$$

on en conclura que cette valeur de Q ne peut être indépendante des deux variables θ, ω se x réduire effectivement à une quantité constante sans avoir à la fois ces deux équations; savoir

$$Q = M'\left(1 + \frac{\alpha\varphi}{3}\right) - M'\alpha(Y^{(0)} + Y'^{(0)}) + 4\pi\rho' \cdot \alpha(Y' + Z') + 4\pi\alpha\int_0^1 \rho d.(a^3 Y^{(0)}) \dots\dots\dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -M' \frac{\alpha\varphi}{2} (\mu^2 - \frac{1}{2}) \\ &- M'\alpha\left\{\bar{Y}^{(1)} + \bar{Y}^{(2)} + \bar{Y}^{(3)} + \text{etc.}\right\} \\ &- M'\alpha\left\{Y'^{(1)} + Y'^{(2)} + Y'^{(3)} + \text{etc.}\right\} \\ &+ 4\pi\rho' \cdot \alpha\left\{\frac{Y^{(1)}}{3} + \frac{Y^{(2)}}{5} + \frac{Y^{(3)}}{7} + \text{etc.}\right\} \\ &+ 4\pi\rho' \cdot \alpha\left\{\frac{Z'^{(1)}}{3} + \frac{Z'^{(2)}}{5} + \frac{Z'^{(3)}}{7} + \text{etc.}\right\} \\ &+ 4\pi\alpha\int_0^1 \rho d\left\{\frac{a^4 Y^{(1)}}{3} + \frac{a^5 Y^{(2)}}{5} + \frac{a^6 Y^{(3)}}{7} + \text{etc.}\right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (12)$$

c'est-à-dire

M = masse totale de la Terre,

on a l'équation

$$\left. \begin{aligned} p &= M - M'\left\{\frac{2}{3}\alpha\varphi + 2\alpha\bar{Y}^{(0)} + 2\alpha Y'^{(0)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho'}{\int_0^1 \rho d.a^3} \cdot \alpha Z'^{(0)}\right\} \\ &+ \frac{5}{2}M'\alpha\varphi(\mu^2 - \frac{1}{2}) \\ &+ 2\pi\alpha\int_0^1 \rho d\left\{a^4 Y^{(1)} + a^5 Y^{(2)} + a^6 Y^{(3)} + \text{etc.}\right\} \\ &- 2\pi\alpha\left\{\bar{Y}^{(1)} + \bar{Y}^{(2)} + \bar{Y}^{(3)} + \text{etc.}\right\} \int_0^1 \rho d.a^3 \\ &+ 2\pi\alpha\left\{Y'^{(1)} + Y'^{(2)} + Y'^{(3)} + \text{etc.}\right\} \left(\rho' - \int_0^1 \rho d.a^3\right). \end{aligned} \right\} 14$$

Mais, l'équation (12) ne peut être satisfaite sans avoir séparément;

En faisant $p = -\left(\frac{dQ}{dr}\right)$, et substituant ensuite dans l'équation, (10) la valeur de $\frac{Q}{2}$ fournie par l'équation (11) on trouvera que, en posant pour plus de simplicité

$$M = M' + 4\pi\rho'(\alpha Y^{(0)} + \alpha Z'^{(0)}) + 4\pi\alpha\int_0^1 \rho d.(a^3 Y^{(0)}) \dots (13)$$

$$0 = -M'\alpha(Y^{(1)} + Y'^{(1)}) + \frac{4\pi\rho'\alpha}{3}(Y^{(1)} + Z'^{(1)}) + \frac{4\pi\alpha}{3}\int_0^1 \rho d(a^4 Y^{(1)}),$$

c'est-à-dire,

$$\left. \begin{aligned} 2\pi\alpha \int_0^1 \rho d.(a^4 Y^{(1)}) - 2\pi\alpha (\bar{Y}^{(1)} + Y'^{(1)}) \int_0^1 \rho d.a^3 \\ + 2\pi\rho' . \alpha \bar{Y}'^{(1)} = -2\pi\rho' . \alpha Z^{(1)} \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

donc, en substituant cette valeur dans le second membre de l'équation précédente, on aurait

$$p = M - 2\pi\rho' . \alpha Z^{(1)} + \frac{5}{2} M' \alpha \Phi(\mu^2 - \frac{1}{3}) + \text{etc.}$$

Actuellement, si l'on remarque que les observations sur la longueur du pendule, démontrent que l'existence du terme $-2\pi\rho' . \alpha Z^{(1)}$, dont la forme la plus générale est

$$A \cos \theta + B \sin \theta . \cos \omega + C \sin \theta . \sin \omega,$$

A, B, C étant des coefficients constans, est impossible, on en conclura que pour faire disparaître de la théorie cette impossibilité, on doit faire $\alpha Z^{(1)} = 0$. Alors, l'équation (15) ne peut être satisfaite sans faire aussi $Y'^{(1)} = 0$. Car, ayant placé l'origine des rayons vecteurs au centre de gravité du sphéroïde terrestre, on doit avoir, par la propriété fondamentale de a centre,

$$\int_0^1 \rho d.(a^4 Y^{(1)}) = 0$$

ainsi que cela est démontré au Nr. 31 du second Vol. de la M. C. Or, il suit de là, que l'équation (15) est réduite à celle-ci;

$$\alpha Y'^{(1)} = \frac{a \bar{Y}^{(1)} \int_0^1 \rho d.a^3}{\rho' - \int_0^1 \rho d.a^3}.$$

Mais, les phénomènes des marées démontrent que l'existence du terme $\alpha Y'^{(1)}$ dans l'expression de la profondeur de la mer est inadmissible; donc, on doit avoir $\bar{Y}^{(1)} = 0$, afin d'avoir $Y'^{(1)} = 0$. Par là, il est démontré que le centre de gravité de la masse des mers coïncide avec le centre de gravité du sphéroïde terrestre.

L'équation (14) peut, d'après cela, être réduite à celle-ci,

$$\left. \begin{aligned} p = M - M \left\{ \frac{2}{3} \alpha \Phi + 2 \alpha \bar{Y}^{(0)} + 2 \alpha Y'^{(0)} + \frac{3}{2} \alpha Z^{(0)} \frac{\rho'}{\int_0^1 \rho d.a^3} \right\} \\ + \frac{5}{2} M \alpha \Phi(\mu^2 - \frac{1}{3}) \\ + 2\pi\alpha \int_0^1 \rho d. \{ a^5 Y^{(2)} + a^6 Y^{(3)} + a^7 Y^{(4)} + \text{etc.} \} \\ - 2\pi\alpha (\bar{Y}^{(2)} + \bar{Y}^{(3)} + \bar{Y}^{(4)} + \text{etc.}) \int_0^1 \rho d.a^3 \\ + 2\pi\alpha (Y'^{(2)} + Y'^{(3)} + Y'^{(4)} + \text{etc.}) (\rho' - \int_0^1 \rho d.a^3), \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

en observant que j'ai remplacé M' par M dans les termes multipliés $p\alpha$; ce qui est permis, puisque, par l'équation (13), la différence $M - M'$ est une quantité du 1^{er} ordre. Après avoir supprimé dans le second membre de l'équation, (12) les termes compris dans l'équation (15), on verra qu'elle ne peut-être satisfaite sans avoir séparément

$$M' . \frac{\alpha \Phi}{2} (\mu^2 - \frac{1}{3}) = \frac{4\pi\alpha}{5} \int_0^1 \rho d.(a^5 Y^{(2)}) - M' \alpha (\bar{Y}^{(2)} + Y'^{(2)}) + \frac{4\pi\rho'}{5} \alpha (Y^{(2)} + Z^{(2)}) \dots (17)$$

c'est-à-dire,

$$2\pi\alpha \int_0^1 \rho d.(a^5 Y^{(2)}) - 2\pi\alpha (\bar{Y}^{(2)} + Y'^{(2)}) \int_0^1 \rho d.a^3 + 3\pi\rho' . \alpha Y'^{(2)} = \frac{5}{2} M' \alpha \Phi(\mu^2 - \frac{1}{3}) + M' \alpha (\bar{Y}^{(2)} + Y'^{(2)}) - 2\pi\rho' . \alpha Z^{(2)}.$$

Donc, en substituant cette valeur dans le second membre de l'équation (16), (après avoir remplacé M' par M), l'on aura

$$\begin{aligned}
p = & M - M \left\{ \frac{2}{3} \alpha \varphi + 2 \alpha \bar{Y}^{(0)} + 2 \alpha Y'^{(0)} + \frac{3}{2} \alpha Z'^{(0)} \frac{\rho'}{\int_0^1 \rho d.a^3} \right\} \\
& + \frac{5}{2} M \alpha \varphi (\mu^2 - \frac{1}{3}) + M \alpha \left\{ \bar{Y}^{(2)} + Y'^{(2)} - \frac{3}{2} Z'^{(2)} \frac{\rho'}{\int_0^1 \rho d.a^3} \right\} \\
& + 2 \pi \alpha \int_0^1 \rho d. \{ a^6 Y^{(3)} + a^7 Y'^{(4)} + a^8 I'^{(5)} + \text{etc.} \} \\
& - 2 \pi \alpha \{ \bar{I}^{(3)} + \bar{Y}^{(4)} + \bar{I}^{(5)} + \text{etc.} \} \int_0^1 \rho d.a^3 \\
& + 2 \pi \alpha \{ I'^{(3)} + I'^{(4)} + I'^{(5)} + \text{etc.} \} (\rho' - \int_0^1 \rho d.a^3).
\end{aligned} \quad \dots (18)$$

Mais, en revenant à l'équation (12), et considérant les termes affectés de $\bar{I}^{(3)}$, $\bar{Y}^{(3)}$, $I'^{(3)}$, $Z'^{(3)}$; $\bar{I}^{(4)}$, $\bar{Y}^{(4)}$, $I'^{(4)}$, $Z'^{(4)}$ etc.; on verra qu'elle ne peut être satisfaite sans avoir, depuis $n=3$, en général

$$2 \pi \alpha \int_0^1 \rho d. (a^{3+n} \bar{I}^{(n)}) - 2 \pi \alpha (\bar{Y}^{(n)} + I'^{(n)}) + 2 \pi \rho' \cdot \alpha I'^{(n)} = (n-1) (\alpha \bar{Y}^{(n)} + \alpha I'^{(n)}) \frac{4 \pi}{3} \int_0^1 \rho d.a^3 - 2 \pi \rho' \cdot \alpha Z'^{(n)} \dots (19)$$

Avec cette formule, on peut éliminer du second membre de l'équation (18) les termes affectés du signe intégral, qui se rapportent aux fonctions $\bar{Y}^{(3)}$, $\bar{I}^{(4)}$ etc., et exprimer la pesanteur p à la surface de la mer par cette équation, savoir;

$$\begin{aligned}
p = & M - M \left\{ \frac{2}{3} \alpha \varphi + 2 \alpha \bar{Y}^{(0)} + 2 \alpha I'^{(0)} + \frac{3}{2} \alpha Z'^{(0)} \frac{\rho'}{\int_0^1 \rho d.a^3} \right\} \\
& + \frac{5}{2} M \alpha \varphi (\mu^2 - \frac{1}{3}) + M \alpha \left\{ \bar{Y}^{(2)} + Y'^{(2)} - \frac{3}{2} Z'^{(2)} \frac{\rho'}{\int_0^1 \rho d.a^3} \right\} \\
& + 2 M \alpha \left\{ \bar{Y}^{(3)} + I'^{(3)} - Z'^{(3)} \cdot \frac{3}{4} \frac{\rho'}{\int_0^1 \rho d.a^3} \right\} \\
& + 3 M \alpha \left\{ \bar{Y}^{(4)} + I'^{(4)} - Z'^{(4)} \cdot \frac{3}{8} \frac{\rho'}{\int_0^1 \rho d.a^3} \right\} \\
& + (n-1) \left\{ \bar{Y}^{(n)} + I'^{(n)} - Z'^{(n)} \cdot \frac{3}{2(n-1)} \frac{\rho'}{\int_0^1 \rho d.a^3} \right\} \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Mais, la réunion des termes affectés de $Z'^{(0)}$, $Z'^{(2)}$, $Z'^{(3)}$ etc. se réduit à la série

$$-\frac{3}{2} M \cdot \alpha (Z'^{(0)} + Z'^{(2)} + Z'^{(3)} + \text{etc.}) \frac{\rho'}{\int_0^1 \rho d.a^3}$$

qui doit converger indéfiniment vers zéro, ainsi que nous l'avons expliqué dans le second §. Donc, au lieu de cette équation, nous écrivons

$$\begin{aligned}
p = & M \left\{ 1 - \frac{2}{3} \alpha \varphi - 2 \alpha \bar{Y}^{(0)} - 2 \alpha I'^{(1)} \right\} \\
& + M \left\{ \frac{5}{2} \alpha \varphi (\mu^2 - \frac{1}{3}) + \alpha \bar{Y}^{(2)} + \alpha Y'^{(2)} \right\} \\
& + 2 M \left\{ \alpha \bar{Y}^{(3)} + \alpha Y'^{(3)} \right\} + 3 M \left\{ \alpha \bar{Y}^{(4)} + \alpha Y'^{(4)} \right\} \\
& + \dots (n-1) M \left\{ \alpha \bar{Y}^{(n)} + \alpha Y'^{(n)} \right\} + \text{etc.}
\end{aligned} \quad \dots (20)$$

Telle est l'analyse rigoureuse par laquelle on démontre que l'expression définitive de la pesanteur, à la surface de la mer, est indépendante des fonctions qui expriment l'élévation des continents au-dessus de son niveau.

§ IV.

S'il était question d'avoir les valeurs de $\bar{Y}^{(2)}$, $\bar{Y}^{(3)}$, $I'^{(4)}$ etc. en supposant connues celles de $\bar{Y}^{(2)}$, $\bar{Y}^{(3)}$ etc.; $\bar{Y}^{(2)}$, $\bar{Y}^{(3)}$ etc.;

$Z^{(2)}$, $Z^{(3)}$ etc.; il faudrait d'abord, de l'équation (17) tirer la valeur de $\alpha Y^{(2)}$; ce qui donnera

$$\alpha Y^{(2)} = \frac{\left\{ \begin{aligned} & - \left\{ 5 \alpha \varphi \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right) + 10 \alpha Y^{(2)} \right\} \int_0^1 \rho d.a^3 \\ & + 6 \left\{ \rho' \cdot \alpha Z^{(2)} + \alpha \int_0^1 \rho d.(a^5 Y^{(2)}) \right\} \end{aligned} \right\}}{10 \int_0^1 \rho d.a^3 - 6 \rho'} \dots\dots\dots (21)$$

ensuite l'équation (19) donnera

$$\alpha Y^{(n)} = \frac{3 \alpha \int_0^1 \rho d.(a^{3+n} Y^{(n)}) - (2n+1) \alpha Y^{(n)} \int_0^1 \rho d.a^3 + 3 \rho' \alpha Z^{(n)}}{(2n+1) \int_0^1 \rho d.a^3 - 3 \rho'} \dots\dots\dots (22)$$

Cela posé, il est clair que, de ces deux dernières équations, on tire

$$\alpha Y^{(2)} + \alpha Y^{(2)} = \frac{5 \alpha \varphi \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right) \int_0^1 \rho d.a^3 + 6 \left\{ \rho' \cdot \alpha Y^{(2)} - \rho' \cdot \alpha Z^{(2)} - \alpha \int_0^1 \rho d.(a^5 Y^{(2)}) \right\}}{6 \rho' - 10 \int_0^1 \rho d.a^3} \dots\dots\dots (23)$$

$$\alpha Y^{(n)} + \alpha Y^{(n)} = \frac{3 \alpha \int_0^1 \rho d.(a^{3+n} Y^{(n)}) - 3 \rho' (\alpha Y^{(n)} - \alpha Z^{(n)})}{(2n+1) \int_0^1 \rho d.a^3 - 3 \rho'} \dots\dots\dots (24)$$

§ V.

En appliquant ces formules générales au cas particulier d'un sphéroïde homogène (dont la densité serait ρ) couvert en partie par un liquide dont la densité soit ρ' , l'on a

$$\alpha Y^{(2)} + \alpha Y^{(2)} = \frac{\frac{3}{2} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) \alpha Y^{(2)} + \frac{3}{2} \frac{\rho'}{\rho} \alpha Z^{(2)} - \frac{5}{2} \alpha \varphi \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right)}{1 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right)} \dots\dots\dots (25)$$

$$\alpha Y^{(n)} + \alpha Y^{(n)} = \frac{3 \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) \alpha Y^{(n)} + 3 \frac{\rho'}{\rho} \alpha Z^{(n)}}{2n+1 - 3 \frac{\rho'}{\rho}} \dots\dots\dots (26)$$

Ainsi nous avons

$$\alpha Y^{(2)} + \alpha Y^{(2)} - \frac{3 \rho'}{2 \rho} Z^2 = \frac{\frac{3}{2} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) \left\{ \alpha Y^{(2)} - \frac{3 \rho'}{2 \rho} Z^{(2)} \right\} - \frac{5}{2} \alpha \varphi \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right)}{1 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right)} \dots\dots\dots (27)$$

$$(n-1) \left\{ \alpha \bar{Y}^{(n)} + \alpha Y'^{(n)} \right\} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\rho'}{\rho} \cdot \alpha Z'^{(n)} = \frac{3 \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) \left\{ (n-1) \alpha \bar{Y}^{(n)} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\rho'}{\rho} \cdot \alpha Z'^{(n)} \right\}}{2n+1 - 3 \frac{\rho'}{\rho}} \dots\dots\dots (28)$$

Cela posé, la formule qui précède celle désignée par (20), donne pour la loi de la pesanteur sur la surface liquide d'un tel sphéroïde;

$$\left. \begin{aligned} p = & M - M \left\{ \frac{2}{3} \alpha \Phi + 2 \alpha \bar{Y}^{(0)} + 2 \alpha Y'^{(0)} + \frac{3}{2} \alpha Z'^{(0)} \right\} \\ & + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) M \cdot \alpha Z'^{(0)} + \frac{5}{4} M \alpha \Phi (\mu^2 - \frac{1}{3}) \\ & + 3 \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) M \left\{ \frac{5}{4} \alpha \Phi (\mu^2 - \frac{1}{3}) + \alpha \bar{Y}^{(0)} - \frac{3}{2} \frac{\rho'}{\rho} \alpha Z'^{(2)} \right\} \\ & \frac{5 - 3 \frac{\rho'}{\rho}}{\rho} \\ & + 3 \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) M \left\{ \frac{2 \alpha \bar{Y}^{(3)} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\rho'}{\rho} \alpha Z'^{(3)}}{7 - 3 \frac{\rho'}{\rho}} \right\} \\ & + 3 \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) M \left\{ \frac{3 \alpha \bar{Y}^{(4)} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\rho'}{\rho} \alpha Z'^{(4)}}{9 - \frac{\rho'}{\rho}} \right\} \\ & + 3 \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) M \left\{ \frac{4 \alpha \bar{Y}^{(5)} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\rho'}{\rho} \alpha Z'^{(5)}}{11 - 3 \frac{\rho'}{\rho}} \right\} \\ & + \text{etc.} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

Dans le cas où l'inondation du sphéroïde serait totale, l'on aurait $Z' = 0$, $Z'^{(3)} = 0$ etc., et par conséquent

$$\left. \begin{aligned} p = & M - M \left\{ \frac{2}{3} \alpha \Phi + 2 \alpha \bar{Y}^{(0)} + 2 \alpha Y'^{(0)} + \frac{3}{2} \frac{\rho'}{\rho} \cdot \alpha Z'^{(0)} \right\} \\ & + \frac{5}{4} M \alpha \Phi (\mu^2 - \frac{1}{3}) + 3 \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) M \left\{ \frac{5}{4} \alpha \Phi (\mu^2 - \frac{1}{3}) + \alpha \bar{Y}^{(2)} \right\} \\ & \frac{5 - 3 \frac{\rho'}{\rho}}{\rho} \\ & + 3 \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) M \alpha \left\{ \frac{2 \bar{Y}^{(3)}}{7 - 3 \frac{\rho'}{\rho}} + \frac{3 \bar{Y}^{(4)}}{9 - 3 \frac{\rho'}{\rho}} + \frac{4 \bar{Y}^{(5)}}{11 - 3 \frac{\rho'}{\rho}} + \text{etc.} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

Les rayons vecteurs R et R' de la surface du sphéroïde et de la surface de l'Océan qui lui est superposée, sont

$$R = 1 + \alpha \bar{Y}^{(0)} + \alpha \bar{Y}^{(2)} + \alpha \bar{Y}^{(3)} + \alpha \bar{Y}^{(4)} + \text{etc.} \dots\dots\dots (31)$$

$$R' = 1 + \alpha \bar{Y}^{(0)} + \alpha Y'^{(0)} + \frac{3 \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) \alpha \bar{Y}^{(2)} - \frac{5}{2} \alpha \Phi (\mu^2 - \frac{1}{3})}{5 - 3 \frac{\rho'}{\rho}} + \frac{3 \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) \alpha \bar{Y}^{(3)}}{7 - 3 \frac{\rho'}{\rho}} + \frac{3 \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) \alpha \bar{Y}^{(4)}}{9 - 3 \frac{\rho'}{\rho}} + \text{etc.} \dots\dots (32)$$

Ces formules offrent une conséquence assez curieuse. Supposons la densité ρ du sphéroïde solide, égale à 5; celle du liquide étant prise pour unité: l'on aura $\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{5}$. Maintenant, si l'on fait $\frac{5}{4} \alpha \Phi = 0,0043250$, comme cela a lieu pour la Terre, et $\alpha \bar{Y}^{(2)} = -0,0023411 (\mu^2 - \frac{1}{3})$; l'on aura $\frac{5}{4} \alpha \Phi - 0,0023411 = 0,0019839$;

$$\frac{3 \left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right)}{5 - 3 \frac{\rho'}{\rho}} = \frac{1}{11}; \quad \frac{\frac{5}{2} \alpha \Phi}{5 - \frac{3}{2}} = 0,00196591;$$

$$\frac{1}{11} \cdot 0,0023411 = 0,00127697; \quad \frac{1}{11} \cdot 0,0019839 = 0,00180355;$$

partant nous avons

$$R = 1 + \alpha \bar{Y}^{(0)} - 0,0023411 (\mu^2 - \frac{1}{3}) + \alpha \bar{Y}^{(3)} + \alpha \bar{Y}^{(4)} + \text{etc.}$$

$$R' = 1 + \alpha \bar{Y}^{(0)} + \alpha Y^{(0)} - 0,00324288 (\mu^2 - \frac{1}{3}) + \frac{3}{2} \alpha \bar{Y}^{(3)} + \frac{7}{2} \alpha \bar{Y}^{(4)} + \text{etc.}$$

$$p = M \left\{ 1 + 0,0054071 (\mu^2 - \frac{1}{3}) + \frac{3}{2} \alpha \bar{Y}^{(3)} + \frac{6}{7} \alpha \bar{Y}^{(4)} + \text{etc.} \right\} - M \left\{ \frac{3}{2} \alpha \Phi + 2 \alpha \bar{Y}^{(0)} + 2 \alpha Y^{(0)} + \frac{1}{10} \alpha Z^{(0)} \right\}.$$

Abstraction faite des termes $\alpha \bar{Y}^{(3)}$, $\alpha \bar{Y}^{(4)}$ etc., cette expression de la pesanteur p , et celle du rayon R' , sont fort approchantes de celles qui ont lieu pour la Terre; mais il y a d'autres argumens qui rendent inadmissible l'hypothèse de l'homogénéité du noyau solide. Et pour en citer un, facile à constater, remarquons que la profondeur $R' - R$ de la mer, serait telle que l'on aurait

$$R' - R = \alpha \bar{Y}^{(0)} - 0,0009018 (\mu^2 - \frac{1}{3}) - \frac{5}{8} \alpha \bar{Y}^{(3)} - \frac{5}{7} \alpha \bar{Y}^{(4)} - \text{etc.}$$

De sorte que l'on a

$$2 \left(1 - \frac{3}{25}\right) - \frac{\alpha \Phi}{0,0009018} = -1,81;$$

et par conséquent

$$\frac{-6 L}{1,81 g r^3} \cdot \sin \delta \cos \theta \cdot \sin \nu \cos \nu \cdot \cos(nt + \varepsilon - \psi);$$

pour expression de la marée diurne à la latitude $90^\circ - \theta$, due à l'action d'un astre L , dont ν est la déclinaison, ψ l'ascension droite, r la distance à la Terre, et $nt + \varepsilon - \psi$ l'angle horaire. Cette marée est en contradiction par sa quotité et par son signe, avec le résultat des observations. (Lisez sur ce point les pages 192, 193 du second volume, et la page 227 du cinquième volume de la Mécanique Céleste). Les formules (30), (31), (32) offrent une autre conséquence remarquable. En y supposant $\rho = \rho'$; c'est-à-dire, la densité du noyau égale à celle du liquide, on aurait

$$R' = 1 + \alpha \bar{Y}^{(0)} + \alpha Y^{(0)} - \frac{5}{2} \alpha \Phi (\mu^2 - \frac{1}{3});$$

$$p = M \left\{ 1 - \frac{3}{2} \alpha \Phi - 2 \alpha \bar{Y}^{(0)} - 2 \alpha Y^{(0)} - \frac{3}{2} \alpha Z^{(0)} \right\} + \frac{5}{2} M \alpha \Phi (\mu^2 - \frac{1}{3});$$

tandis que la figure de la surface du corps solide aurait pour rayon vecteur

$$R = 1 + \alpha \bar{Y}^{(0)} + \alpha \bar{Y}^{(2)} + \alpha \bar{Y}^{(3)} + \alpha \bar{Y}^{(4)} + \text{etc.}$$

On pourrait donc varier à l'infini la figure du corps solide, et avoir toujours, soit pour la pesanteur, soit pour la surface

du liquide, les formules qui ont lieu pour l'ellipsoïde entièrement liquide. Une planète de bois de chêne, couverte par une couche d'eau, remplirait, à-peu-près, les conditions exprimées par ces trois dernières formules.

§ VI.

Les formules (21), (23) m'offrent l'occasion de faire disparaître une objection que *D'Alembert* avait élevée contre un passage de la Théorie de la figure de la Terre, publiée par *Clairant* en 1743. En posant

$$\alpha Z' = 0, \quad \alpha \bar{Y}^{(2)} = -\alpha h (\mu^2 - \frac{1}{3});$$

$$\alpha \bar{Y}^{(2)} = -\alpha h (\mu^2 - \frac{1}{3}); \quad \alpha \bar{Y}^{(2)} + \alpha Y^{(2)} = -\alpha G (\mu^2 - \frac{1}{3})$$

la formule (23) donne

$$\alpha G = \frac{6 \int_0^1 \rho d \cdot (a^5 \cdot \alpha h) + 5 \alpha \Phi \int_0^1 \rho d \cdot a^3 - 6 \rho' \cdot \alpha h}{10 \int_0^1 \rho d \cdot a^3 - 6 \rho'} \quad \dots (33)$$

C'est le résultat trouvé par *Clairant* à la page 217 de son ouvrage, lorsqu'on y fait $\rho' = 1$ et $a = 1$: ses lettres d , α , D , A répondent, respectivement, à nos lettres αG , αh , $\int_0^1 \rho d (a^5 \alpha h)$, $\int_0^1 \rho d \cdot a^3$. Mais si on suppose nulle la partie variable de la profondeur de la mer, il faudra faire $\alpha Y^{(2)} = 0$; et alors notre formule (21) donne

$$10 \alpha h \int_0^1 \rho d \cdot a^3 - 6 \int_0^1 \rho d (a^5 \alpha h) = 5 \alpha \Phi \int_0^1 \rho d \cdot a^3 \dots (34)$$

ou bien

$$10 \alpha h \int_0^1 \rho a^2 da - 2 \int_0^1 \rho d (a^5 \alpha h) = 5 \alpha \Phi \int_0^1 \rho a^2 da.$$

C'est l'équation donnée par *Clairaut* à la page 226 du même ouvrage. Ainsi, il est démontré que cette équation est conforme à l'hypothèse d'une profondeur constante de la mer, admise par *Clairaut*; ce qui fait tomber la critique publiée par *D'Alembert* en 1773, (après la mort de *Clairaut*) dans les pages 227—230 du sixième volume de ses *Opuscles Mathématiques*. Ce jugement de *D'Alembert* prouve qu'il n'avait pas senti toute la justesse de la Théorie de *Clairaut*.

§ VII.

Je reprends la formule (9) pour la présenter délivrée du signe intégral. En vertu du partage de l'équation (12) en plusieurs autres équations, conformément à ce que nous avons déjà fait voir, il est clair que l'on a (en remplaçant M' par M dans les termes multipliés par α , et ayant égard à l'équation (13))

$$Q = \frac{M}{r} + M \left\{ \frac{\alpha\Phi}{3} r^2 - \frac{\alpha\Phi}{2} r^2 (\mu^2 - \frac{1}{3}) \right\} + \frac{M}{r^3} \left\{ \frac{\alpha\Phi}{2} (\mu^2 - \frac{1}{3}) + \alpha\bar{Y}^{(2)} + \alpha I'^{(2)} \right\} + \frac{M}{r^4} \left\{ \alpha\bar{Y}^{(3)} + \alpha I'^{(3)} \right\} + \frac{M}{r^5} \left\{ \alpha\bar{Y}^{(4)} + \alpha I'^{(4)} \right\} + \text{etc.} \quad \dots (35)$$

Le second terme de cette formule, c'est-à-dire, celui multiplié par r^2 subsiste à l'égard des points matériels extérieurs à la Terre, qui participent à son mouvement de rotation: mais il faudra supprimer α terme, si l'on veut appliquer la valeur de Q au calcul de l'action exercée par la Terre sur la Lune. Par cette suppression, la quantité Q devient égale à l'intégrale

$$V = \int \frac{dm}{f},$$

qui se rapporte uniquement aux forces attractives émanées des molécules matérielles dm de la Terre, et l'on a

$$V = \frac{M}{r} + \frac{M}{r^3} \left\{ \frac{\alpha\Phi}{2} (\mu^2 - \frac{1}{3}) + \alpha\bar{Y}^{(2)} + \alpha I'^{(2)} \right\} + \frac{M}{r^4} \left\{ \alpha\bar{Y}^{(3)} + \alpha I'^{(3)} \right\} + \frac{M}{r^5} \left\{ \alpha\bar{Y}^{(4)} + \alpha I'^{(4)} \right\} + \text{etc.} \quad \dots (36)$$

Avec cette valeur de V , on pourra former les trois composantes rectangulaires

$$-\left(\frac{dV}{dr}\right); \quad -\frac{V(1-\mu^2)}{r} \left(\frac{dV}{d\mu}\right); \quad -\frac{\left(\frac{dV}{d\omega}\right)}{rV(1-\mu^2)}$$

de la force exercée par la Terre entière, sur les points extérieurs qui participent à son mouvement de rotation. De sorte que par les deux formules (20) et (36), on a la loi de la pesanteur et la loi de la gravitation, due à l'action de la Terre. Comme la Terre tourne autour d'un de ses trois axes principaux, la forme la plus générale que peut avoir la fonction $\alpha\bar{Y}^{(2)} + \alpha I'^{(2)}$ est

$$\alpha\bar{Y}^{(2)} + \alpha I'^{(2)} = -\alpha G(\mu^2 - \frac{1}{3}) + \alpha G'(1 - \mu^2) \cos 2\omega \dots (37)$$

ainsi que cela est démontré au No. 32 du second volume de la *Mécanique Céleste*; αG et $\alpha G'$ étant deux coefficients constants. Quoique l'aplatissement de la Terre soit exprimé (généralement parlant) par la quantité variable

$$\alpha\bar{Y}^{(2)} + \alpha I'^{(2)} + \alpha\bar{Y}^{(3)} + \alpha I'^{(3)} + \text{etc.}$$

on désigne ordinairement par α mot, le coefficient constant αG qui affecte le terme $-\alpha G(\mu^2 - \frac{1}{3})$, qui seul, subsisterait si la Terre était un ellipsoïde de révolution. L'aplatissement αG ainsi défini, peut être déterminée par la Théorie de la Lune de la manière suivante.

§ VIII.

La latitude du centre de la Lune étant développée suivant des termes périodiques, où les argumens sont proportionnels à sa longitude vraie, contiennent l'inégalité

$$\frac{D^2}{m^2 a^2} \left(\alpha G - \frac{\alpha\Phi}{2} \right) \left\{ -\frac{2}{3} - \frac{m}{4} + \frac{13}{8} m^2 + \epsilon^2 - \frac{\gamma^2}{3} \right\} \sin 2\omega \cdot \sin f \nu,$$

née du second terme qui appartient à la valeur précédente de V . Je l'ai donnée à la page 498 du premier volume de ma *Théorie de la Lune*.

Sur cela il faut observer qu'ici, $\omega = 23^\circ 27' 50''$, et que je remplace $K_{(2)}$ par αG ; ψ par $\frac{\alpha\Phi}{2} = \frac{1}{2,289}$. La lettre a représente la distance moyenne du centre de gravité de la Lune au centre de gravité de la Terre, et ν la longitude vraie de la Lune. Soit ω' la constante de la parallaxe équatoriale de la Lune, lorsqu'elle est développée en fonction de la longitude vraie. *Bury* a trouvé par les observations de la Lune; $\omega' = 0^\circ 57' 12'' 06$. D'un autre côté, la Théorie de la Lune fournit l'équation

$$\sin \omega' = \frac{D}{a} (1 + \beta) (1 + p) (1 + \frac{1}{3} \alpha G),$$

où l'on a

$$1 + \beta = 1 + \epsilon^2 + \epsilon^4 - \frac{1}{2} \epsilon^2 \gamma^2 - \frac{9}{256} m^2 \gamma^2; \\ 1 + p = 1 + \frac{m^2}{6} + \frac{231}{256} m^4 + \frac{225}{64} m^2 \epsilon^2 + \frac{9}{256} m^2 \gamma^2 + \frac{1}{4} m^2 E^2;$$

conformément aux résultats donnés dans les pages 6, 8, 10 du 3ème volume de mon ouvrage. Toutefois il faut remarquer qu'à la page 6, il y a $\frac{4}{3}m^2e^2$ au lieu de $\frac{2}{3}m^2e^2$; mais le changement de $\frac{4}{3}$ en $\frac{2}{3}$ doit être fait dans la valeur de p , donnée à la page 855 du second volume. Le coefficient

$$\alpha G - \frac{\alpha \Phi}{2} = \frac{(1+\beta)^2 (1+p)^2 (1+\frac{1}{3}\alpha G)^2 \cdot \sin 8''}{\sin^2 \omega' \cdot \sin 2\omega \left(\frac{2}{3}m^2 + \frac{1}{4}m^2 + \frac{4}{3} - \frac{5^2}{m^2} + \frac{\gamma^2}{3m^2} \right)} \dots\dots\dots (38)$$

Cela posé; à l'aide des valeurs numériques que j'ai données aux pages 483—486 du 1^{er} volume de ma Théorie de la Lune, je trouve

$$1+\beta = 1,003003514; \quad 1+p = 1,00101724;$$

$$\frac{2}{3}m^2 + \frac{1}{4}m^2 + \frac{4}{3} - \frac{5^2}{m^2} + \frac{\gamma^2}{3m^2} = 125,312740;$$

$$\alpha G - \frac{\alpha \Phi}{2} = \frac{(1+\beta)^2 (1+p)^2 (1+\frac{1}{3}\alpha G)^2 \cdot \sin 8''}{0,02534140}$$

$$\alpha G - \frac{\alpha \Phi}{2} = 0,0015305025 (1+\beta)^2 (1+p)^2 (1+\frac{1}{3}\alpha G)^2.$$

Mais $(1+\beta)(1+p) = 1,004023809$;

$$(1+\beta)^2 (1+p)^2 = 1,00804762;$$

partant

$$\alpha G - \frac{\alpha \Phi}{2} = 0,001542819 (1+\frac{1}{3}\alpha G)^2.$$

Donc, en négligeant le carré de αG , nous aurons

$$\alpha G = \frac{0,0017301 + 0,001542819}{1 - \frac{2}{3} \cdot 0,001542819};$$

d'où l'on tire

$$\alpha G = 0,003276285 = \frac{1}{305,224} \dots\dots\dots (39)$$

En supposant que le nombre $8''$ doit être remplacé par $8'' + x$, en vertu d'une erreur x , due aux observations, l'équation (38) donnera

$$\alpha G = 0,003276285 + x \cdot 0,000191315 \dots\dots (40)$$

où x désigne une fraction de la seconde d'arc; fraction sans doute fort petite: probablement inférieure à un dixième, si l'on veut bien réfléchir que cette inégalité Lunaire en latitude, a été déterminée par le concours de 4000 observations.

IX.

En considérant la surface même du niveau de l'Océan, il est important de rapprocher des formules précédentes, celles que je vais rapporter: Si, par un point quelconque de la

$$D = \frac{\pi}{180} \cdot \gamma = \frac{\pi}{180} \left\{ 1 + d \left(\frac{\alpha q \cdot \mu}{d\mu} \right) + \frac{d}{d\mu} \left[(1-\mu^2) \frac{d \cdot \alpha q}{d\mu} \right] \right\} \dots\dots\dots (42)$$

En ayant égard à l'équation (37), et aux équations $\bar{Y}^{(1)} = 0$, $Y'^{(1)} = 0$, démontrées dans le § III, l'expression du rayon vecteur R' est

$$R' = 1 + \alpha \bar{Y}^{(0)} + \alpha Y'^{(0)} - \left\{ \alpha G (\mu^2 - \frac{1}{3}) - \alpha G' (1-\mu^2) \cos 2\omega \right\} + \left\{ \alpha \bar{Y}^{(3)} + \alpha Y'^{(3)} \right\} + \left\{ \alpha \bar{Y}^{(4)} + \alpha Y'^{(4)} \right\} + \text{etc.}$$

de $\sin.fv$ est égal à $-8''00$ d'après la détermination de *Bury* et de *Burkhardt* fondée sur quatre mille observations. Donc, en égalant le coefficient de $\sin.fv$ à $-\sin 8''$ l'on aura cette équation

$$R' = 1 + \alpha \bar{Y} + \alpha Y'.$$

Cette courbe plane n'est pas celle qui constitue le véritable méridien terrestre (Lisez la page 109 du second volume de la *Méc. Cél.*); mais elle en diffère très-peu; et le degré mesuré sur son cercle osculateur, est celui dont *Laplace* a donné la formule à la page 96 du même volume. En effet, l'expression générale du rayon de courbure des courbes planes, (entre les coordonnées polaires R' et θ) est

$$\gamma = \frac{R' \left\{ 1 + \left(\frac{dR'}{R'd\theta} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{1 + 2 \left(\frac{dR'}{R'd\theta} \right)^2 - \frac{d^2 R'}{R'd\theta^2}}.$$

Or, en négligeant les quantités multipliées par le carré de α , il faut faire $\left(\frac{dR'}{R'd\theta} \right)^2 = 0$; ce qui donne

$$\gamma = R' + \frac{d^2 R'}{d\theta^2}.$$

Mais, ayant fait $\cos \theta = \mu$, il est clair qu'en posant $\alpha \bar{Y} + \alpha Y' = \alpha q$; c'est-à-dire, $R' = 1 + \alpha q$, l'on aura

$$\gamma = 1 + \alpha q - \mu \frac{d \cdot \alpha q}{d\mu} + (1-\mu^2) \frac{d^2 \cdot \alpha q}{d\mu^2},$$

ou bien

$$\gamma = 1 + d \left(\frac{\alpha q \cdot \mu}{d\mu} \right) + \frac{d}{d\mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{d \cdot \alpha q}{d\mu} \right\} \dots\dots (41)$$

Donc, en nommant D la longueur d'un degré sur la périphérie d'un cercle dont le rayon est γ , nous avons

Quelles que soient les valeurs des fonctions des deux angles θ , ω , représentées par les binômes

$$(\alpha \bar{Y}^{(3)} + \alpha Y'^{(3)}); (\alpha \bar{Y}^{(4)} + \alpha Y'^{(4)}) \text{ etc.};$$

l'ensemble des observations sur la longueur du pendule, démontre que ces quantités sont beaucoup plus petites que l'aplatissement αG . Donc, en faisant $\mu = 1$, on peut réduire la valeur de R' à

$$R' = 1 + \alpha \bar{Y}^{(0)} + \alpha Y'^{(0)} - \frac{2}{3} \alpha G.$$

$$R' = 1 + \alpha G - \frac{2}{3} \alpha G \mu^2 - \alpha G' (1 - \mu^2) \cos 2\omega \} + (\alpha \bar{Y}^{(3)} + \alpha Y'^{(3)}) + (\alpha \bar{Y}^{(4)} + \alpha Y'^{(4)}) + \text{etc.} \dots \dots \dots (44)$$

Maintenant, si l'on observe que par la nature des fonctions $\alpha \bar{Y}^{(n)}$, $\alpha Y'^{(n)}$ l'on a

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} \left(\frac{\alpha \bar{Y}^{(n)} + \alpha Y'^{(n)}}{1 - \mu^2} \right) \right\} = -n(n+1) (\alpha \bar{Y}^{(n)} + \alpha Y'^{(n)}) - \frac{d^2}{d\omega^2} \left(\frac{\alpha \bar{Y}^{(n)} + \alpha Y'^{(n)}}{1 - \mu^2} \right)$$

la formule (42) nous donnera pour l'expression analytique de la longueur du degré D ;

$$\left. \begin{aligned} D = & \frac{\pi}{180} (1 - \alpha G) + \frac{\pi}{180} \{ 3 \alpha G \cdot \mu^2 - \alpha G' (5 \mu^2 - 3) \cos 2\omega \} \\ & - \frac{\pi}{180} \left\{ 11 (\alpha \bar{Y}^{(3)} + \alpha Y'^{(3)}) + 19 (\alpha \bar{Y}^{(4)} + \alpha Y'^{(4)}) \right. \\ & \left. + \dots + (n^2 + n - 1) (\alpha \bar{Y}^{(n)} + \alpha Y'^{(n)}) + \text{etc.} \right\} \\ & + \frac{\pi}{180} \mu \frac{d}{d\mu} \{ (\alpha \bar{Y}^{(3)} + \alpha Y'^{(3)}) + (\alpha \bar{Y}^{(4)} + \alpha Y'^{(4)}) + \text{etc.} \} \\ & - \frac{\pi}{180} \cdot \frac{d^2}{d\omega^2} \left\{ \frac{\alpha \bar{Y}^{(3)} + \alpha Y'^{(3)}}{1 - \mu^2} + \frac{\alpha \bar{Y}^{(4)} + \alpha Y'^{(4)}}{1 - \mu^2} + \text{etc.} \right\}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (45)$$

En supposant la fonction $\alpha \bar{Y}^{(n)} + \alpha Y'^{(n)}$ indépendante de la longueur ω , on sait qu'en posant $\cos \theta = \mu$ l'on a

$$\left. \begin{aligned} \alpha \bar{Y}^{(3)} + \alpha Y'^{(3)} &= \alpha K' (\mu^3 - \frac{3}{5} \mu) \\ \alpha \bar{Y}^{(4)} + \alpha Y'^{(4)} &= \alpha K'' (\mu^4 - \frac{6}{7} \mu^2 + \frac{3}{35}) \\ \alpha \bar{Y}^{(5)} + \alpha Y'^{(5)} &= \alpha K''' (\mu^5 - \frac{10}{9} \mu^3 + \frac{5}{21} \mu) \\ \alpha \bar{Y}^{(6)} + \alpha Y'^{(6)} &= \alpha K^{(iv)} (\mu^6 - \frac{15}{11} \mu^4 + \frac{5}{11} \mu^2 - \frac{5}{231}) \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right\} \dots \dots (46)$$

αK , $\alpha K'$ etc., étant des coefficients constants.

En substituant ces valeurs dans le second membre de l'équation (20), et ayant égard aux équations (37) et (43), l'on aura

$$\left. \begin{aligned} p = & M \{ 1 - \frac{2}{3} \alpha \Phi - \frac{2}{3} \alpha G \} \\ & + M \{ (\frac{2}{3} \alpha \Phi - \alpha G) (\mu^2 - \frac{1}{3}) + \alpha G' (1 - \mu^2) \cos 2\omega \} \\ & + 2 M \alpha K (\mu^3 - \frac{3}{5} \mu) \\ & + 3 M \alpha K' (\mu^4 - \frac{6}{7} \mu^2 + \frac{3}{35}) \\ & + 4 M \alpha K'' (\mu^5 - \frac{10}{9} \mu^3 + \frac{5}{21} \mu) \\ & + 5 M \alpha K''' (\mu^6 - \frac{15}{11} \mu^4 + \frac{5}{11} \mu^2 - \frac{5}{231}) \\ & + \text{etc.} \end{aligned} \right\} \dots (47)$$

Ainsi, en prenant pour unité de longueur, la ligne droite qui joint le centre de gravité de la Terre avec son pôle boréal, il faudra établir l'équation

$$\alpha \bar{Y}^{(0)} + \alpha Y'^{(0)} = \frac{2}{3} \alpha G \dots \dots \dots (43)$$

ce qui réduit la valeur précédente de R' à celle-ci;

En supposant nuls les coefficients suivans αK^{IV} , αK^V etc. on obtient, en ordonnant suivant les puissances de μ jusqu'à μ^4 inclusivement;

$$\left. \begin{aligned} p = & M \{ 1 - \frac{2}{3} \alpha \Phi - \alpha G + \frac{9}{35} \alpha K' - \frac{2}{231} \alpha K''' \} \\ & + M \{ (\frac{2}{3} \alpha \Phi - \alpha G - \frac{1}{7} \alpha K' + \frac{2}{11} \alpha K''') \mu^2 \} \\ & + M \alpha G' (1 - \mu^2) \cos 2\omega \\ & + M \{ -\mu (\frac{5}{9} \alpha K - \frac{2}{21} \alpha K'') + \mu^3 (2 \alpha K - \frac{4}{9} \alpha K'') \} \\ & + M (3 \alpha K' - \frac{5}{11} \alpha K''') \mu^4. \end{aligned} \right\} \dots (48)$$

En faisant les mêmes substitutions dans la formule (45), et ordonnant suivant les puissances de μ l'on aura;

$$\left. \begin{aligned} D = & \frac{\pi}{180} \{ 1 - \alpha G - \frac{5}{35} \alpha K' - \frac{2}{231} \alpha K''' \} \\ & - \frac{\pi}{180} \alpha G' (5 \mu^2 - 3) \cos 2\omega \\ & + \frac{\pi}{180} (3 \alpha K + \frac{5}{7} \alpha K'') \mu \\ & + \frac{\pi}{180} (3 \alpha G + \frac{10}{9} \alpha K' + \frac{2}{11} \alpha K''') \mu^2 \\ & - \frac{\pi}{180} (8 \alpha K + \frac{3}{9} \alpha K'') \mu^3 \\ & + \frac{\pi}{180} (4 \alpha K' - \frac{6}{11} \alpha K''') \mu^4. \end{aligned} \right\} \dots (49)$$

En désignant par τ la longueur du pendule qui bat la seconde de temps moyen, on sait que

$$\tau = \frac{P}{\pi^2} \dots \dots \dots (50)$$

C'est en comparant cette formule avec les longueurs τ , observées sur différens points de la surface de la mer, que l'on pourra déterminer les valeurs numériques des coefficients qui entrent dans le second membre de l'équation (48).

§ X.

Le principal coefficient qui entre dans cette équation est celui désigné par M : conformément à l'équation (13) il représente la masse totale de la Terre; c'est-à-dire, son pouvoir attractif à l'unité de distance; sa valeur peut être déterminée à l'aide du moyen mouvement de la Lune. Soit nt ce moyen mouvement, et T le temps de la révolution sydérale de la Lune en secondes de temps moyen. On sait par les observations, que

$$T = 2360592'' = 42.32.13.1261''.$$

En désignant par i le rapport de la masse de la Lune à celle de la Terre, et λ la distance de leurs centres de gravité, exprimée en rayons polaires de la Terre, on a l'équation

$$n^2 = \frac{M(1+i)}{\lambda^3} = \frac{4\pi^2}{T^2},$$

qui donne

$$\frac{M}{\pi^2} = \frac{4\lambda^3}{(1+i)T^2} = \frac{\lambda^3}{(1+i)43^3.34^3.13^2.(1261)^2}.$$

Mais les observations ont appris que $i = \frac{1}{81}$, et $\lambda = 60,5262$; partant l'on a

$$\frac{M}{\pi^2} = \frac{81}{82} \cdot \frac{5^3 \left(1 + \frac{0,5262}{60}\right)^3}{3.13^2.(1261)^2}$$

En désignant par β le nombre de mètres contenus depuis le centre de gravité de la Terre jusqu'à son pôle boréal, on sait que

$$\{\beta = 6356810,0; \text{Log. } \beta = 6,8032391\} \dots \dots (51)$$

Donc, en multipliant par β l'équation précédente, nous aurons, en mètres, la valeur de $\frac{M}{\pi^2}$; savoir

$$\frac{M}{\pi^2} = 0,9994404; \text{Log. } \frac{M}{\pi^2} = 9,9997584.$$

Les équations $\alpha\phi = 0,0034602$; $\alpha G = 0,0032763$ donnent;

$$\frac{3}{2}\alpha\phi + \alpha G = 0,0084666; \frac{5}{2}\alpha\phi - \alpha G = 0,005374215;$$

d'où l'on tire

$$\frac{M}{\pi^2} (1 - \frac{3}{2}\alpha\phi - \alpha G) = 0,9994404 - 0,0084619 = 0,9909785.$$

Ainsi, en faisant $L = \frac{M}{\pi^2} (1 - \frac{3}{2}\alpha\phi - \alpha G)$, l'on a

$$\{L = 0,9909785; \text{Log. } L = 9,9960642\} \dots \dots (52)$$

Il suit de là, qu'en nommant ψ la latitude d'un point quelconque de la surface de la mer, et α la longitude, on aura, d'après les formules (48) et (50);

$$\tau = \left. \begin{aligned} &L \left\{ 1 + \frac{9}{35}\alpha K' - \frac{25}{231}\alpha K'' \right\} + L\alpha G' \cdot \cos 2\omega \cdot \cos^2\psi \\ &+ L \left\{ \frac{5}{2}\alpha\phi - \alpha G - \frac{1}{7}\alpha K' + \frac{25}{11}\alpha K'' \right\} \sin^2\psi \\ &- L \left(\frac{6}{5}\alpha K - \frac{2}{3}\alpha K'' \right) \sin\psi \\ &+ L (2\alpha K - \frac{4}{3}\alpha K'') \sin^3\psi \\ &+ L (3\alpha K' - \frac{7}{11}\alpha K'') \sin^4\psi. \end{aligned} \right\} (53)$$

Le facteur commun L , que nous avons introduit (pour plus de symétrie) dans cette formule, tient à la circonstance que, en négligeant les termes de l'ordre du carré de α , il est permis de remplacer $\frac{M}{\pi^2}$ par L dans les termes qui suivent le premier.

Les coefficients que cette formule renferme, doivent être déterminés de manière à pouvoir satisfaire à l'ensemble des longueurs observées du pendule. En examinant ces observations, j'ai trouvé qu'il convient de faire

$$\left. \begin{aligned} 3\alpha K' - \frac{7}{11}\alpha K'' &= 0 \\ \frac{1}{7}\alpha K' - \frac{25}{11}\alpha K'' &= 0,000200966 \\ 2\alpha K - \frac{4}{3}\alpha K'' &= 0,0002536 \\ \frac{6}{5}\alpha K - \frac{2}{3}\alpha K'' &= 0,000155405. \end{aligned} \right\} \dots \dots (54)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \alpha K' &= 0,00012786; \alpha K'' = 0,000056258; \\ \alpha K &= 0,0001310; \alpha K'' = 0,0000018935; \\ \frac{9}{35}\alpha K' - \frac{25}{231}\alpha K'' &= 0,000026791. \end{aligned}$$

Ainsi, en faisant

$$\begin{aligned} A &= 1,000026791; A' = 0,000155405, \\ A'' &= 0,005173249; A''' = 0,0002536, \end{aligned}$$

on aura, au lieu de l'équation (53),

$$\tau = \left. \begin{aligned} &L \{ A + A'G' \cos 2\omega \cdot \cos^2\psi + A'' \sin^2\psi \} \\ &+ L \{ A''' \sin^3\psi - A' \sin\psi \} \end{aligned} \right\} \dots (55)$$

où les logarithmes des coefficients sont,

$$\begin{aligned} \text{Log. } LA' &= 6,1875292; \\ \text{Log. } LA'' &= 7,7098277; \\ \text{Log. } LA''' &= 6,4002134; \end{aligned}$$

et conformément à l'équation (52);

$$LA = 0,991005048.$$

Cela posé; pour déterminer le coefficient LAG' , je vais appliquer cette formule à deux points pour lesquels la latitude soit à-peu-près la même, une boréale et l'autre australe.

A Londres l'on a $\psi' = 51^{\circ}31'8''$; $2\omega' = 4^{\circ}52'$, et la longueur τ' du pendule observée par *Kater*, est $\tau' = 0,994123421$.

Aux îles Malouines, sur un point pour lequel l'on a $\psi'' = -(51^{\circ}33'31'')$; $2\omega'' = 124^{\circ}20'$ les observations des Capitaines *Freyciult* et *Duperrey*, ont donné $\tau'' = 0,994084925$. De sorte que la différence $\tau' - \tau''$ observée, est telle que l'on a $\tau' - \tau'' = 0,000038501$. D'après la formule (55), nous avons

$$\tau' = 0,994146603 + L\alpha G' \cdot 0,385807;$$

$$\tau'' = 0,994149919 - L\alpha G'' \cdot 0,218004;$$

d'où l'on tire l'équation

$$0,000038501 = -0,000003316 + L\alpha G' \cdot 0,603811;$$

et par conséquent

$$\{L\alpha G' = 0,0000692551; \text{Log. } L\alpha G' = 5,8404519\} \dots (56)$$

Pour confirmer l'exactitude des formules (55) et (56), je vais les appliquer à deux points pour lesquels la latitude soit à-peu-près la même, et horéale.

Pour Barcelone l'on a; $\psi' = 41^{\circ}23'15''$; $2\omega' = 0^{\circ}18'22''$,

$$\tau' (\text{observée}) = 0,993232131.$$

Pour New-York, l'on a $\psi'' = 40^{\circ}42'43''$; $2\omega'' = 152^{\circ}42'42''$,

$$\tau'' (\text{observée}) = 0,993158649;$$

partant

$$\tau' - \tau'' (\text{observée}) = 0,000073482;$$

$$\cos 2\omega' \cdot \cos^2 \psi' - \cos 2\omega'' \cdot \cos^2 \psi'' = 1,0734970;$$

$$L\alpha G' (\cos 2\omega' \cdot \cos^2 \psi' - \cos 2\omega'' \cdot \cos^2 \psi'') = 0,0000743452.$$

La formule (55) donne

$$\tau' = 0,993216877 + L\alpha G' \cos 2\omega' \cos^2 \psi' = 0,993255859,$$

$$\tau'' = 0,993155737 + L\alpha G'' \cos 2\omega'' \cos^2 \psi'' = 0,993120014.$$

Donc, la différence calculée est $\tau' - \tau'' = 0,000135845$; elle surpasse le résultat de l'observation de la quantité $0,0000623633$. Et cette quantité pouvant être attribuée en partie, aux erreurs inhérentes aux observations, n'est pas assez grande pour infirmer la théorie qui nous a fourni la formule (55).

Pour rendre sensible l'influence des différens termes qui entrent dans cette formule, il faut observer qu'en désignant par $n = 86164''09$ le nombre de secondes de temps moyen battues par un pendule à l'équateur, dans un jour sydéral; et par $n + \delta n$ le nombre de secondes qui seraient battues par

le même pendule, à la latitude ψ et longitude ω , l'on a, en négligeant les quantités de l'ordre du carré de α ;

$$\delta n = \frac{86164''09}{2A} \{ (A'' - \alpha G' \cos 2\omega) \sin^2 \psi \}$$

c'est-à-dire,

$$\delta n = (222''87 - 3''01 \cdot \cos 2\omega) \sin^2 \psi \dots \dots \dots (57)$$

En faisant $\psi = 51^{\circ}31'8''$ et $2\omega = 90^{\circ}$, cette formule donne $\delta n = 136''5$. La grandeur de cette différence entre Londres et l'équateur, devait mettre ce phénomène en évidence, même par des observations faites sans le dernier degré de précision.

En prenant pour unité le centième du millimètre, et nommant $\delta \tau$, la variation de la longueur τ du pendule qui battait la seconde, l'on aura $\delta \tau = 0''4347 \delta \tau$ pour la variation correspondante dans un jour sydéral.

§ XI.

En multipliant par β (voyez l'équation (51)). Le second membre de l'équation (49), on aura la valeur du degré D en mètres. Pour achever la réduction numérique de cette formule, il faut employer ces nombres déduits de ceux du § précédent; savoir

$$\text{Log. } \frac{\pi}{180} \beta = 5,0451165;$$

$$\text{Log. } \alpha G = 7,5153816; \text{Log. } \alpha K = 6,1172713;$$

$$\text{Log. } \alpha K'' = 4,2772653;$$

$$\text{Log. } \alpha G' = 5,8443878; \text{Log. } \alpha K' = 6,1067347;$$

$$\text{Log. } \alpha K''' = 5,7501843.$$

Avec ces données on trouve

$$D = 110947,10 - 363,49 - 23,14 - 5,55$$

$$- 7,765 (5 \sin^2 \psi - 3) \cos 2\omega + (104,80 + 1,50) \sin \psi$$

$$+ (1090,49 + 206,71 + 122,17) \sin^2 \psi$$

$$- (116,44 + 7,48) \sin^3 \psi + (56,83 - 383,58) \sin^4 \psi;$$

c'est-à-dire,

$$D = 11055,98 - 7,765 (5 \sin^2 \psi - 3) \cos 2\omega \left\{ \dots (58) \right.$$

$$+ 106,30 \cdot \sin \psi + 1419,37 \cdot \sin^2 \psi$$

$$- 123,92 \cdot \sin^3 \psi - 326,75 \cdot \sin^4 \psi$$

La Table des valeurs de D , donnée par *Newton*, dans la proposition XX. du 3ème livre des principes, a été calculée d'après la formule

$$D = \frac{\pi}{180} \beta \{ 1 + 3 \alpha G \sin^2 \psi \};$$

où il faisait $\frac{\pi}{180} \beta = 56637$ toises; et

$$\alpha G = \frac{57382 - 56637}{3,56637} = \frac{1}{228,17}.$$

Et la Table des longueurs τ du pendule mise à côté, a été calculée d'après la formule

$$\tau = L \{1 + \alpha G \cdot \sin^2 \psi\};$$

où *Newton* faisant $L = 439,468$ lignes; et

$$\alpha G = \frac{441,387 - 439,468}{439,468} = \frac{1}{229,01}.$$

Il ne voyait pas que le coefficient de $\sin^2 \psi$ dans la valeur de τ , devait être $L (\frac{5}{2} \alpha \Phi - \alpha G)$, et que l'aplatissement αG , devait être plus petit que $\frac{5}{2} \alpha \Phi$.

$$\alpha G \{10 \int_0^1 \rho d.a^3 - 6 \rho'\} = 5 \alpha \Phi \int_0^1 \rho d.a^3 - 6 \{ \rho' \alpha \bar{h} - \int_0^1 \rho d.(a^5 \cdot \alpha h) \} \dots \dots \dots (59)$$

Maintenant, si l'on fait

$$\int a^5 \frac{d\rho}{da} da = -\rho'' Q,$$

on aura, en intégrant par partie

$$\int_0^1 \rho d.(a^5 \cdot \alpha h) = \rho'' \alpha \bar{h} (1 + Q') - \rho'' \int_0^1 Q \frac{d \cdot \alpha h}{da} da;$$

$$\alpha \bar{h} = \frac{\alpha G \{10 \int_0^1 \rho d.a^3 - 6 \rho'\} - 5 \alpha \Phi \int_0^1 \rho d.a^3 + 6 \rho'' \int_0^1 Q d \cdot \alpha h}{6 (\rho'' - \rho' + \rho'' Q')} \dots \dots \dots (60)$$

Maintenant, si l'on prend

$$\rho'' = 1,83; \quad e = 7,8907; \quad \rho = \rho'' (1 + e - ea)$$

pour la loi des densités des couches terrestres, conformément à une note que j'ai publiée dans le No. 828 des *Astronomische Nachrichten*, l'on aura

$$Q = \frac{e a^6}{6}; \quad Q' = \frac{e}{6}; \quad \int_0^1 \rho d.a^3 = \rho'' \left(1 + \frac{e}{4}\right);$$

et par conséquent

$$\alpha \bar{h} = \frac{\frac{5}{4} (4 + e) (2 \alpha G - \alpha \Phi) - \frac{6 \rho'}{\rho''} \alpha G + e \int_0^1 a^6 d \cdot \alpha h}{6 + e - 6 \frac{\rho'}{\rho''}}$$

Mais la valeur précédente du coefficient e , et celle du rapport

$$\frac{\rho'}{\rho''} = \frac{1}{1,83} \text{ donnent}$$

§ XII.

La profondeur de la mer étant exprimée par

$$\alpha I^{(0)} + \alpha I^{(2)} + \alpha I^{(3)} + \text{etc.}$$

il serait intéressant d'avoir au moins quelques notions sur la grandeur absolue du second terme $\alpha I^{(2)}$ de cette série. Pour cela, il faut recourir à l'équation (23) en y faisant $\alpha Z^{(2)} = 0$,

$$\alpha I^{(2)} = -\alpha h (\mu^2 - \frac{1}{3}); \quad \alpha \bar{I}^{(2)} = -\alpha \bar{h} (\mu^2 - \frac{1}{3});$$

$$\alpha I^{(2)} = -\alpha h' (\mu^2 - \frac{1}{3}).$$

Alors, en posant $\alpha \bar{h} + \alpha h' = \alpha G$, cette équation donne

où ρ'' désigne la densité de la couche superficielle de la Terre; c'est-à-dire, la valeur que prend ρ lorsque $a = 1$; et Q' la valeur que prend Q (censée fonction de a) lorsque $a = 1$. Nous supposons $Q = 0$, lorsque $a = 0$; ce qui nous paraît évident, la densité ρ étant croissante depuis la surface jusqu'au centre de la Terre. En substituant cette valeur, et tirant ensuite la valeur de $\alpha \bar{h}$, l'on aura

$$\frac{5}{4} \left(\frac{4+e}{6+e} \right) = 1,0069923; \quad \frac{e}{6+e} = 0,56805;$$

$$\frac{6 \rho'}{\rho''} \cdot \frac{1}{6+e} = 0,236035.$$

En prenant pour αG la valeur déterminée par l'équation (39), nous aurons $2 \alpha G - \alpha \Phi = 0,00309237$; et par conséquent

$$0,00330891 - 0,00077338 + 0,56805 \int_0^1 a^6 d \cdot \alpha h$$

$$\alpha \bar{h} = \frac{\quad}{1 - 0,236035}$$

Dans l'état de fluidité totale de la Terre, l'on avait

$$\int_0^1 a^6 d \cdot \alpha h = \frac{0,119719 \cdot 0,0031213}{1,4759541}$$

ainsi que je l'ai fait voir dans un *Mémoire* publié dans les No. 860, 861 des *Astronomische Nachrichten*.

Donc, en supposant que la loi des densités et celle des ellipticités n'aient pas changé dans l'acte de la solidification des couches terrestres, l'on aura

$$0,56805 \int_0^1 a^6 d.\alpha h = 0,00014383;$$

d'où l'on tire

$$\alpha \bar{h} = \frac{0,00267935 + 0,00014383}{0,763969} = 0,00350714;$$

ou bien

$$\alpha \bar{h} = \text{aplatissement du sphéroïde terrestre} = \frac{1}{285,132} \quad (61)$$

Cela posé, l'équation $\alpha h' = \alpha G - \alpha \bar{h}$ donne

$$\alpha h' = -0,00023086 = \frac{-\alpha \Phi}{14,9883} \dots \dots \dots (62)$$

Les deux premiers termes de la profondeur $\alpha y'$ de la mer sont donc

$$\alpha y' = \alpha F^{(0)} + \frac{\alpha \Phi}{14,9883} (\mu^2 - \frac{1}{3}) \dots \dots \dots (63)$$

Cette valeur justifiée par le signe et la quotité du terme multiplié par μ^2 , conséquence que *Laplace* tirait de sa Théorie du flux et reflux de la mer, à la page 193 du second volume de la *Méc. Cél.* Car ayant

$$2(1 - \frac{3}{25}) - \frac{\alpha \Phi}{\alpha h'} = 16,7483,$$

l'on a

$$+ \frac{6L}{gr^3 \cdot 16,7483} \sin \theta \cos \theta \cdot \sin \nu \cos \nu \cdot \cos (nt + \omega - \psi)$$

pour expression de la marée diurne, au lieu de celle dont j'ai parlé au § V.

Soit λ la distance moyenne du Soleil à la Terre. Si la lettre L représente la masse du Soleil, nous avons par la théorie des forces centrales;

$$\frac{L}{r^3} = \frac{L}{\lambda^3} \left(\frac{\lambda}{r} \right)^3 = \frac{4\pi^2}{T^2} \left(\frac{\lambda}{r} \right)^3$$

où T désigne le temps de la révolution sydérale de la Terre autour du Soleil. En jours moyens, l'on a $T = 365,256361$; et en jours sydéraux

$$T = 365,25636 (1,0027379) = 366,26.$$

Soit nT' le moyen mouvement de rotation de la Terre à l'unité de distance; nous avons $nT' = 2\pi$; partant

$$\frac{L}{gr^3} = \frac{n^2}{g} \left(\frac{T'}{T} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{r} \right)^3$$

mais ici $\frac{n^2}{g} = \alpha \Phi = \frac{1}{285,132}$; donc, nous écrirons

$$\frac{L}{gr^3} = \frac{\alpha \Phi}{(366,26)^2} \left(\frac{\lambda}{r} \right)^3 \dots \dots \dots (64)$$

Pour avoir la valeur de cette quantité en mètres, il faut la multiplier par β , en prenant pour β le nombre donné par notre équation (51). Alors en prenant $r = \lambda$ on obtient

$$\frac{6L}{gr^3} = 0,98528; \quad \frac{6L}{gr^3 \cdot 16,7483} = 0,0588286$$

Et pour la Lune L' , à sa moyenne distance r' de la Terre, l'on aura

$$\frac{6L'}{gr'^3 \cdot 16,7483} = 2,35333 \cdot 0,0588286 = 0,138443 \quad *)$$

Il est clair que la somme $0,19727$ de ces deux actions, et même son double, $0,39454$ multiplié par $\frac{\sin 2\theta \cdot \sin 2\nu}{4}$, demeure

une quantité assez petite pour pouvoir considérer comme à-peu-près insensible, la différence algébrique entre les deux marées d'un même jour, qui auraient lieu au moment du passage supérieur et inférieur des mêmes astres, par le méridien.

D'après la formule

$$\frac{6L}{gr^3} \cdot \frac{\sin 2\theta \cdot \sin 2\nu}{4} \cos (nt + \omega - \psi),$$

qui est de *Newton*, la marée diurne serait 21 fois plus grande.

Le marée diurne est modifiée par les circonstances accessoires dont nous faisons ici abstraction; mais elle demeure toujours fort petite comparativement aux marées semi-diurnes, en nous bornant aux ports de la France.

Pour *Brest*, l'on a $\theta = 41^\circ 36' 46''$; et en faisant $\nu = 23^\circ 27'$ l'on a,

$$\frac{\sin 2\theta \cdot \sin 2\nu}{4} 0,39454 = 0,07151;$$

c'est-à-dire, environ la troisième partie du résultat $0,2131$ donné par les observations. (Lisez la page 227 du 5ème vol.

de la *Méc. Cél.* et remarquez qu'il faut lire $\frac{6L}{r^3 g} = 0,98528$

dans la page 226 au lieu de $\frac{3L}{r^3 g} = 0,98528$). Ainsi, les circonstances accessoires contribuent à augmenter les marées diurnes aussi bien que les marées semi-diurnes, quoique l'augmentation ait lieu pour les premières dans un rapport un

*) Au lieu du rapport 2,35333, trouvé par *Laplace* sur les observations des marées, je pense qu'il serait plus exact d'employer le nombre 2,174867 donné par ma formule (39) démontrée dans le 3ème vol. de ma *Théorie de la Lune* (page 30); où je fais $\delta P = 0''0163$; $\delta N = 0''2231$ conformément aux résultats exposés par *Mr. Struve* dans le No. 486 des *Astron. Nachrichten*. Mais pour le calcul actuel, il est inutile d'avoir égard à cette modification.

peu moindre. En effet, le terme constant $\alpha Y^{(0)}$ de la profondeur de la mer, étant supposé égal à $\frac{4}{10} \alpha \Phi$; ce qui donne $\alpha Y^{(0)} = 0,00138408$, il résulte de la formule posée à la fin de la page 200 du second vol. de la Méc. Cél., qu'à Brest, où $x = \sin 41^{\circ} 36' 46''$ l'on aura (en faisant $\nu = \nu' = 23^{\circ} 27'$)

$$2,0,12316,4,999417 \cdot 3,35333 (\sin \theta \cdot \cos \nu)^2 = 1,53277$$

pour la différence de la haute à la basse mer, dans les syzygies solsticiales. D'après l'observation, l'on a

$$5,60 = 3,6035 \cdot 1,53277;$$

c'est-à-dire, 3 fois et $\frac{2}{3}$ la différence calculée, sans avoir égard aux circonstances locales, circonstances qui, dans chaque port, modifient les coefficients constants, et la loi de ces phénomènes.

$$\frac{3}{2} M r^2 \frac{\alpha \Phi}{(366,26)^2} \left\{ \left(\frac{\lambda}{f} \right)^3 (\sin^2 H - \frac{1}{3}) + 2,3533 \left(\frac{\lambda'}{f'} \right)^3 (\sin^2 H' - \frac{1}{3}) \right\};$$

où, conformément aux dénominations précédentes et à celles du § V, l'on a

$$\sin H = \cos \theta \sin \nu + \sin \theta \cos \nu \cdot \cos (nt + \varepsilon + \omega - \psi);$$

$$\sin H' = \cos \theta \sin \nu' + \sin \theta \cos \nu' \cdot \cos (nt + \varepsilon + \omega - \psi').$$

Or, il est clair que l'excessive petitesse du facteur $3 \alpha \Phi : (366,26)^2 = 1 : 12922433$, rend insensible l'influence de ce terme dans l'expression $\left(\frac{dQ}{dr} \right)$ de la pesanteur.

En désignant par

$$\alpha \{ Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \text{etc.} \}$$

l'épaisseur de la couche liquide soulevée par l'attraction du Soleil et de la Lune; son action sur une molécule placée à la distance r du centre de gravité de la Terre, sera exprimée par la série

$$\frac{3 \rho'}{\rho'''} M x \left\{ \frac{Y^{(2)}}{5 r^3} + \frac{Y^{(3)}}{7 r^4} + \frac{Y^{(4)}}{9 r^5} + \text{etc.} \right\};$$

où $\frac{\rho'}{\rho'''}$ désigne le rapport de la densité de la mer à la densité moyenne de la Terre. Nous pouvons supposer cette fonction concentrée dans celle qui est représentée par U' au second §.

$$\alpha Y^{(2)} = \frac{3}{2 \left(1 - \frac{3}{5} \frac{\rho'}{\rho'''} \right)} \cdot \frac{\alpha \Phi \cdot \beta}{(366,26)^2} \left\{ \left(\frac{\lambda}{f} \right)^3 (\sin^2 H - \frac{1}{3}) + 2,35 \left(\frac{\lambda'}{f'} \right)^3 (\sin^2 H' - \frac{1}{3}) \right\}$$

Maintenant si l'on fait $\frac{\rho'}{\rho'''} = \frac{1}{5}$, on trouvera

$$\frac{75}{43} \cdot \frac{\alpha \Phi \cdot \beta}{(366,26)^2} = 0,27993.$$

Mais en faisant (comme Newton) $\frac{\rho'}{\rho'''} = 1$, l'on aura

$$\frac{13}{4} \cdot \frac{\alpha \Phi \cdot \beta}{(366,26)^2} = 0,61580;$$

S'il fallait démontrer que l'action du Soleil et de la Lune qui produit le flux et le reflux de la mer, est néanmoins insensible, relativement à la pesanteur à la surface de la Terre, il faudrait remarquer d'abord que, d'après la formule (64), l'on a

$$\frac{S}{M f^3} = \frac{\alpha \Phi}{(366,26)^2} \left(\frac{\lambda}{f} \right)^3; \quad \frac{S'}{M f'^3} = \frac{2,3533 \alpha \Phi}{(366,26)^2} \left(\frac{\lambda'}{f'} \right)^3$$

S, S' , désignant les masses du Soleil et de la Lune; f, f' leurs distances à la Terre a donné un instant; λ, λ' leurs moyennes distances. Cela posé, si H, H' désignent les hauteurs des deux astres au-dessus de l'horizon d'un lieu, au même instant, il faudra, pour tenir compte de ces deux forces, ajouter à la valeur de Q établie au commencement du 3ème §, le terme

Mais les termes de cette série sont fort petits comparativement à ceux qui sont dépendans de $Y^{(2)}, Y^{(3)}$ etc.; et par cette raison, ils ne peuvent donner rien de sensible dans l'expression de la pesanteur à la surface de la Terre.

La somme de ces deux pressions divisée par la masse M de la Terre, et multipliée par son rayon polaire $\beta = 6356810''$, est la quantité qui devient sensible dans le phénomène du flux et reflux; elle doit être égale à

$$\alpha \{ Y^{(2)} + Y^{(3)} + \text{etc.} \}$$

Donc, en supposant $\alpha Y^{(3)} = 0, \alpha Y^{(4)} = 0$ etc.; il est clair que l'on a (après avoir fait $r = 1$)

c'est-à-dire, à-peu-près un pied et onze pouces, comme dans la Proposition XXXVI, du 3ème livre des Principes.

Pour avoir la solution générale de ce même problème, dans l'hypothèse de l'équilibre mobile, admise par Newton, il faudrait exprimer la pression produite par le Soleil et la Lune, par la série

$$Mr^2 \frac{\alpha\Phi}{(366,26)^2} \left\{ \left(\frac{\lambda}{f}\right)^3 W^{(2)} + \left(\frac{\lambda}{f}\right)^4 \frac{r}{\lambda} W^{(3)} + \left(\frac{\lambda}{f}\right)^5 \frac{r^2}{\lambda^2} W^{(4)} + \text{etc.} \right\} \\ + Mr^2 \frac{2,3533 \cdot \alpha\Phi}{(366,26)^2} \left\{ \left(\frac{\lambda'}{f'}\right)^3 W'^{(2)} + \left(\frac{\lambda'}{f'}\right)^4 \frac{r}{\lambda'} W'^{(3)} + \left(\frac{\lambda'}{f'}\right)^5 \frac{r^2}{\lambda'^2} W'^{(4)} + \text{etc.} \right\}$$

où l'on a

$$W^{(2)} = \frac{3}{2} (\sin^2 H - \frac{1}{2}); \quad W^{(3)} = \frac{5}{2} (\sin^3 H - \frac{3}{2} \sin H); \quad W^{(4)} = \frac{35}{8} (\sin^4 H - \frac{3}{2} \sin^2 H + \frac{3}{8}) \text{ etc.}$$

et des valeurs semblables pour $W'^{(2)}$, $W'^{(3)}$ etc., que l'on obtient en écrivant H' au lieu de H .

Cette fonction divisée par M , et multipliée par β , étant égale à

$$\alpha \{ Y''^{(2)} + Y''^{(3)} + \text{etc.} \} - \frac{3\rho'}{\rho'''} \alpha \left\{ \frac{Y''^{(2)}}{5} + \frac{Y''^{(3)}}{7} + \frac{Y''^{(4)}}{9} + \text{etc.} \right\}$$

l'on en conclura que;

$$\alpha Y''^{(2)} = \frac{\alpha\Phi \cdot \beta}{(366,26)^2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{5} \frac{\rho'}{\rho'''}\right)} \left\{ \left(\frac{\lambda}{f}\right)^3 W^{(2)} + 2,35 \left(\frac{\lambda'}{f'}\right)^3 W'^{(2)} \right\};$$

$$\alpha Y''^{(3)} = \frac{\alpha\Phi \cdot \beta}{(366,26)^2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{7} \frac{\rho'}{\rho'''}\right)} \left\{ \left(\frac{\lambda}{f}\right)^4 W^{(3)} + 2,35 \left(\frac{\lambda'}{f'}\right)^4 W'^{(3)} \right\};$$

etc.

Les rapports $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\lambda'}$ du rayon de la Terre à la distance du Soleil et de la Lune, étant à-peu-près $\frac{1}{241000}$, $\frac{1}{60}$, il est évident que les fonctions $\alpha Y''^{(3)}$, $\alpha Y''^{(4)}$ etc. sont insensibles. Il suffit d'avoir indiqué ces formules; car on sait bien que l'hypothèse de *Newton*, ne saurait expliquer tous les principaux phénomènes que l'on observe dans le flux et le reflux de la mer. J'ajouterai seulement que la différence des pressions est la cause du flux et reflux. En sorte que sur

deux points éloignés, l'élévation de la mer y est proportionnelle à la différence

$$(\sin^2 H - \sin^2 H') + 2,35 (\sin^2 H' - \sin^2 H').$$

Elle doit être insensible pour la mer Noire et la mer Caspienne, puisque, d'un rivage à l'autre, la petitesse de ce facteur détruit la possibilité de voir le phénomène.

Je dois observer, avant de terminer ce §, que l'équation (59) peut être écrite ainsi;

$$0 = -\frac{3}{5} \int_0^1 \rho d \cdot (a^5 \cdot \alpha h) - \left(\frac{\alpha\Phi}{2} - \alpha G \right) \int_0^1 \rho d \cdot a^3 - \frac{3}{5} \rho' \cdot \alpha h'$$

En y substituant les valeurs précédentes des deux intégrales définies qu'elle renferme, l'on aura

$$0 = -\frac{3}{5} \rho'' \left\{ \alpha h \left(1 + \frac{e}{6} \right) - \frac{e}{6} \int_0^1 a^6 d \cdot \alpha h \right\} - \left(\frac{\alpha\Phi}{2} - \alpha G \right) \rho'' \left(1 + \frac{e}{4} \right) - \frac{3}{5} \rho' \alpha h'.$$

En supprimant dans cette équation, le terme multiplié par $\int_0^1 a^6 d \cdot \alpha h$ on aura pour $-\alpha h'$ la valeur 0,000043994, que j'avais trouvée à la page 330 du Nr. 861 des *Astronomische Nachrichten*. Mais depuis, j'ai pensé que la suppression de ce terme fournissait un résultat moins conforme à la réalité que celui qui est donné par l'équation (62); ce qui me paraît confirmé par le résultat des marées diurnes, rapporté à la page 227 du 5ème vol. de la *Mécanique Céleste*.

Note sur le § XI.

Dans ce § j'ai pris pour l'expression de la marée diurne, la formule donnée par *Laplace*, à la page 192 du second vol de la *Méc. Cél.* Mais en examinant de plus près les calculs par lesquels cette formule a été déduite, je viens de reconnaître qu'elle n'est pas le véritable résultat fourni par l'intégration des trois équations différentielles qui déterminent les oscillations de l'Océan. D'abord, il faut observer que la fonction

$$\frac{3L}{gr^3} \sin \nu \cdot \cos \nu \cdot \cos (nt + \sigma - \psi),$$

en y introduisant la longitude φ de l'astre attirant, au lieu de l'ascension droite ψ et de la déclinaison ν , est celle qui produit les trois termes

$$\frac{3L}{2gr^3} \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \sin \varepsilon \left\{ \begin{array}{l} \cos \varepsilon \cdot \sin (nt + \omega) \\ - \cos^2 \cdot \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \sin (nt + \omega - 2\varphi) \\ + \sin^2 \cdot \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \sin (nt + \omega + 2\varphi) \end{array} \right\} \dots (1)$$

rapportés à la page 169, du 5ème vol. de la Méc. Cél., où ε désigne l'obliquité de l'écliptique. Dès que l'on admet la double hypothèse de l'inondation générale et de l'inégale profondeur de la mer, il n'y a que le premier de ces trois termes, qui puisse produire une marée diurne nécessairement dépendante du terme variable de la profondeur de la mer. Par une analyse, qu'il serait trop long d'exposer ici, j'ai reconnu que pour tenir compte à la fois de l'action du Soleil

et de la Lune, à l'égard de cette marée, il fallait remplacer la formule de la page 192, que je viens de citer, par la formule

$$\alpha\gamma = \frac{3L}{gr^3} \cdot \frac{3,3533 \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta}{2 \left(1 - \frac{3}{5} \frac{1}{\rho} \right) + 14,9883} \sin (nt + \omega)$$

où

$$\frac{3L}{gr^3} = 0,49264.$$

En outre, il importe d'ajouter que cette marée diurne dans le sens vertical, est accompagnée d'un mouvement dans le sens horizontal, et qu'en désignant par $\theta + \delta\theta$, $\omega + \delta\omega$ ce que deviennent, pendant le mouvement qui s'établit après le déplacement initial, le complément de la latitude et la longitude de la molécule d'eau que l'on considère, l'on a

$$\delta\theta = \frac{3L}{2gr^3} \cdot \frac{3,3533 \cdot 14,9883 \cdot 289 \cdot \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{2 \left(1 - \frac{3}{5} \frac{1}{\rho} \right) + 14,9883} \sin (nt + \omega);$$

$$\sin \theta \cdot \delta\omega = \frac{-3L}{2gr^3} \cdot \frac{3,3533 \cdot 14,9883 \cdot 289 \cdot \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{2 \left(1 - \frac{3}{5} \frac{1}{\rho} \right) + 14,9883} \cos \theta \cdot \cos (nt + \omega).$$

De sorte que si l'on prend $\varepsilon = 23^\circ 27'$; $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{5}$, l'on a

$$\alpha\gamma = 0,0107 \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \sin (nt + \omega);$$

$$\delta\theta = 77,991 \cdot \sin (nt + \varepsilon);$$

$$\sin \theta \cdot \delta\omega = -77,991 \cdot \cos \theta \cdot \cos (nt + \omega).$$

Ces oscillations, dont la période est de 24^h sydérales, sont indépendantes du mouvement de la Lune dans son orbite,

ainsi que du mouvement annuel de la Terre. Les deux autres termes de la formule (1) produisent aussi une marée diurne fort petite, qui ne dépend pas de l'inégale profondeur de la mer. C'est de quoi je donnerai ailleurs une démonstration, fondée sur l'intégration des équations qui renferment implicitement, l'explication de tous les phénomènes que présente le flux et le reflux de la mer.

Turin, le 21. février 1854.

J. Plana.

§ XII.

Les deux équations (15), (17), et le système des équations obtenues pour satisfaire à l'identité de l'équation (12), diffèrent essentiellement de celles qui leur correspondent dans le cas où l'on suppose la Terre entière fluide, et composée de couches dont la densité est variable. Alors, l'équilibre doit avoir lieu sur chacune des couches de même densité, et la formation des équations qui déterminent les fonctions $Y^{(0)}$, $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$ etc. qui entrent dans l'expression générale du rayon vecteur

$a(1 + \alpha\gamma) = a + a \{ \alpha Y^{(0)} + \alpha Y^{(1)} + \alpha Y^{(2)} + \alpha Y^{(3)} + \text{etc.} \}$ d'une de ces couches quelconques, doit être faite conformément au No. 29 du second vol. de la Méc. Cél. En vertu de la formule

$$\int_K^1 F(u) du = \int_0^1 F(a) da - \int_0^K F(a) da,$$

l'équation (2) posée au bas de la page 83 de ce vol. peut être écrite ainsi,

$$0 = \left. \begin{array}{l} \frac{4\pi}{2i+1} \int_0^a \rho d \cdot (a^{i+3} \alpha Y^{(i)}) - \frac{4\pi}{3} a \cdot \alpha Y^{(i)} \int_0^a \rho d \cdot a^3 \\ - \frac{4\pi}{2i+1} a^{2i+1} \left\{ \int_0^a \rho d \cdot (a^{2-i} \alpha Y^{(i)}) - \int_0^1 \rho d \cdot (a^{2-i} \alpha Y^{(i)}) \right\} \\ + a^{2i+1} \alpha Z^{(i)}. \end{array} \right\} \dots \dots \dots (65)$$

En supprimant les termes dépendans de l'action des astres S , S' , S'' etc. les formules de la page 68 du même volume, donnent

$$\alpha Z^{(0)} = \frac{\alpha \Phi}{3} \cdot \frac{4\pi}{3} \int_0^1 \rho d.a^3; \quad \alpha Z^{(2)} = -\frac{\alpha \Phi}{2} (\mu^2 - \frac{1}{3}) \int_0^1 \rho d.a^3;$$

$$\alpha Z^{(1)} = 0; \quad \alpha Z^{(3)} = 0; \quad \alpha Z^{(4)} = 0 \text{ etc.}$$

Ainsi, en faisant $i = 2$ et $\alpha Y^{(2)} = -\alpha h (\mu^2 - \frac{1}{3})$, l'équation (65) donne, après avoir supprimé le facteur commun $\frac{4\pi}{5} (\mu^2 - \frac{1}{3})$;

$$5 a^2 \cdot \alpha h \int_0^a \rho a^2 da = \int_0^a \rho d.(a^5 \alpha h) + \frac{5}{2} \alpha \Phi \cdot a^5 \int_0^1 \rho a^2 da - a^5 \int_0^a \rho d.\alpha h + a^5 \int_0^1 \rho d.\alpha h \dots\dots\dots (66)$$

où αh désigne la fonction du paramètre a , propre à représenter la loi de l'ellipticité des couches. Pour délivrer cette fonction du signe intégral, il faut différentier, par rapport à la lettre a , ce qui donne par deux différentiations successives;

$$(a \frac{d.\alpha h}{da} - 3 \alpha h) a^2 \int_0^a \rho a^2 da + \int_0^a \rho d.(a^5 \cdot \alpha h) = 0 \dots\dots\dots (67)$$

$$\frac{d^2.\alpha h}{da^2} + \frac{2 \rho \cdot a^2}{\int_0^a \rho a^2 da} \cdot \frac{d.\alpha h}{da} - \left(\frac{6}{a^2} - \frac{2 \rho a}{\int_0^a \rho a^2 da} \right) \alpha h = 0 \dots\dots\dots (68)$$

En intégrant cette dernière équation, lorsque la loi de la densité ρ sera connue en fonction de a , on aura la loi des ellipticités. En posant

$$H = \frac{a^2 \frac{d^2.\alpha h}{da^2} - 6 \alpha h}{2 a^2 \frac{d.\alpha h}{da} + 2 a \cdot \alpha h}$$

L'équation (68) peut être écrite ainsi;

$$H + \frac{d.\text{Log.} \left(\int_0^a \rho a^2 da \right)}{da} = 0;$$

donc, en intégrant l'on aura

$$C' \cdot \rho a^2 = -H \cdot e^{-\int H da} \dots\dots\dots (69)$$

où C' désigne une constante arbitraire. Cette formule donne la loi des densités, lorsque celle des ellipticités sera connue. Elle démontre que la densité étant variable, il est impossible que l'ellipticité des couches soit constante.

L'équation (66) répond à celle que *Clairant* avait obtenue à la page 273 (Edition de 1808) de sa Théorie de la Figure de la Terre.

§ XIII.

En terminant ce Mémoire, pour faire ressortir la différence énorme qu'il y a entre cette Théorie générale et celle de la Figure de la Terre, dans l'hypothèse de son homogénéité et de sa fluidité totale, il suffit d'observer que dans ce cas particulier, l'on a nécessairement $\alpha Y^{(2)} = 0$, $\alpha Z^{(2)} = 0$; ce qui réduit l'équation (21) posée dans le § IV à celle-ci;

$$0 = -\frac{\alpha \Phi}{2} (\mu^2 - \frac{1}{3}) - \alpha \bar{Y}^{(2)} + \frac{3}{5} \alpha \bar{Y}^{(2)}.$$

d'où l'on tire

$$\alpha \bar{Y}^{(2)} = -\frac{5}{4} \alpha \Phi (\mu^2 - \frac{1}{3}).$$

A l'égard des autres fonctions $\alpha \bar{Y}^{(3)}$, $\alpha \bar{Y}^{(4)}$ etc. il est évident qu'elles doivent être nulles pour que l'équation (12) puisse

être identiquement satisfaite. Le rayon vecteur R de la surface, sera donc tel que l'on a

$$R = 1 + \alpha \bar{Y}^{(0)} - \frac{5}{4} \alpha \Phi (\mu^2 - \frac{1}{3}),$$

et la pesanteur p à cette même surface, sera, d'après la formule (20);

$$p = M \left\{ 1 - \frac{2}{3} \alpha \Phi - 2 \alpha \bar{Y}^{(0)} \right\} + M \cdot \frac{5}{4} \alpha \Phi (\mu^2 - \frac{1}{3}).$$

Cette valeur de H et celle de p , ont été trouvées, la première fois, par *Newton*, à travers plusieurs propositions vraies, mais inadmissibles, sans les démonstrations qui furent ensuite données par ses successeurs. Comme on néglige les termes de l'ordre du carré de α , il est clair que l'on a

$$p = \frac{M (1 - \frac{2}{3} \alpha \Phi - \alpha \bar{Y}^{(0)})}{R}$$

C'est en vertu de cette transformation de la valeur précédente de p , que *Newton* disait dans sa Proposition XX. du 3ème livre des Principes que „les poids des corps dans quelque région de la Terre que ce soit, sont réciproquement comme les distances des lieux au centre de la Terre.“ Mais il se trompait en croyant que la même propriété subsistait pour la Terre hétérogène: car nos formules (44), (46) et (48) démontrent, qu'en développant la fonction $\frac{M}{R}$ suivant les puissances de α , et négligeant le carré de α , il est impossible que le coefficient de α^2 soit égal à la seule partie αG . De sorte qu'en augmentant l'aplatissement αG , on diminue au lieu d'augmenter le coefficient $\frac{5}{2} \alpha \Phi - \alpha G$. *Clairant* a fait le

premier cette remarque; elle prouve que *Newton* était très-éloigné de la véritable théorie de la pesanteur à la surface de la Terre. Ses idées étaient tellement informes qu'en voyant par les observations, que relativement à Jupiter l'on a $\frac{5}{2} \alpha \Phi = 0,10204$; $\alpha G = 0,071301$, il expliquait l'inégalité $\alpha G < \frac{5}{2} \alpha \Phi$ en disant que la chaleur solaire en était la cause; tandis qu'il faut l'attribuer à une densité croissante depuis la surface jusqu'au centre de la planète. (Voyez les dernières lignes, de la Proposition XIX. du 3ème livre des Principes). C'est ici le cas de répéter avec *Laplace* „que les meilleurs esprits s'abusent quelquefois sur leurs propres conceptions.“

Turin, le 14 janvier 1854.

Jean Plana.

Beobachtungen der Melpomene, Fortuna, Massalia, Lutetia, Calliope, Hygiea, Eunomia und Euterpe, sowie des Cometen I. 1854 am Refractor der Berliner Sternwarte.

(Fortsetzung von Nr. 902).

E u t e r p e.

	M. Zt. Berlin.	Pl. — * in AR.	Pl. — * in δ .	Sch. AR. Plan.	Sch. δ . Plan.	Vergl.
1854 Jan. 12	10 ^h 30 ^m 6 ^s 8	+3 ^m 25 ^s 210	+5' 22" 2	44 ^o 16' 12" 9	+16 ^o 1' 46" 2	10 mit *d
19	9 0 43,5	+1 28,040	—6 55,4	45 44 8,2	16 35 12,2	10 „ e
20	9 17 29,9	+2 26,670	—1 39,0	45 58 47,5	16 40 28,5	10 „ e
23	9 57 7,8	—1 57,690	—5 15,2	46 45 2,7	16 56 42,4	10 „ f
24	8 1 40,6	—0 58,300	—0 15,7	46 59 53,4	17 1 41,9	10 „ f
Febr. 4	11 1 21,2	+0 13,060	—7 12,2	50 25 1,7	18 6 49,3	10 „ g
26	8 23 36,5	+0 34,520	+5 4,3	59 5 20,6	20 21 30,1	10 „ h
März 2	8 12 8,0	—3 23,200	—9 25,9	60 53 52,2	20 45 9,3	8 „ i
3	9 46 16,6	—1 24,970	—3 15,2	61 23 25,4	20 51 20,0	10 „ i
4	7 36 50,2	+0 16,940	+1 53,6	61 48 53,8	20 56 28,8	10 „ i
6	9 25 26,2	+1 26,290	—4 48,4	62 47 40,7	21 8 19,1	10 „ k
14	9 25 9,5	+1 53,110	—4 38,6	66 42 14,2	21 51 4,1	10 „ l
15	9 46 32,7	+3 55,770	+0 29,2	67 12 53,9	21 56 11,8	10 „ l
16	9 32 14,5	+4 53,025	—3 8,3	67 42 53,2	22 1 6,0	10 „ m
April 1	9 57 21,4	+2 32,320	+6 55,2	76 10 10,4	+23 8 10,7	10 „ n

Euterpe gleicht jetzt einem Sterne 11. Grösse und wird hier noch einige Zeit verfolgt werden können.

Mittlere Oerter der Vergleichsterne 1854,0.

*d	43 ^o 25' 0" 0	+15 ^o 56' 23" 6	B. Z. 337.
e	45 22 13,5	16 42 6,9	— 337 u. Taylor 1059; Lal. 5823 ist ausgeschlossen.
f	47 14 34,1	17 1 56,9	— 337, Rümker 832 und Taylor 1105.
g	50 21 53,4	18 14 0,5	— 506, — 870.
h	58 56 52,7	20 16 24,1	— 391.
i	61 44 50,2	20 54 33,1	— 393.
k	62 26 17,2	21 13 5,3	Rümker 51 Tauri, Taylor 1479.
l	66 14 9,2	21 55 40,1	B. Z. 393.
m	66 29 49,9	22 4 11,7	— 393.
n	75 32 18,4	+23 1 12,1	— 395 und 521.