

Bestimmung der Bahn des *Hugenischen* Saturns-Satelliten.

Von

Herrn Professor und Ritter *Bessel*.

Die Bahnen der Satelliten des Saturns und Uranus sind uns fast unbekannt geblieben, während, in der langen Zeit welche seit der Entdeckung der ersteren verstrichen ist, die Erkenntnis der Bewegungen aller übrigen bekannten Körper des Sonnensystems fortwährende Anstrengungen veranlaßt und dadurch immer neue Erfolge herbeigeführt hat. Als Ursache des Zurückbleibens unserer Kenntnisse dieser Satelliten kann theils die Lichtschwäche derselben, theils der Mangel zuverlässiger Mikrometer genannt werden; allein man muß zugleich zugestehen, daß die Astronomen, auch ohne sehr starke Fernröhre und Mikrometer, den Saturnsatelliten viele, für ihre Theorie nützliche Beobachtungen hätten abgewinnen können, wenn sie die Durchgangszeiten derselben durch die kleine Axe der Ringellipse fleißiger beobachtet hätten als sie gethan haben. Wahrnehmungen dieser Art finden sich nur von *Edmund Halley*, von *Cassini* Vater und Sohn, von *Herschel* und von *Köhler*. *Hugen* selbst hat uns keine Beobachtung einer Conjunctionszeit hinterlassen, sondern nur um Mitternacht des 14^{ten} März 1659 den Ort des Satelliten so bezeichnet, daß man erkennt daß er mehrere Stunden früher in Conjunction gewesen sein muß; *Bernard* hat zwar im J. 1787 mehrere Conjunctionen beobachtet, allein aus der Berechnung derselben geht hervor, daß er dabei nicht die Sorgfalt angewandt hat welche, mehr noch als instrumentale Hilfsmittel, nothwendig ist, um brauchbare Resultate zu erlangen. Ein Theil der Nachrichten über den Satelliten, welche wir von den genannten Astronomen besitzen, ist, aus Gründen welche ich im Verlaufe dieser Abhandlung anführen werde, nicht geeignet Zutrauen einzufößen, und die keinesweges beträchtliche Anzahl derselben muß noch vermindert werden wenn die Absicht ist eine Theorie des Satelliten darauf zu gründen. Inzwischen verrathen schon diese spärlichen Angaben eine Abweichung der Bahn des Satelliten von dem Kreise, sind aber nicht genügend dieselbe mit einiger Genauigkeit zu bestimmen; ein Versuch dieses dennoch zu leisten, welchen

ich im Jahre 1812 bekannt gemacht habe *), ist daher sehr unvollkommen geblieben und bedarf wesentlich derjenigen Vervollkommenung, welche ich aus einer Reihe, mit dem großen Heliometer der Königsberger Sternwarte gemachter Beobachtungen des Satelliten jetzt ziehen kann.

Diejenige Art von Beobachtungen, welche die früheren Astronomen uns hinterlassen haben, nämlich die Schätzung der Conjunctionszeiten des Satelliten, entweder mit dem Mittelpunkte oder mit einem Rande des Planeten oder seines Ringes, kann nur dann mit einiger Sicherheit gemacht werden, wenn die Entfernung des Satelliten von der großen Axe der scheinbaren Ringellipse klein ist; dieses findet nur dann statt wenn der Planet sich in der Nähe der Knotenlinie der Trabantenbahn befindet, und es folgt hieraus, daß alle sicherere Beobachtungen des Trabanten in zwei diametral einander entgegengesetzte Theile seiner Bahn fallen und daher zur Bestimmung aller Elemente von welchen der Ort des Trabanten in seiner Bahn abhängt nicht hinreichend sind. Man muß also die besseren Beobachtungen mit schlechteren vermischen um eine vollständige Bestimmung zu erhalten. Hierin liegt die eigentliche Schwierigkeit der Aufgabe; allein dieselbe würde noch stärker hervortreten, wenn nicht die Apsidenlinie der Bahn eine beträchtliche Bewegung besäße, vermöge welcher ihre Lage, seit der *Hugenischen* Entdeckung des Trabanten, sich bereits um einen Quadranten geändert hat; diese Bewegung führt immer andere Punkte der Ellipse in die Gegenden der Bahn welche sicherer beobachtet werden können, und es würde, während der langen Zeit welche die Beobachtungen umfassen, wirklich alle Schwierigkeit verschwunden sein, wenn wir von allen Durchgängen des Saturns durch die Knotenlinie so genügende Nachrichten besäßen als diejenigen sind, welche wir *Herschel* und *Köhler*, vom

*) Königsberger Archiv für Naturwissenschaften und Mathematik S. 113.

Durchgange von 1789 verdanken. Will man diese Schwierigkeit nicht durch die Hoffnung das im Verlaufe eines folgenden Jahrhunderts nachgeholt werde, was in einem früheren versäumt worden ist, sondern schon in unserer Zeit zu beseitigen suchen, so bleibt nur die Anstellung einer Beobachtungsreihe anderer Art, nämlich einer solchen durch welche der Ort des Trabanten vollständig und in jedem Punkte seiner Bahn mit gleicher Sicherheit angegeben wird übrig; nur eine solche Beobachtungsreihe kann auch die zur Erkenntnis der Masse des Planeten notwendige Bestimmung der mittleren Entfernung des Trabanten ergeben und die Lage seiner Bahn festsetzen, von welcher bisher angenommen worden ist, daß sie mit der Lage der Ringebene zusammenfalle. Ist es gelungen, aus Beobachtungen dieser Art, sämtliche Elemente für die gegenwärtige Zeit zu bestimmen, so werden die älteren Nachrichten nur zu Rathe gezogen werden dürfen um die mittleren Bewegungen der Länge des Trabanten und der Apsidenlinie und der Knoten seiner Bahn daraus zu erkennen, welche geringere Zahl von Elementen dieselben mit weit mehr Sicherheit ergeben können als früher die größere Zahl.

Eine Beobachtungsreihe dieser Art habe ich, in der ersten, auf die Aufstellung des Heliometers folgenden Periode der Sichtbarkeit des Saturns gemacht. Man wird im Folgenden sehen, daß ihr Zweck mit beträchtlicher Sicherheit erreicht worden ist, mit einer Sicherheit welche keinen Zweifel darüber läßt, daß eine Fortsetzung derselben Beobachtungen durch einige Jahre hindurch, eine Genauigkeit der Resultate geben wird, welche man in dem Falle eines Saturns-Satelliten vielleicht nicht erwartet hat. Diese weitere Verfeinerung der Resultate wird mich wahrscheinlich veranlassen, später auf diesen Gegenstand zurückzukommen; allein da es Bedürfnis wird, daß es bei dem bevorstehenden Durchgange des Planeten durch die Knotenlinie der Trabantenbahn, nicht an Elementen fehle, aus welchen die Zeiten und Umstände der Conjunctionen des Satelliten, der Finsternisse welche derselbe durch den Planeten und vielleicht auch durch den Ring erleiden wird und der Vorübergänge seines Schattens hinreichend genau vorausberechnet werden können, so verzögere ich nicht die Mittheilung der auf den Beobachtungen der ersten Periode allein beruhenden Resultate. Denn wenn die genannten Erscheinungen jetzt, nachdem man durch das Heliometer in den Stand gesetzt ist, den Satelliten in allen Punkten seiner Bahn mit genügender Genauigkeit zu beobachten, ihr früheres Interesse auch zum Theil verloren haben, so wird es doch sehr nützlich bleiben, sie mit der größten Aufmerksamkeit zu verfolgen.

1.

Ich werde zuerst die Beobachtungen mit dem Heliometer in soweit erläutern als es hier nothwendig ist. Wenn man eine der Objectivhälften so stellt, daß ihre Axe mit der Axe des Fernrohrs zusammenfällt, die andere aber so verschiebt und beide zusammen so um die Axe des Rohrs drehet, daß diejenige Entfernung und Lage der doppelten Bilder beider zu vergleichenden Gegenstände, welche man hervorzubringen beabsichtigt, zuerst durch die Verschiebung nach einer Richtung, dann nach der entgegengesetzten, beidemahle aber in der Mitte des Sehfeldes des in die Axe des Rohrs gestellten Oculars hervorgebracht werden, so gehen die Entfernung ($= s$) und die halbe Summe der Winkel in welchen der größte, durch die beiden Gegenstände gelegte Kreis die Declinationskreise derselben durchschneidet ($= p$), aus den Ausdrücken:

$$\omega \tan s = mR; \quad p = \frac{1}{2}(n+n') + c$$

hervor, wo $\omega = 206264''{,}8$, m die halbe Verschiebung der Objectivhälfte in Revolutionen der Schraube ausgedrückt, R den Werth einer solchen Revolution, n und n' die abgelesenen Angaben des Positionskreises und c seinen Indexfehler bezeichnen.

Den Werth von R habe ich für die Angabe t des Fahrnh. Thermometers

$$= 52''{,}91788 - (t - 49{,}2) 0''{,}0004493$$

gefunden; über die Rechtfertigung der ersten Formel werde ich bei einer anderen Gelegenheit das Nöthige beibringen; zur Bestimmung von c sind eben so sichere als leicht anwendbare Mittel vorhanden. Den Positionswinkel p zähle ich so, daß er sich auf die Richtung von dem Gegenstande dessen Ort als bekannt angenommen werden soll nach dem zu bestimmenden bezieht, von Norden (wo er $= 0$ ist) nach derselben Seite herum auf welcher die Rectascensionen größer werden. Diese Art der Angabe des Positionswinkels ist schon früher von Herrn *Herschel* II gewählt worden, was mir als ich sie vorschlug *) noch unbekannt war, jetzt aber ihre Zweckmäßigkeit verbürgt.

Die Werthe von

$$2\omega \sin \frac{1}{2}s \sin p = x$$

$$2\omega \sin \frac{1}{2}s \cos p = y$$

können als das Resultat jeder Beobachtung mit dem Heliometer angesehen werden. Nachdem sie von dem Einflusse der Refraction befreit worden sind, werden sie durch die Rectascensionen und Declinationen des zum Grunde gelegten

*) Astronom. Nachrichten Nr. 189. S. 412.

und des zu bestimmenden Punktes $\alpha, \delta, \alpha', \delta'$ folgendermaßen ausgedrückt:

$$x = 2\omega \sin \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) \cos \frac{1}{2}(\delta' + \delta)$$

$$y = 2\omega \cos \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) \sin \frac{1}{2}(\delta' - \delta).$$

Für so kleine Entfernungen wie bei dem Saturns-Satelliten vorkommen, können sie einfacher:

$$x = s \sin p; y = s \cos p$$

geschrieben werden. Da man aber die Beobachtungen des Satelliten nicht unmittelbar auf den Mittelpunkt des Planeten beziehen kann, so habe ich zwei Punkte zur Vergleichung angewandt, von welchen vorausgesetzt worden ist, daß sie in einer geraden durch den Mittelpunkt gehenden Linie, auf beiden Seiten gleich weit entfernt liegen. Diese waren meistens die beiden Scheitelpunkte der Ringellipse, oft aber auch die in der Richtung der großen Axe dieser Ellipse befindlichen Punkte des Saturnsrandes. Nie ist die Beobachtung auf einen Punkt allein bezogen, sondern immer auf beide, wodurch die Entfernung derselben geradezu aus dem Resultate geschafft ist.

Wenn die auf beide Punkte sich beziehenden Werthe von x und y durch x_1, y_1 und x_2, y_2 bezeichnet werden, die Entfernung des Satelliten von dem Mittelpunkt des Planeten durch s , sein Positionswinkel an demselben durch p , $s \sin p$ und $s \cos p$ durch x und y , so findet man, mit Rücksicht auf die Glieder der zweiten Ordnung:

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \frac{1}{2} \tan \delta \cdot x y \sin 1''$$

$$y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) + \frac{1}{2} \tan \delta \cdot x x \sin 1''$$

Nach diesen Formeln sind die folgenden Ortsangaben berechnet worden. Jede derselben ist das Resultat einer vollständigen Beobachtung; die um den Mittelpunkt des Saturns als symmetrisch angenommenen Punkte sind durch den Ring oder durch den Planeten selbst erkannt worden, je nachdem R oder P beigelegt ist.

	M. Z.	x	y	
	$\begin{smallmatrix} h & ' & '' \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} '' & & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} '' & & \end{smallmatrix}$	
1829 Dec. 11	11 17 35	-199,43	-16,34	R. unzuverlässig.
1830 Jan. 12	9 55 35	-207,87	-19,13	—
21	9 52 14	+187,86	+37,08	—
24	9 21 23	+1,78	+54,62	— äußerst unruhige Luft.
	12 3 22	-6,59	+53,27	—
25	9 44 33	-79,15	+42,18	—
	11 27 39	-83,76	+40,95	—
26	9 41 2	-146,20	+23,39	—
Febr. 1	9 20 31	-19,69	-58,12	—
	11 8 28	-14,49	-57,95	—
2	9 30 17	+59,38	-46,23	— } dunst.; d. Trabant schwer zu sehen.
	9 30 51	+60,96	-46,50	—
6	9 14 10	+186,00	+39,73	— zu sehen.
	9 57 11	+185,40	+39,70	—
14	9 31 22	-196,42	-43,76	— der Trabant fast unsichtbar.
15	9 8 23	-152,79	-56,58	—

	M. Z.	x	y	
	$\begin{smallmatrix} h & ' & '' \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} '' & & \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} '' & & \end{smallmatrix}$	
1830 Febr. 16	9 8 0	-89,10	-62,37	R.
	9 27 4	-87,71	-62,26	P.
19	10 11 45	+137,84	-26,18	R.
24	10 5 43	+62,18	+60,77	— unruhige Luft.
März 1	8 47 15	-207,84	-25,22	—
	9 37 52	-208,01	-25,80	P.
3	11 51 36	-138,91	-59,00	R.
	12 18 9	-138,09	-59,22	—
10	9 13 15	+175,75	+43,69	—
	10 2 21	+174,16	+43,93	—
14	7 59 31	-94,86	+41,17	—
	8 18 53	-95,24	+40,86	P.
	9 27 50	-98,38	+40,05	P.
	9 46 88	-100,02	+39,23	R.
15	8 55 50	-157,84	+19,58	—
	8 56 17	-157,48	+19,85	P.
17	7 17 56	-203,98	-26,87	R.
	7 17 50	-203,71	-25,65	P.
	9 19 45	-203,57	-27,46	R.
	9 20 4	-203,40	-27,28	P.
22	9 55 59	+80,38	-43,41	R. } blafs und un-
	9 57 14	+81,08	-43,42	P. } deutlich.
27	8 57 20	+118,98	+56,95	R. } dunstig, schwer zu sehen.
April 5	10 58 24	-59,19	-61,16	— zu sehen.
	10 59 23	-59,34	-60,84	P. } unsicher.
	11 27 39	-57,91	-61,59	R.
18	9 34 38	-191,98	-29,33	—
	9 35 37	-191,89	-29,35	P.
19	8 58 57	-170,00	-46,49	R. } schwer zu sehen.
	9 40 20	-168,29	-45,92	— } hen.
21	9 55 7	-57,83	-60,11	— } dunstige Luft.
	9 54 22	-57,24	-59,87	P.
24	9 10 17	+139,00	-20,07	R.
	9 10 11	+139,04	-19,80	P.
25	9 51 14	+174,01	+4,07	R.
	9 51 41	+174,11	+4,24	P.
26	9 36 4	+178,96	+26,21	R.
	9 35 46	+178,98	+26,49	P.
27	10 17 33	+152,94	+44,60	R. } undeutl. kaum zu sehen.
	10 17 41	+153,57	+44,83	P.
29	9 17 16	+37,84	+56,12	R. } s. dunstig, äuss. schw. zu sehen.
	9 46 32	+36,74	+55,92	— } schwer zu sehen.
May 3	9 44 39	-183,98	-7,90	— unruhige Luft;
	10 6 45	-183,81	-8,83	— schwer zu sehen.
	10 28 17	-184,04	-8,66	— schwer zu sehen.
5	8 51 27	-164,14	-45,02	— } schwer zu sehen.
	8 51 34	-164,10	-44,77	P.
	9 22 19	-162,89	-45,30	R.
	9 22 1	-162,83	-44,82	P.
6	8 58 28	-117,95	-55,26	R.
8	9 20 53	+14,95	-51,27	R.
	9 20 32	+14,85	-51,17	P.
	10 33 15	+17,54	-51,14	R. } unruhig und dunstig.
	10 33 50	+17,91	-50,99	P.
12	9 18 50	+174,21	+25,70	R.
	9 41 39	+173,70	+25,59	—
15	11 12 21	+30,71	+54,08	—
16	9 43 18	-35,74	+46,96	—
	10 12 45	-37,47	+46,36	—

	M. Z.			x	y	
	h	m	s			
1830 May 17	10	0	1	-101,54	+32,00	R. } sehr schwer zu sehen.
	10	22	1	-102,59	+31,91	
18	9	11	53	-149,98	+12,86	P.
	9	11	53	-150,11	+13,30	
	9	38	55	-150,80	+13,07	
20	10	48	29	-180,21	-28,23	R. schwer zu sehen.
	11	5	5	-180,28	-28,91	

2.

Der Angabe der aus diesen Beobachtungen folgenden Elemente lasse ich die Auseinandersetzung der dabei befolgten Theorie vorangehen. Wenn α und δ die Rectascension und Declination des Saturns, α' und δ' der Trabanten bezeichnen, so hat man:

$$\left. \begin{aligned} \cos s &= \sin \delta \sin \delta' + \cos \delta \cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha) \\ \sin s \cos p &= \cos \delta \sin \delta' - \sin \delta \cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha) \\ \sin s \sin p &= \cos \delta' \sin(\alpha' - \alpha) \end{aligned} \right\} (a)$$

Bezeichnet man die aus dem Saturn gesehene Rectascension und Declination des Trabanten durch a und d , seine Entfernung vom Saturn durch r , von der Erde durch ρ' , des Saturns von der Erde durch ρ , so ist

$$\left. \begin{aligned} \rho' \cos \delta' \cos \alpha' &= \rho \cos \delta \cos \alpha + r \cos d \cos a \\ \rho' \cos \delta' \sin \alpha' &= \rho \cos \delta \sin \alpha + r \cos d \sin a \\ \rho' \sin \delta' &= \rho \sin \delta + r \sin d \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \rho' \cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha) &= \rho \cos \delta + r \cos d \cos(a - \alpha) \\ \rho' \cos \delta' \sin(\alpha' - \alpha) &= r \cos d \sin(a - \alpha) \\ \rho' \sin \delta' &= \rho \sin \delta + r \sin d \end{aligned} \right\}$$

Multipliziert man die Gleichungen (a) mit ρ' so ergibt ihre Vergleichung mit den eben gefundenen:

$$\left. \begin{aligned} \rho' \cos s &= \rho + r [\sin d \sin \delta + \cos d \cos \delta \cos(a - \alpha)] \\ \rho' \sin s \cos p &= r [\sin d \cos \delta - \cos d \sin \delta \cos(a - \alpha)] \\ \rho' \sin s \sin p &= r \cos d \sin(a - \alpha) \end{aligned} \right\}$$

wofür ich schreiben werde

$$\left. \begin{aligned} \rho' \cos s &= \rho (1 + \zeta) \\ \rho' \sin s \cos p &= \rho \cdot \eta \\ \rho' \sin s \sin p &= \rho \cdot \xi \end{aligned} \right\} \dots (b)$$

Man erhält hierdurch, wenn man $\omega \tan g s$ und s verwechselt, was ohne merklichen Fehler geschehen kann, die Ausdrücke der beobachteten Größen x und y :

$$x = \frac{\omega \cdot \xi}{1 + \zeta}; \quad y = \frac{\omega \eta}{1 + \zeta}$$

Die Größen ξ , η , ζ sind nun durch die Elemente der Bahn

des Trabanten auszudrücken. Ich werde folgende Bezeichnungen anwenden:

Länge des aufsteigenden Knotens der Trabantenbahn

auf der Ecliptik n

Neigung gegen die Ecliptik i

Länge des aufsteig. Knotens auf dem Aequator . . . N

Neigung gegen den Aequator I

Entfernung der Ecliptik vom Aequator, auf der Trabantenbahn gemessen w

Länge des Trabanten in seiner Bahn v

Seine Entfernung vom Aequator $v - n + w = u$

Mittlere Entfernung des Saturns von der Sonne . . . (ρ)

Halbe große Axe der Trabantenbahn $(\rho) \sin \Delta$

wo also Δ die mittlere Elongation des Trabanten bedeutet. Mißt man die Entfernung r des Trabanten vom Saturn durch die halbe große Axe seiner Bahn, so wird statt dieses Zeichens jetzt

$$(\rho) \sin \Delta \cdot r$$

oder mit hinreichender Genauigkeit

$$(\rho) \frac{\Delta}{\omega} r$$

geschrieben.

Diesen Bezeichnungen zufolge hat man:

$$\left. \begin{aligned} \cos d \cos(a - \alpha) &= \sin u \cdot \sin(x - N) \cos I + \cos u \cos(x - N) \\ \cos d \sin(a - \alpha) &= \sin u \cdot \cos(x - N) \cos I - \cos u \sin(x - N) \\ \sin d &= \sin u \cdot \sin I \end{aligned} \right\}$$

und wenn man dieses in die Ausdrücke (b) setzt:

$$\omega \cdot \xi = r \cdot \frac{(\rho)}{\rho} \Delta [\sin u \cdot \cos(x - N) \cos I - \cos u \sin(x - N)]$$

$$\omega \cdot \eta = r \cdot \frac{(\rho)}{\rho} \Delta [\sin u (\cos \delta \sin I - \sin \delta \cos I \sin(x - N)) - \cos u \cdot \sin \delta \cos(x - N)]$$

$$\omega \cdot \zeta = r \cdot \frac{(\rho)}{\rho} \Delta [\sin u (\sin \delta \sin I + \cos \delta \cos I \sin(x - N)) + \cos u \cdot \cos \delta \cos(x - N)]$$

Bestimmt man nun Hülfswinkel f , F , g , G , h , H nach den Formeln:

$$\sin f \cdot \cos I = \cos(x - N) \cos I$$

$$\sin f \cdot \sin I = -\sin(x - N)$$

$$\cos f = -\cos(x - N) \sin I$$

$$\sin g \cdot \cos G = \cos \delta \sin I - \sin \delta \cos I \sin(x - N)$$

$$\sin g \cdot \sin G = -\sin \delta \cos(x - N)$$

$$\cos g = \cos \delta \cos I + \sin \delta \sin I \sin(x - N)$$

$$\sin h \cdot \cos H = \sin \delta \sin I + \cos \delta \cos I \sin(x - N)$$

$$\sin h \cdot \sin H = \cos \delta \cos(x - N)$$

$$\cos h = \sin \delta \cos I - \cos \delta \sin I \sin(x - N)$$

so erhält man die zur Rechnung bequemen Ausdrücke:

$$\omega \cdot \xi = r \frac{(\rho)}{\rho} \Delta \sin f \sin (F + u)$$

$$\omega \cdot \eta = r \frac{(\rho)}{\rho} \Delta \sin g \sin (G + u)$$

$$\omega \cdot \zeta = r \frac{(\rho)}{\rho} \Delta \sin h \sin (H + u)$$

oder, wenn man f' , g' , h' für

$$\frac{(\rho)}{\rho} \Delta \sin f; \quad \frac{(\rho)}{\rho} \Delta \sin g; \quad \frac{(\rho)}{\rho} \Delta \sin h$$

und F' , G' , H' für

$$F + \omega - n, \quad G + \omega - n, \quad H + \omega - n$$

schreibt,

$$\omega \cdot \xi = r \cdot f' \sin (F' + \nu)$$

$$\omega \cdot \eta = r \cdot g' \sin (G' + \nu)$$

$$\omega \cdot \zeta = r \cdot h' \sin (H' + \nu)$$

Für die Größen $\log f'$, $\log g'$, $\log \frac{h'}{\omega}$, F' , G' , H' kann eine Ephemeride berechnet werden, welche das zur Berechnung von ζ nothwendige aber nur mit geringer Annäherung enthalten darf, indem der Einfluss von ζ auf x und y sehr gering ist.

Nimmt man die Bewegung des Trabanten als rein-elliptisch an und bezeichnet man die mittlere Länge für das Moment von welchem man die Zeit t anrechnet, durch E , die tägliche Bewegung durch λ , die Länge des Perisaturniums durch P , die Excentricität durch e , die mittlere, excentrische und wahre Anomalie durch μ , s , ϕ , so hat man:

$$\mu = E + \lambda t - P = s - e \sin s$$

$$\tan \frac{1}{2} \phi = \tan \frac{1}{2} (\nu - P) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tan \frac{1}{2} s$$

$$r = 1 - e \cos s$$

und hiermit also alle, zur Vergleichung gegebener Elemente mit den Beobachtungen nothwendigen Formeln.

3.

Um näherungsweise bekannte Elemente durch ihre Vergleichung mit den Beobachtungen zu berichtigen, hat man für jede Beobachtung die Bedingungsgleichung

$0 = n + a \cdot dE + b \cdot edP + c \cdot de + d \cdot d\Delta + e \cdot \sin I \cdot dN + f \cdot dI$ sowohl für x als auch für y zu berechnen und endlich alle zusammen nach der Methode der kleinsten Quadrate aufzulösen. Wenn die Beobachtungsreihe nur eine kurze Zeit umfasst, kann λ ohne merklichen Fehler so angenommen werden wie frühere Bestimmungen es ergeben haben, oder es ist unnöthig den Einfluss des Fehlers dieser Annahme

auf die Endresultate zu entwickeln. Ferner ist es, wegen des geringen Einflusses von ζ unnöthig, die Veränderung seines Werthes, welche aus den Verbesserungen der angenommenen Elemente entsteht zu berücksichtigen. Man wird also statt x und y nur $\omega \cdot \xi$ und $\omega \cdot \eta$ differentiiren dürfen um die Coefficienten a , b , c etc. .. zu erhalten.

Die bequemsten Formeln für die Berechnung dieser Coefficienten scheinen mir folgende zu sein:

$$a = \omega \cdot \frac{d\xi}{dE} = \frac{f'}{\sqrt{(1-ee)}} \left\{ \cos (F' + \nu) + e \cos (F' + P) \right\}$$

$$b = \omega \cdot \frac{d\xi}{edP} = \frac{-f'}{\sqrt{(1-ee)}} \left\{ \cos (F' + \nu) \left(\cos s \sqrt{(1-ee)} + \frac{e}{1 + \sqrt{(1-ee)}} \right) + \cos (F' + P) \right\}$$

$$c = \omega \cdot \frac{d\xi}{de} = \frac{f'}{\sqrt{(1-ee)}} \left\{ \cos (F' + \nu) \sin s - \sin (F' + P) \sqrt{(1-ee)} \right\}$$

$$d = \omega \cdot \frac{d\xi}{d\Delta} = \frac{\omega \cdot \xi}{\Delta}$$

$$e = \omega \cdot \frac{d\xi}{\sin I \cdot dN} = -f' \tan \frac{1}{2} i \cdot r \cos (F' + \nu) \cos \omega - \frac{(\rho)}{\rho} \Delta \cos f \cdot r \cos (\nu - n + \omega)$$

$$f = \omega \cdot \frac{d\xi}{dI} = f' \cdot \tan \frac{1}{2} i \cdot r \cos (F' + \nu) \sin \omega + \frac{(\rho)}{\rho} \Delta \cos f \cdot r \sin (\nu - n + \omega)$$

Zieht man vor $\sin i \cdot dn$ und di , nämlich die Verbesserung der angenommenen Länge des Knotens auf der Ecliptik und der Neigung gegen dieselbe, statt der auf den Aequator sich beziehenden ähnlichen Größen in die Rechnung einzuführen, so hat man statt der beiden letzten Formeln:

$$-f' \tan \frac{1}{2} i \cdot r \cos (F' + \nu) - \frac{(\rho)}{\rho} \Delta \cos f \cdot r \cos (\nu - n)$$

$$\text{und} \dots \dots \dots \frac{(\rho)}{\rho} \Delta \cos f \cdot r \sin (\nu - n)$$

Um die ähnlichen Differentialquotienten von η und ζ zu finden, werden f , F mit g , G und h , H vertauscht, allein es ist, wie ich schon bemerkt habe, unnöthig die letzteren zu berechnen. Die nicht von dem jedesmaligen Orte des Trabanten abhängigen Theile dieser Formeln können theils aus der oben erwähnten Ephemeride, theils aus ihr noch hinzuzufügenden Columnen genommen werden; bei einer Anwendung derselben Formeln auf eine im Raume feste Bahn sind diese Theile constant.

4.

Bei der Anwendung dieser Vorschriften auf meine Beobachtungen habe ich die gerade Aufsteigung, Abweichung

und Entfernung des Saturns aus *Enckes* Astronom. Jahrbuche genommen; die mittlere Entfernung desselben von der Sonne habe ich nach *Bouvarde*, dieser Ephemeride zum Grunde liegenden Tafeln, welche für 1800 $+t$:

die größte Entfernung = 10,078362 $+t$. 0,00001140

die kleinste ——— = 9,007118 $-t$. 0,00004814

also die mittlere ——— = 9,542740 $-t$. 0,00001937

und daher für 1830

$$(\rho) = 9,542189; \log(\rho) = 0,9796480$$

ergeben, angenommen. Die Beobachtungszeiten habe ich durch Hinzufügung von

$$-1^h 12' 39'' - \rho \cdot 493'',15$$

auf den Pariser Meridian und auf die Momente des Ausganges des Lichts von dem Planeten reducirt; die Berliner Ephemeride gilt für $11^h 15' 47'',4$ derselben Zeit.

Von den im ersten Art. mitgetheilten Beobachtungen habe ich alle diejenigen ausgeschlossen, welche durch die ihnen beigegeführten nachtheiligen Bemerkungen mehr oder weniger unsicher erscheinen; die übrigen haben, unter Annahme von $\lambda = 22^\circ 34' 37'',1861$ folgende Elemente ergeben:

Epöche 1830. Pariser Meridian $E = 125^\circ 3' 7'',7$

Perisaturnium $P = 243\ 37\ 43$

Excentricität $e = 0,02871743$

Mittlere Elongation $\Delta = 176'',62537$

Aufst. Knoten auf dem Aequator $N = 122^\circ 3' 27'',4$

Neigung gegen den Aequator . . $I = 6\ 42\ 13,3$

Aufst. Knoten auf der Ecliptik . . $n = 167\ 39\ 34,5$

Neigung gegen die Ecliptik . . . $i = 27\ 34\ 28,8$

Die Uebereinstimmung welche diese Elemente und die ihnen zum Grunde gelegten Beobachtungen gewähren ist folgende:

	Reducirte Zeit,	Berechnete		Fehler		
		x	y	x	y	
Jan. 12	7 35 15,0	-208,30	-18,89	-0,43	+0,24	R.
21	7 32 16,2	+187,94	+37,43	+0,08	+0,35	—
24	9 43 29,6	- 6,98	+53,23	-0,39	-0,04	—
25	7 24 41,9	- 78,80	+41,94	+0,35	-0,24	—
	9 7 48,0	- 84,18	+40,79	-0,42	-0,16	—
26	7 21 12,3	-146,36	+23,39	-0,16	0,00	—
Febr. 1	7 0 46,0	- 20,08	-57,89	-0,39	+0,23	—
	8 48 43,0	- 14,07	-57,34	+0,42	+0,61	—
6	6 54 24,5	+180,19	+39,73	+0,19	0,00	—
	7 37 25,5	+185,30	+40,27	-0,10	+0,57	—
15	6 48 27,2	-153,13	-56,63	-0,34	-0,05	—
16	6 48 2 3	- 88,85	-62,25	+0,25	+0,12	—
	7 7 6,3	- 87,89	-62,26	-0,18	0,00	P.
19	7 51 40,5	+137,79	-26,14	-0,05	+0,04	R.
März 1	6 26 39,0	-207,93	-25,13	-0,09	+0,09	—
	7 17 15,8	-207,82	-25,90	+0,19	-0,10	P.

	Reducirte Zeit	Berechnete		Fehler		
		x	y	x	y	
März 3	9 30 51,4	-139,88	-59,21	+0,03	-0,21	R.
	9 57 24,4	-137,80	-59,36	+0,29	-0,14	—
10	6 51 58,8	+175,51	+43,77	-0,24	+0,08	—
	7 41 4,7	+174,28	+44,36	+0,12	+0,43	—
14	5 37 54,2	- 94,28	+41,06	+0,58	-0,11	—
	5 57 16,2	- 95,22	+40,82	+0,02	-0,04	P.
	7 6 13,0	- 98,56	+39,95	-0,18	-0,10	—
	7 25 0,8	- 99,46	+39,71	+0,56	+0,48	R.
15	6 34 7,5	-157,52	+19,63	+0,32	+0,05	—
	6 34 34,5	-157,54	+19,63	-0,06	-0,22	P.
17	4 56 2,5	-203,91	-25,50	+0,07	+0,37	R.
	4 55 56,5	-203,91	-25,50	-0,20	+0,15	P.
	6 57 51,0	-203,50	-27,34	+0,07	+0,12	R.
	6 58 10,0	-203,49	-27,34	-0,09	-0,06	P.
April 5	8 34 22,9	- 59,39	-61,69	-0,20	-0,53	R.
	9 3 37,9	- 57,92	-61,65	-0,01	-0,06	—
18	7 8 56,8	-191,84	-28,94	+0,14	+0,39	—
	7 9 55,8	-191,83	-28,96	+0,06	+0,39	P.
24	6 43 47,4	+139,12	-20,01	+0,12	+0,06	R.
	6 43 41,4	+139,12	-20,01	+0,08	-0,21	P.
25	7 24 36,1	+174,06	+ 3,81	+0,05	-0,26	R.
	7 25 3,1	+174,07	+ 3,81	-0,04	-0,43	P.
26	7 9 18,0	+179,21	+26,05	+0,25	-0,16	R.
	7 9 0,0	+179,21	+26,04	+0,23	-0,45	P.
May 5	6 54 19,5	-163,00	-45,12	-0,11	+0,18	R.
	6 54 1,5	-163,01	-45,12	-0,18	-0,30	P.
6	6 30 20,4	-118,11	-55,19	-0,16	+0,07	R.
8	6 52 28,9	+ 14,91	-51,45	-0,04	-0,18	—
	6 52 7,9	+ 14,89	-51,46	+0,04	-0,29	P.
12	6 49 53,6	+173,95	+25,49	-0,26	-0,21	R.
	7 12 42,5	+173,79	+25,81	+0,09	+0,22	—
15	8 42 59,5	+ 30,41	+53,70	-0,30	-0,38	—
16	7 13 49,3	- 36,03	+46,48	-0,29	-0,48	—
	7 43 16,3	- 37,45	+46,25	+0,02	-0,11	—
18	6 42 8,5	-149,85	+13,06	+0,13	+0,20	—
	6 42 8,5	-149,85	+13,06	+0,26	-0,24	P.
20	8 18 28,1	-180,12	-28,88	+0,09	-0,65	R.
	8 35 4,0	-179,98	-29,09	+0,30	-0,18	—

Die ausgeschlossenen Beobachtungen habe ich gleichfalls mit den Elementen verglichen und dadurch folgendes erhalten:

	Reducirte Zeit,	Berechnete		Fehler		
		x	y	x	y	
Dec. 11	8 54 23,1	-199,07	-15,78	+0,36	+0,56	R.
Jan. 24	7 1 30,4	+ 2,21	+54,17	+0,43	-0,45	—
Febr. 2	7 10 32,2	+ 59,95	-46,51	+0,57	-0,28	—
	7 31 6,2	+ 61,04	-46,29	+0,08	+0,21	—
14	7 11 28,0	-195,14	-43,22	+1,28	+0,54	—
24	7 45 24,4	+ 62,17	+60,62	-0,01	-0,15	—
März 22	7 33 34,6	+ 80,92	-43,61	+0,54	-0,20	—
	7 34 49,6	+ 80,98	-43,60	-0,10	-0,18	P.
27	6 34 23,0	+119,26	+57,00	+0,28	+0,05	R.
April 5	8 35 21,9	- 59,34	-61,69	0,00	-0,85	P.
19	6 33 8,1	-169,60	-46,04	+0,40	+0,45	R.
	7 14 31,0	-168,58	-46,46	-0,29	-0,54	—
21	7 29 1,6	- 57,15	-59,89	+0,68	+0,22	—
	7 28 16,6	- 57,19	-59,89	+0,05	-0,02	P.

	Reducirte		Berechnete		Fehler		
	Zeit.		x	y	x	y	
	h	m					
April 27	7	50 39,7	+153,72	+44,54	+0,78	-0,06	R.
	7	50 47,7	+153,72	+44,54	+0,15	-0,29	P.
	29	6 50 5,5	+38,69	+56,45	+0,85	+0,33	R.
May 3	7	19 21,4	+37,22	+56,39	+0,48	+0,47	—
	3	7 16 56,7	-183,21	-8,12	+0,77	-0,22	—
	7	39 1,7	-183,45	-8,46	+0,36	+0,37	—
	8	0 33,6	-183,69	-8,78	+0,35	-0,12	—
	5	6 23 27,7	-163,75	-44,83	+0,39	+0,19	—
	6	23 34,7	-163,75	-44,83	+0,35	-0,06	P.
	8	8 4 50,5	+18,44	-50,94	+0,90	+0,20	R.
	8	5 25,5	+18,47	-50,93	+0,56	+0,06	P.
17	7 30 24,3	-101,70	+31,69	-0,16	-0,31	R.	
18	7 52 24,3	-102,60	+31,42	-0,01	-0,49	—	
	7 9 10,4	-150,60	+12,67	+0,20	-0,40	—	

Die Abweichungen dieser unzuverlässigen Beobachtungen von den Elementen sind allerdings größer als die sich bei den zuverlässigeren zeigenden; in den meisten ungünstigen Fällen hätte gar nicht beobachtet werden sollen und es würde auch wohl nicht geschehen sein, wenn die unter nicht ungünstigen Umständen mit dem Heliometer erreichbare Sicherheit schon so vor Augen gelegen hätte wie es jetzt, durch das erste Fehlerverzeichnis, der Fall ist. Inzwischen stimmen viele der unter ungünstigen Umständen gemachten Beobachtungen sehr nahe mit den Elementen überein: unter 56 Fehlern sind nur 13 eine halbe Secunde oder mehr betragende; einer ist darunter der eine ganze Secunde überschreitet, der sich aber an einem Tage findet an welchem der schlechte Zustand der Luft den Trabanten fast unsichtbar machte. — Wenn aber auch unter ungünstigen Umständen ein geringerer Grad von Sicherheit erreicht wird als unter günstigen, so hat das kraftvolle Instrument doch selbst dort so viel geleistet, daß ich ein Mikrometer welches unter günstigen Umständen eine gleiche Wirkung hervorgebracht hätte, früher für einen sehr werthvollen Besitz gehalten haben würde.

Aus den 108 Fehlern welche sich bei den 54 zuverlässigeren Beobachtungen finden, folgt die mittlere Abweichung der Elemente von jeder derselben = $\pm 0'',2656$, die wahrscheinliche = $\pm 0'',1791$. Der ersten Zahl gemäß habe ich den mittleren Fehler jedes der 6 Elemente berechnet:

$$\begin{aligned} dE &= 62'',2 \\ e dP &= 57,7 \\ d\epsilon &= 0,0001679 \\ d\Delta &= 0'',04513 \\ \sin I. dN &= 61'',8 \\ dI &= 56,3 \end{aligned}$$

Vor einigen Jahren hat Herr Schwabe in Dessau bemerkt, daß der Saturnsring nicht concentrisch mit dem

Planeten sei, und zwar so, daß nicht etwa bald die eine, bald die andere, sondern immer die östliche Anse sich weiter entferne als die westliche. *Harding* hat dieses gleichfalls so gesehen, und *Schumacher* nicht nur dasselbe, sondern auch noch dazu bemerkt, daß der innere Rand des Ringes auf der Ostseite fortwährend verwaschener erschien als der schärfer begrenzte auf der Westseite. *Struve* hat Messungen darüber angestellt und auch dadurch das was das Augenmaafs gezeigt hatte bestätigt gefunden. Endlich haben *Herschel* und *South* zwar durch ihre Messungen keinen Unterschied erkannt, halten aber denselben dennoch für augenscheinlich. Vergleicht man die Unterschiede der Elemente von meinen Beobachtungen, an den Tagen an welchen diese sowohl auf zwei Punkte am Ringe, als auch auf zwei Punkte am Saturn selbst gegründet wurden, so bemerkt man, daß die ersteren den Trabanten im Ganzen westlicher und südlicher ergeben haben als die letzteren: die Unterschiede an den einzelnen Tagen sind

		West	Öst	Süd
Febr. 16	0,43	West	0,12	Süd
März 1	0,28	Ost	0,19	—
14	0,56	West	0,07	Nord
	0,84	—	0,58	Süd
15	0,38	—	0,27	—
17	0,27	—	0,22	—
	0,16	—	0,18	—
April 18	0,08	—	0,00	—
24	0,04	—	0,27	—
25	0,09	—	0,17	—
26	0,02	—	0,29	—
May 5	0,07	—	0,48	—
8	0,08	Ost	0,11	—
18	0,13	—	0,44	—
Mittel....	0,17	West	0,23	Süd

Nach diesen Beobachtungen läge daher der Mittelpunkt der äusseren Begrenzung des Ringes östlich von dem des Planeten und es ginge aus ihnen eine Bestätigung der früheren Wahrnehmung hervor; allein diese Bestätigung ist nicht direct genug erlangt, um Zutrauen zu verdienen. — Es würde übrigens sehr interessant sein wenn man eine Excentricität des Ringes und die Art wie sie sich im Verlaufe der Zeit darstellen würde, sicher erkennen könnte: denn sie scheint mit unseren gegenwärtigen Ansichten von der Natur dieses Körpers nicht vereinigt werden zu können, sondern voraussetzen, entweder daß der Ring sich nicht um seine Axe drehe, oder daß er aus unzähligen, sich frei bewegenden Theilen bestehe, deren Bahnen eine gemeinschaftliche Apsidenlinie haben. Wenn die Beobachtungen nöthigen werden, eine Erklärung zu suchen, so wird die Theorie die Wahl derselben wahrscheinlich nicht zweifelhaft lassen. — Hier würde ich dieser Erscheinung nicht erwähnt

haben, wenn sie nicht Einfluss auf die Uebereinstimmung der Beobachtungen untereinander erhielte: Denn wenn man eine Excentricität des Ringes als unbekannte GröÙe in die Bedingungsgleichungen einführt, so muß die Uebereinstimmung der Beobachtungen nothwendig dadurch vermehrt werden.

5.

Die im vorigen Artikel erlangten Resultate beruhen auf der Voraussetzung, daß die Bewegung des Trabanten in einer festen und rein-elliptischen Bahn vor sich gehe. Der Theil der Störungen der Bewegung, welcher allein von der Anziehung der Sonne herrührt, kann leicht theoretisch bestimmt werden, enthält aber keine einigermaßen merkliche Glieder von so kurzer Periode, daß sie, während der Dauer einiger Monate, nicht als sich mit den Elementen vereinigend angesehen werden könnten. Die Anziehung der Ringe bringt eine Bewegung der Apsidenlinie hervor, welche aus den Beobachtungen erkannt werden muß, dann aber ein Datum zur Bestimmung der Masse der Ringe ergibt. Die Störungen welche die übrigen Trabanten erzeugen, sind von den unbekannten Massen derselben abhängig und daher gleichfalls unbekannt; daß sie, oder eigentlich ihre Glieder von kurzen Perioden, aber nicht beträchtlich sein können,

$$d\Delta = 0$$

$$dE = \frac{T'}{T} \cdot \frac{(1+e' \cos \Phi') d\Phi'}{\sqrt{(1-e'e')^3}} \left\{ -1 + \frac{3}{2} \sin i'^2 - \frac{3}{2} \sin i'^2 \cos 2u' + \frac{3}{2} [1 + ee - \sqrt{(1-ee)}] \right. \\ \left. [-1 + \frac{3}{2} \sin i'^2 - \frac{3}{2} \sin i'^2 \cos 2u' - \frac{3}{2} \sin i'^2 \cos 2\Gamma - 5 (\cos 2u' \cos 2\Gamma \frac{1+\cos i'^2}{2} + \sin 2u' \sin 2\Gamma \cos i')] \right\}$$

$$dP = \frac{T}{T'} \cdot \frac{\sqrt{(1-ee)} (1+e' \cos \Phi') d\Phi'}{\sqrt{(1-e'e')^3}} \cdot \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \sin i'^2 + \frac{3}{2} \sin i'^2 \cos 2u' + \frac{3}{2} \sin i'^2 \cos 2\Gamma \right. \\ \left. + 5 (\cos 2u' \cos 2\Gamma \frac{1+\cos i'^2}{2} + \sin 2u' \sin 2\Gamma \cos i') \right\}$$

$$de = \frac{T}{T'} \cdot \frac{\sqrt{(1-ee)} (1+e' \cos \Phi') d\Phi'}{\sqrt{(1-e'e')^3}} \cdot \frac{15}{4} e \left\{ \frac{1}{2} \sin i'^2 \sin 2\Gamma + \cos 2u' \sin 2\Gamma \frac{1+\cos i'^2}{2} - \sin 2u' \cos 2\Gamma \cos i' \right\}$$

$$di' = -\frac{T}{T'} \cdot \frac{(1+e' \cos \Phi') d\Phi'}{\sqrt{(1-ee)} \sqrt{(1-e'e')^3}} \sin i' \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{2} ee \cos i' \sin 2\Gamma - \frac{3}{2} ee \cos i' \sin 2\Gamma \cos 2u' + \sin 2u' (1 + \frac{3}{2} ee + \frac{3}{2} ee \cos 2\Gamma) \right\}$$

$$dn' = -\frac{T}{T'} \cdot \frac{(1+e' \cos \Phi') d\Phi'}{\sqrt{(1-ee)} \sqrt{(1-e'e')^3}} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \cos i' (1 + \frac{3}{2} ee - \frac{3}{2} ee \cos 2\Gamma) \right. \\ \left. - \cos 2u' \cos i' (1 + \frac{3}{2} ee - \frac{3}{2} ee \cos 2\Gamma + \frac{3}{2} ee \sin 2\Gamma \sin 2u') \right\}$$

Diese Ausdrücke sind in Beziehung auf die erste Potenz der Saturnsmasse und des Verhältnisses der Entfernungen vollständig. Die u' und Φ' nicht enthaltenden Theile derselben sind die Säcular-Bewegungen, welche man, unter Voraussetzung von

$$\begin{aligned} T &= 15,94545154 \\ T' &= 10759,25182 \\ e &= 0,02871743 \\ e' &= 0,05622557 \\ i' &= 26^\circ 13' 54'' \end{aligned}$$

und unter Annahme des Julianischen Jahres als Zeiteinheit, folgendermaßen findet:

geht aus der Uebereinstimmung hervor, in welche reinelliptische Elemente mit meinen Beobachtungen haben gebracht werden können; das unscheinbare Ansehen dieser Trabanten läßt auch unbedeutliche GröÙen und Massen derselben vermuthen.

Die Anziehung der Sonne erzeugt aber Aenderungen der Elemente, welche theils von den gegenseitigen Stellungen der Sonne und des Trabanten unabhängig, theils von der Länge des Saturns in seiner Bahn abhängig sind, und welche ich nun näher untersuchen muß, damit die gefundenen Elemente durch Bestimmung ihrer Säcularbewegungen und periodischen Aenderungen auf andere Zeiten übertragen werden können.

Wendet man außer den im 4ten Artikel gebrauchten Bezeichnungen der Elemente der Trabantenbahn, noch die folgenden an: siderische Umlaufszeit T , Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn auf der Saturnsbahn n' , Neigung beider gegeneinander i' , Entfernung des Perisaturniums vom Knoten Γ , des Saturns vom Knoten u' , Umlaufszeit, wahre Anomalie und Excentricität des Saturns T' , Φ' , e' , so erhält man diejenigen Theile der Differentiale der Elemente welche die Länge des Trabanten nicht enthalten:

$$\frac{dE}{dt} = -46,357 - 0,030 \cos 2\Gamma$$

$$\frac{dP}{dt} = +34,721 + 23,988 \cos 2\Gamma$$

$$\omega \cdot \frac{de}{dt} = +23,988 e \sin 2\Gamma$$

$$\frac{di'}{dt} = -0,040 \sin 2\Gamma$$

$$\frac{dn'}{dt} = -44,147 + 0,091 \cos 2\Gamma$$

Diese Formeln zeigen, dass die Ausdrücke aller 5 Elemente Ungleichheiten enthalten deren Argument 2Γ ist; die Größe derselben hängt von der Schnelligkeit ab mit welcher Γ sich ändert, wofür die Beobachtungen, für ein Jahr, etwa einen halben Grad ergeben werden. Diese Ungleichheiten können daher nur für die Lage der Apsidenlinie und die Excentricität einigermaßen merklich werden. Vernachlässigt man sie bei den übrigen Elementen, so wird die mittlere Neigung der Bahn beständig, die rückgängige Bewegung der Knotenlinie $= -44'',147$ jährlich; allein *Laplace* hat bemerkt, dass die Wirkungen der sphäroidischen Gestalt des Saturns und der Ringe die von der Sonne erzeugten Säcular-Aenderungen der Ebene der Bahn des *Hugenischen* Satelliten noch wesentlich vermindern können, so dass man nur berechtigt ist die jährliche Bewegung der Knotenlinie auf der Saturnsbahn $= -44'',147.k$ anzunehmen, wo k einen nicht 1 überschreitenden positiven Factor bedeutet, dessen Bestimmung nur die Vergleichung der Elemente mit älteren Beobachtungen ergeben kann, da die Grundlagen zu seiner theoretischen Bestimmung noch fehlen.

Die periodischen Glieder welche die Integration der Differentiale der Elemente giebt sind von den Winkeln $2u'$, $2u' - \varphi'$ und $2u' + \varphi'$ abhängig; nur die ersteren sind nicht in die Excentricität der Saturnsbahn multiplicirt, die Berechnung der beiden anderen hat kein Interesse, da sie, durch die Multiplication mit diesem Factor, für einen Beobachter auf der Erde unmerklich werden. Die von $2u'$ abhängigen haben, wenn man einen sehr kleinen, in $\sin \frac{1}{2}i'$ multiplicirten Theil derselben weglässt, folgende Werthe:

$$\begin{aligned} E & \dots - 45,0 \sin 2u' \\ P & \dots + 33,7 \sin 2u' + 517,9 \sin (2u' - 2\Gamma) \\ w.e & \dots + 14,9 \cos (2u' - 2\Gamma) \\ i' & \dots + 51,0 \cos 2u' \\ n' & \dots + 103,5 \sin 2u' \end{aligned}$$

Das von $\sin 2u'$ abhängige Glied von P erhält keinen bedeutenden Einfluss auf den Ort des Trabanten; auch alle übrigen Ungleichheiten können den Ort, von der Erde gesehen, nicht über ein Zehntel einer Secunde ändern. Allein dennoch dürfen sie nicht vernachlässigt werden, indem die mittleren Fehler, welche die Beobachtungen eines einzigen Jahres in den Elementen (Art. 4) übrig gelassen haben, nicht viel beträchtlicher sind als die sich mit denselben vereinigenden periodischen Störungen. Ich werde sie also zuerst anwenden um die aus den Beobachtungen unmittelbar hergeleiteten gestörten Elemente in mittlere zu verwandeln.

Die Zeit für welche die im 4^{ten} Art. erhaltene Bestimmung gilt, kann $= 1830,2$ gesetzt werden; für diese Zeit

ist die Länge des Saturns $= 136^\circ 8'$, $n' = 171^\circ 50'$, $u' = 144^\circ 18'$, $\Gamma = 71^\circ 19'$, und hiermit finden sich die mittleren Werthe der Elemente für 1830,2:

Epoche 1830	$E = 125^\circ 2' 25'',1$
Perisaturnium	$P = 243\ 33\ 80$
Excentricität	$e = 0,02877729$
Aufst. Knoten auf der Ecl. .	$n = 167\ 41\ 5$
Neigung	$i = 27\ 34\ 9,2$

6.

Unter den Säcular-Aenderungen dieser Elemente werde ich die, die Ebene der Bahn angehenden zuerst untersuchen, indem man diese fast unabhängig von den übrigen Elementen, aus der Vergleichung einiger älteren Wahrnehmungen erhalten kann.

Nimmt man die Länge des aufsteigenden Knotens der Saturnsbahn und ihre Neigung aus *Bouwards* Tafeln, nämlich für $1830,2 + t$:

$$\begin{aligned} 112^\circ 11' 35,1 - t . 19,369 + \text{Präcession} \\ 2\ 29\ 31,3 - t . 0,155 \end{aligned}$$

so findet man die jährlichen Aenderungen von n und i , bezogen auf die bewegliche Ecliptik:

$$= +50'',231 - 0'',686 \text{ und } -0'',780;$$

fügt man noch hinzu was aus der Bewegung der Trabantenbahn auf der Saturnsbahn hervorgeht, so erhält man folgende Formeln für die Zeit $1830,2 + t$:

$$\begin{aligned} n &= 167\ 41\ 5,0 + t [49,545 - k.42,024] + 98,9 \sin (2u' + 5^\circ 12') \\ i &= 27\ 34\ 9,2 + t [-0,780 + k.1,582] + 51,0 \cos (2u' + 4^\circ 11') \end{aligned}$$

Es sind drei ältere Beobachtungen vorhanden, welche benutzt werden können den Werth von k in gewisse Grenzen einzuschließen. Die sicherste von allen ist die des Vorüberganges des Schattens des Trabanten vor der Scheibe des Planeten, welchen *Herschel* am 2 Novbr. 1789 zu sehen das seltene Glück hatte. Eine andere ist von *Köhler*, welcher den Durchgang des Trabanten durch die kleine Axe der Ringellipse, am 12 Novbr. 1790 beobachtete und die sehr kleine Entfernung vom Rande des Planeten, in welcher er erfolgte, der Breite der Henkel, da wo sie an den Planeten anstossen, gleich fand. Die dritte ist vom 25 März 1715, wo *Cassini* II eine Bedeckung des Trabanten vom Planeten beobachtete und dabei angab, „dass derselbe mit dem 1^{sten} und 3^{ten} Trabanten und dem Schatten des Ringes, welcher „durch den Mittelpunkt des Saturns ging, nahe in gerader „Linie“ gewesen sei. Die letztere Angabe ist nicht so bestimmt ausgesprochen als man wünschen könnte; allein ihre, der Zeit nach beträchtliche Entfernung lässt selbst eine kleine Bewegung der Knotenlinie so stark hervortreten, dass auch

diese Angabe zur Ausmittlung der Grenzen, zwischen welchen k enthalten ist, beitragen kann.

Da diese Beobachtungen, so wie alle übrigen vorhandenen älteren Angaben, welche ich noch benutzen werde um die mittleren Bewegungen des Trabanten und der Apsidenlinie seiner Bahn daraus abzuleiten, sich auf die Ringellipse beziehen, so setzt ihre Berechnung die Kenntniss der Lage der Ringebene voraus. Die Länge der Knotenlinie dieser Ebene auf der Saturnsbahn habe ich früher, aus den Beobachtungen welche über die Verschwindungs- und Wiedererscheinungszeiten des Ringes, in den Jahren 1715, 1774, 1789 und 1803 gemacht sind, zu bestimmen gesucht; die Neigung aus eigenen, im Jahre 1818 gemachten Beobachtungen der Positionswinkel der Ansenlinie. Es hat sich jedoch die beträchtliche Schwierigkeit gefunden, daß sich keine Ebene angeben läßt, durch welche die Erde oder Sonne nicht einigemahle früher durchgegangen wären als der Ring verschwand, oder später als er wiedererschien. Dieses könnte nicht sein wenn der Ring ganz in einer Ebene läge; wenn es sich aber ereignet hat, so folgt daraus, daß nicht sowohl die Lage einer bestimmten Ringebene, als die Lage derjenigen Ebene welche den Erscheinungen am nächsten Genüge leistet und aus welcher die Theile des Ringes sowohl nach der einen, als nach der anderen Seite ausweichen, das Resultat der Beobachtungen sein kann. Die hierin liegende Unbestimmtheit ist zwar nicht geeignet, der folgenden, aus den angeführten Beobachtungen abgeleiteten Formel für die Länge des aufsteigenden Knotens n'' und die Neigung i'' der Ringebene zur Zeit $1800 + t$, großes Zutrauen zu erwerben *):

$$\begin{aligned} n'' &= 166^{\circ} 50' 41'' + 40''.65 \cdot t \\ i'' &= 28^{\circ} 22' 1'' - 0.38 \cdot t; \end{aligned}$$

allein die Unsicherheit dieser Formel scheint auch nicht beträchtlich größer zu sein als die Unbestimmtheit selbst. Wenigstens hat eine zahlreiche Reihe, im Jahre 1830 gemachter Beobachtungen der Positionswinkel der Ansenlinie eine nahe Bestätigung der Formel ergeben. Indessen wird der bevorstehende Durchgang des Saturns durch die Knotenlinie der Ringebene Veranlassung geben, durch die Anwendung jetzt vorhandener genügenderer Mittel die Lage der Ringe genauer zu bestimmen, weshalb ich auch aus den eben erwähnten neuen Beobachtungen nicht eher ein Resultat ziehen werde, als bis der Durchgang erfolgt und dadurch den Beobachtungen die wünschenswerthe Vollständigkeit gegeben sein wird. — Wenn man übrigens überlegt, worin der Einfluß der Lage der Ringebene auf die

Durchgangszeiten des Trabanten durch die kleine Axe der Ringellipse besteht, so bemerkt man leicht, daß derselbe sehr klein ist wenn der Ring sich wenig geöffnet zeigt, in welchem Falle allein die Schätzung dieser Durchgangszeiten durch das Augenmaß, mit einiger Sicherheit gemacht werden konnte. Es ist daher nicht zu fürchten, daß die sichereren unter den älteren Beobachtungen dadurch merklich an Werth verlieren, daß sie nicht auf die Declinations- oder Breitenkreise, sondern auf die Axen der Ringellipse bezogen sind.

7.

Ehe ich aus der Beobachtung des Schattenvorüberganges am 2 Novbr. 1789 Resultate ziehe, werde ich die Theorie solcher Erscheinungen entwickeln. Den Punkt der Planetenscheibe, an welchem der Schatten, von der Erde gesehen, erscheint, werde ich durch zwei sich auf die Axen der Ringellipse beziehende Angaben bezeichnen: nämlich durch den Winkel p , welchen ein auf die Ansenlinie senkrechter, durch den Schatten gelegter größter Kreis und ein ähnlich, durch den Mittelpunkt des Planeten gelegter einschließen und durch die Entfernung q des Schattens von der Ansenlinie; p werde ich positiv annehmen wenn der Schatten östlich, q wenn er nördlich vom Mittelpunkte erscheint.

Ich lege drei aufeinander senkrechte Ebenen durch den Mittelpunkt des Saturns: die Ebene des Ringes; die darauf und auf die Knotenlinie desselben mit der Ecliptik senkrechte; die auf diese beiden senkrechte. Diejenigen Pole dieser Ebenen, in deren Richtung die Coordinaten x, y, z eines Punktes positiv genommen werden, sind für die erste der nördliche, für die zweite der in den aufsteigenden Knoten des Ringes fallende, für die dritte der um einen Quadranten, nach der Ordnung der Zeichen von diesem entfernte. Die Coordinaten des Trabanten bezeichne ich durch x, y, z ; seines Schattens durch X, Y, Z ; der Sonne durch ξ, η, ζ ; der Erde durch ξ', η', ζ' .

Die Bedingung daß die Sonne, der Trabant und der Schatten in gerader Linie liegen, wird durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} X &= x - h(\xi - x) \\ Y &= y - h(\eta - y) \\ Z &= z - h(\zeta - z) \end{aligned} \right\} \dots \dots (a)$$

ausgedrückt, in welchen h die Entfernung des Schattens vom Trabanten, die Entfernung des letzteren von der Sonne als Einheit angenommen, bedeutet. Die Bedingung daß der Schatten auf der Oberfläche des Saturnsellipsoids liegt, dessen mit den drei Coordinatenaxen zusammenfallende Axen $2b, 2a, 2a$ sind, ist in der Gleichung

$$1 = \frac{XX}{aa} + \frac{YY}{aa} + \frac{ZZ}{bb} \dots \dots (b)$$

*) Astronomisches Jahrbuch für 1829.

enthalten, welche für h quadratisch ist, also zwei Werthe desselben ergibt, deren kleinster genommen werden muß, indem der Schatten auf der äußeren Oberfläche des Saturns liegt. Für eine gegebene Zeit, für welche die Coor-

$$\left. \begin{aligned} \rho'' \cos q \cos p &= \rho' - [X \cos(\lambda' - n'') + Y \sin(\lambda' - n'')] \cos \beta' - Z \sin \beta' \\ \rho'' \cos q \sin p &= X \sin(\lambda' - n'') - Y \cos(\lambda' - n'') \\ \rho'' \sin q &= -[X \cos(\lambda' - n'') + Y \sin(\lambda' - n'')] \sin \beta' + Z \cos \beta' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (c)$$

in welchen ρ'' die Entfernung des Schattens von der Erde, λ' und β' die auf die Ringebene bezogenen Länge und Breite der Erde bedeuten.

Will man die Momente des Eintritts und Austritts des Schattens, so wie sie von der Erde sichtbar werden, finden, so hat man den in (a) und (b) enthaltenen Bedingungen noch hinzuzufügen, daß die entweder von der Erde oder von der Sonne nach dem Schatten gezogene gerade Linie das Ellipsoid tangire. Das erstere, welches durch die Gleichung

$$1 = \frac{\xi' X}{aa} + \frac{\eta' Y}{aa} + \frac{\zeta' Z}{bb} \dots \dots \dots (d)$$

ausgedrückt wird, findet statt wenn der Schatten an dem erleuchteten Rande des Planeten erscheint; das andere, in der Gleichung

$$1 = \frac{\xi X}{aa} + \frac{\eta Y}{aa} + \frac{\zeta Z}{bb} \dots \dots \dots (e)$$

oder auch in der Bedingung, daß die beiden Werthe von h sich vereinigen, enthaltene, wenn er an der Lichtgrenze erscheint. Die eine oder die andere dieser Gleichungen verbunden mit (a) und (b), läßt, nach der Elimination von h , X , Y , Z , die gesuchte Gleichung zur Bestimmung des Anfanges oder Endes des Schattenvorüberganges übrig. Ob der Rand an welchem der Schatten erscheint der erleuchtete oder die Lichtgrenze ist, wird durch das Zeichen des Ausdrucks

$$\frac{X(\xi - \xi')}{aa} + \frac{Y(\eta - \eta')}{aa} + \frac{Z(\zeta - \zeta')}{bb}$$

angegeben: wenn X , Y , Z den Gleichungen (a), (b), (e) gemäß bestimmt werden, so deutet das positive Zeichen den erleuchteten Rand, das negative die Lichtgrenze an; wenn sie den Gleichungen (a), (b), (d) gemäß bestimmt werden, so ist es umgekehrt. Aus diesen Gleichungen zur Rechnung bequeme Vorschriften abzuleiten unterlasse ich, da dieselben im Verlaufe dieser Abhandlung nicht gebraucht werden; dagegen werde ich vollständiger entwickeln, wie Beobach-

daten x , y , z als bekannt angenommen werden, erhält man aus diesen Gleichungen X , Y , Z und hiermit p und q aus den Formeln:

tungen von der Art der *Herschelschen* vom 2 Novbr. 1789 zu berechnen sind wenn man eine Ortsbestimmung des Trabanten daraus ableiten will.

Ich werde annehmen, daß entweder p allein, oder p und q für ein Zeitmoment während der Dauer des Vorüberganges, bekannt geworden sind. Sie könnten durch Messungen gefunden werden, allein Schätzungen des Orts des Schattens, bezogen auf die sichtbare Begrenzung der Scheibe, können die Stelle derselben vertreten, so wie es bei der *Herschelschen* Beobachtung wirklich der Fall war. Die Formeln (c) ergeben den Ausdruck von p durch die Coordinaten des Schattens, ohne merklichen Fehler:

$$\rho' p = X \sin(\lambda' - n'') - Y \cos(\lambda' - n''),$$

Verbindet man dieses mit den Gleichungen (a), so erhält man:

$$\begin{aligned} N X &= (\xi y - \eta x) \cos(\lambda' - n'') + \rho' p (\xi - x) \\ N Y &= (\xi y - \eta x) \sin(\lambda' - n'') + \rho' p (\eta - y) \\ N Z &= (\xi z - \zeta x) \sin(\lambda' - n'') - (\eta z - \zeta y) \cos(\lambda' - n'') \\ &\quad + \rho' p (\zeta - z) \end{aligned}$$

wo N für

$$(\xi - x) \sin(\lambda' - n'') - (\eta - y) \cos(\lambda' - n'')$$

geschrieben ist. Diese Ausdrücke von X , Y , Z in die Gleichung (b) gesetzt, ergeben, wenn man ρ , λ , β für die Sonne und r , l , b für den Trabanten in derselben Bedeutung nimmt, welche ρ' , λ' , β' für die Erde haben, und wenn man die nicht merklich werdenden Glieder wegläßt:

$$\begin{aligned} \frac{aa}{rr} \left\{ \frac{\sin(\lambda' - \lambda)}{\cos b} - \frac{r}{\rho} \frac{\sin(\lambda' - l)}{\cos \beta} \right\}^2 &= \\ \left\{ \sin(l - \lambda) + \frac{\rho'}{r} p \cdot \frac{\cos(\lambda' - \lambda)}{\cos b} \right\}^2 &+ \left\{ \frac{\rho'}{r} p \cdot \frac{\sin(\lambda' - \lambda)}{\cos b} \right\}^2 \\ + \frac{aa}{bb} \left\{ \tan \beta \sin(\lambda' - l) - \tan b \sin(\lambda' - \lambda) - \frac{\rho'}{r} p \frac{\tan \beta}{\cos b} \right\}^2 \end{aligned}$$

Ferner erhält man, durch Substitution derselben Ausdrücke in die letzte der Formeln (c):

$$\begin{aligned} q &= \frac{r}{\rho'} \cdot \frac{\cos b \cos \beta'}{\sin(\lambda' - \lambda)} \left\{ -\tan \beta' \sin(l - \lambda) + \tan b \sin(\lambda' - \lambda) - \tan \beta \sin(\lambda' - l) \right\} \\ &\quad - p \cos \beta' \left\{ \tan \beta - \tan \beta' \cos(\lambda' - \lambda) \right\} \end{aligned}$$

Wenn man die Elemente der Bahn des Trabanten als bekannt annimmt, so gibt die erste Gleichung den Ort desselben in seiner Bahn, denn l, b, r hängen dann nur von diesem Orte ab; wenn r und l als bekannt angenommen werden, so erhält man aus der zweiten Gleichung b , und damit ein Datum zur Bestimmung der Länge des Knotens. Die erste Gleichung wird am leichtesten durch Näherungen aufgelöst: man sucht nämlich einen Näherungswert von l nach der Formel

$$\sin(l-\lambda) = \frac{a}{r} \sin(\lambda' - \lambda) - \frac{p'}{r} \cos(\lambda' - \lambda),$$

wobei man für r einen Näherungswert annimmt; dieses l und die bekannte Lage der Bahn ergeben b und die Länge in der Bahn, von welcher r abhängt, und hiermit kann man sämtliche Glieder der Gleichung in Rechnung bringen; die Convergenz dieses Verfahrens läßt in keinem Falle etwas zu wünschen übrig, indem die Breiten, immer wenn der Schatten vor der Planetenscheibe vorübergeht, sehr klein sind.

Wenn p nicht durch eine Messung bestimmt, sondern statt derselben die Conjunctionszeit des Schattens mit dem Mittelpunkt der Planetenscheibe angegeben ist, so ist p für diese Zeit nicht in aller Schärfe $= 0$, sondern es hat einen kleinen positiven oder negativen Werth, jenachdem der Planet von der Ostseite oder Westseite erleuchtet wird. Ich werde diesen Umstand bei der *Herschelschen* Beobachtung nicht vernachlässigen, weil es ein Interesse hat, diese Beobachtung, die nicht nur einzig in ihrer Art, sondern auch die schätzbarste unter den älteren Beobachtungen ist, ganz genau zu berechnen.

Die Zeit der Conjunction welche man beobachtet ist die Zeit des Durchganges des Schattens durch den Mittelpunkt des sichtbaren Theils der, der Auenlinie in der Entfernung q parallel gelegten Chorde; wenn die Werthe von p für die Endpunkte derselben p_1 und p_2 genannt werden, so ist also $p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$. Ich werde zuerst den in der Erleuchtungsgrenze liegenden Endpunkt bestimmen. Die Formeln (c) ergeben, wenn man durch X, Y, Z die Coordinaten eines in der Erleuchtungsgrenze liegenden Punktes der Saturnoberfläche bezeichnet:

$$p p_1 = X \sin(\lambda' - n'') - Y \cos(\lambda' - n'')$$

$$p' q = -(X \cos(\lambda' - n'') + Y \sin(\lambda' - n'')) \sin \beta' + Z \cos \beta';$$

ferner hat man, da der Punkt in der Erleuchtungsgrenze liegt, die Gleichung (e), und da er sich auf der Oberfläche des Planeten befindet, die Gleichung (b). Aus diesen vier Gleichungen wird, nach der Elimination von X, Y, Z die gesuchte Gleichung zwischen p und q gefunden. Um derselben die einfachste Gestalt zu geben, setzt man:

$$p \cos \beta = p_1 \cos \beta,$$

$$\frac{a}{b} p \sin \beta = p_1 \sin \beta,$$

$$p' \cos \beta' = p'_1 \cos \beta',$$

$$\frac{a}{b} p' \sin \beta' = p'_1 \sin \beta',$$

und ferner

$$\sin \beta, \sin \beta' + \cos \beta, \cos \beta' \cos(\lambda' - \lambda) = \cos d$$

$$\sin \beta, \cos \beta' - \cos \beta, \sin \beta' \cos(\lambda' - \lambda) = \sin d \cos \omega$$

$$\cos \beta, \sin(\lambda' - \lambda) = \sin d \sin \omega$$

endlich

$$p, \cos \omega - \frac{a}{b} q \cdot \frac{p'}{p_1} \sin \omega = u$$

$$p, \sin \omega + \frac{a}{b} q \cdot \frac{p'}{p_1} \cos \omega = v$$

und erhält dadurch:

$$\cos d^2 \left\{ \left(\frac{a}{p} \right)^2 - uu - vv \right\} = \left\{ v \sin d - \frac{aa}{p, p} \right\}^2$$

oder, ohne merklichen Fehler:

$$\left(\frac{a}{p} \right)^2 = \frac{vv}{\cos d^2} + uu$$

wodurch p , gefunden wird. Die am Rande der Planetenscheibe liegenden Punkte der Chorde ergeben sich aus der Gleichung:

$$\left(\frac{a}{p} \right)^2 = p, p_1 + \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{p'}{p_1} \right)^2 q q$$

Meistentheils wird der eine Endpunkt der Chorde am erleuchteten Rande, der andere in der Lichtgrenze liegen; es ist aber auch möglich daß beide die eine oder die andere Begrenzung haben. In Fällen wo hierüber ein Zweifel bleibt, kann die Entscheidung durch das oben angegebene Mittel erlangt werden.

8.

Die Conjunction des Trabantenschattens mit dem scheinbaren Mittelpunkte des Saturns ereignete sich, nach *Herschels* Beobachtung 1789 Nov. 2. 1^h 21' 51" St.Z. in Slough $= 10^h 43' 10''$ M.Z. in Paris, welches Moment 9^h 28' 50" reducirter Zeit entspricht, indem das Licht 1^h 14' 20" verwandte um von dem Trabanten zum Schatten und von diesem zur Erde zu gelangen. Den beobachteten Werth von p kann man, sobald q bekannt ist, nach der Vorschrift im vorigen Art. finden; q aber ist nicht unmittelbar von *Herschel* angegeben, sondern er beschreibt nur den Weg welchen der Schatten auf der Scheibe des Planeten nahm, durch eine Vergleichung desselben mit dem sichtbaren Aequatoralstreifen: 52' vor der Conjunction war der Schatten etwas nördlich von diesem Streifen, allein er näherte sich, während er fortschritt, der Mitte desselben und hatte sie zur Zeit der Conjunction erreicht.

Um hieraus die Entfernung zu erkennen, in welcher der Schatten bei dem Mittelpunkte des Planeten vorbeiging,

mufs man die Art wie dieser sich darstellte kennen lernen. Der heliocentrische Ort des Planeten ergibt sich aus *Bouwards* Tafeln:

$$351^{\circ} 32' 50'',6 - 2^{\circ} 9' 12'',4. \quad 0,9816958$$

der geocentrische:

$$346^{\circ} 44' 7'',3 - 2^{\circ} 18' 2'',3. \quad 0,9559934;$$

woraus, unter Anwendung der Lage der Ringebene nach der im 6ten Art. angeführten Formel, nämlich

$$n'' = 166^{\circ} 43' 48''; \quad i'' = 28^{\circ} 22' 5'',$$

die auf die Ringebene bezogenen Längen und Breiten der Sonne und Erde:

$$\lambda = 171^{\circ} 59' 28'',9, \quad \beta = -0^{\circ} 23' 24'',7$$

$$\lambda' = 167^{\circ} 49' 41'',8, \quad \beta' = +2^{\circ} 1' 18'',1$$

folgen.

Nimmt man die Halbmesser des Saturns, nach meinen Beobachtungen im Jahre 1830, für die mittlere Entfernung des Planeten,

$$a = 8'',503, \quad b = 7'',837$$

den äusseren Halbmesser des Ringes, gleichfalls nach meinen Beobachtungen = $19'',656$, den inneren nach den *Struve*-schen = $13'',374$, so zeigen die Breiten der Sonne und der Erde über der Ringebene, dass der Schatten des Ringes sich als ein dunkler Streifen projectirt haben mufs, dessen Ränder $0'',236$ und $0'',281$ südlich von der Ansenlinie lagen; die dunkle Seite des Ringes aber als ein ähnlicher Streifen, dessen beide Ränder $0'',498$ und $0'',732$ gleichfalls südlich lagen. Es hätte also eine doppelte dunkle Linie auf dem Saturn sichtbar sein sollen, allein *Herschels* Zeichnung giebt nur eine einfache in dem Aequatorealstreifen an, welche nicht genau durch die Mitte desselben, sondern dieser etwas südlich vorbeigeht; diese Linie ist ohne Zweifel die dunkle Seite des Ringes; der Schatten war wohl zu schmal um unterschieden werden zu können. Die Mitte der dunklen Seite des Ringes projectirte sich $0'',615$ südlich von der Ansenlinie und $0'',299$ südlich von dem Aequator des Planeten, welcher selbst sich $0'',316$ südlich von der Ansenlinie projectirte. Dieses stimmt, soweit man durch die Zeichnung beurtheilen kann, mit der Annahme, dass die Mitte des Aequatorealstreifens unter dem wahren Aequator des Planeten lag, völlig überein. und es scheint daher nicht dass diese Annahme einen beträchtlichen Irrthum erzeugen könne. Ich nehme daher $q = -0'',316$.

Dieser Werth von q ergibt, nach den Formeln des 7ten Art., für die in der Lichtgrenze und am erleuchteten Rande des Planeten liegenden beiden Endpunkte der Chorde:

$$p_1 = +8'',9496; \quad p_2 = -8'',9718$$

also

$$\rho = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) = -0'',0111.$$

Diese Beobachtung, so wie die beiden anderen im 6ten Art. angeführten gleichfalls zur Bestimmung der Bewegung der Knotenlinie anwendbaren, werde ich mit zwei Hypothesen über diese Bewegung vergleichen: die erste derselben setzt, in den Formeln für n und i (Art. 6) $k = 0$ voraus, die zweite $k = 1$. Die Entfernung des Trabanten vom Saturn r , welche als bekannt angenommen werden mufs um die Beobachtung, nach den im vorigen Art. gegebenen Formeln berechnen zu können, äußert so geringen Einfluss auf das Resultat, dass man, ohne beträchtlichen Fehler, die mittlere dafür setzen könnte; ich habe sie, durch die mittlere Entfernung des Trabanten gemessen, = $0,98166$ angenommen, übereinstimmend mit dem Werthe welchen die vollendete Untersuchung der Elemente ihr giebt. In beiden Hypothesen hat sich ergeben:

	I.	II.
l	$171^{\circ} 47' 28'',4$	$171^{\circ} 47' 28'',1$
b	$-15' 13,7$	$-28' 22,2$
Länge in der Bahn. ν =	$171^{\circ} 50' 23,3$	$171^{\circ} 53' 46,4$
q	$+0'',065$	$-0'',635$

Der Werth von q ist aus der Beobachtung = $-0'',316$ hervorgegangen; man erhält also, als Resultat derselben, die Gleichung

$$-0'',316 = +0'',065 - k \cdot 0'',700$$

An demselben Tage machte *Herschel* noch eine andere Beobachtung des Trabanten: $23^h 20' 51''$ St.Z. sah er eine Hervorragung am südlich vorgehenden Rande des Saturns, welche sich bald als der austretende Trabant zu erkennen gab, der $18'$ später von dem Planeten ganz getrennt erschien. Da die Beobachtung des Schattens den Ort des Trabanten an diesem Tage vollständig kennen gelehrt hat, so wird die des Austritts eine Bestimmung des Halbmessers des Saturns ergeben können. Da zu der Zeit wo *Herschel* den Trabant zuerst bemerkte, ein Theil desselben schon ausgetreten sein mufste, so mufs der Austritt des Mittelpunkts sich früher ereignet haben als in der Mitte zwischen dieser Zeit und der der völligen Trennung der Ränder; ich werde ihn $23^h 26' 51''$, oder $1^h 54' 41''$ M. Z. vor der Conjunctionszeit des Schattens annehmen.

Ein Eintritt des Trabanten in die Planetenscheibe, oder ein Austritt aus derselben findet statt, wenn die Gleichungen (a), (b), (c) des 7ten Art. erfüllt werden, jedoch mit dem Unterschiede, dass in denselben ξ', η', ζ' für ξ, η, ζ gesetzt werden. Diese Gleichungen, in bequeme Rechnungsvorschriften verwandelt, ergeben die Formeln:

$$\begin{aligned} \tan b &= \frac{a}{b} \tan b; & r &= r \frac{\cos b}{\cos b}, \\ \tan \beta' &= \frac{a}{b} \tan \beta'; & \rho' &= \rho' \frac{\cos \beta'}{\cos \beta'}, \\ \cos d &= \cos b, \cos \beta', \cos(l - l') + \sin b, \sin \beta', \\ \tan \frac{1}{2} d' &= \frac{\rho' + r}{\rho' - r} \tan \frac{1}{2} d \\ a &= r, \sin(\frac{1}{2} d + \frac{1}{2} d') \end{aligned}$$

Um die *Herschelsche* Beobachtung hiernach zu berechnen, muß die wahre Bewegung des Trabanten in der Zwischenzeit von 1^h 54' 41" M.Z., so wie auch r bekannt sein: ich finde beide aus dem Orte des Trabanten in seiner Bahn 1° 51' 50",7 und 0,98220 und hiermit, in beiden Hypothesen

$k = 0$	$k = 1$
$\circ \quad \circ \quad \circ$	$\circ \quad \circ \quad \circ$
$\nu \dots\dots 169 \ 58 \ 32,6$	$170 \ 1 \ 55,7$
$l \dots\dots 169 \ 55 \ 38,2$	$169 \ 55 \ 37,8$
$b \dots\dots -13 \ 44,7$	$-26 \ 52,4$

ferner

$$\lambda' = 167^\circ 49' 49'',0; \quad \beta' = +2^\circ 1' 15'',1; \quad \log \rho' = 0,95599;$$

endlich, unter der Annahme $a : b = 8'',503 : 7'',837$,
 $a = 9'',756$ und $10'',301$.

Will man die Beobachtung des Schattens vollständig darstellen, so geht aus dem dadurch erlangten Ausdrucke von q , $k = +0,544$ hervor, welchem Werthe $a = 10'',053$ entspricht.

Diese Bestimmung des Halbmessers des Saturns ist bedeutend größer als die mehlig $= 8'',503$ und auch als die *Struvesche* $= 8'',996$. Sie wird durch *Herschels* directe Messungen beider Halbmesser am 14^{ten} Sept. 1789 $= 22'',41^*$ und $20'',61$ unterstützt, woraus ich, für die mittlere Entfernung,

$$a = 10'',098; \quad b = 9'',287$$

erhalten habe. Das Verhältniß beider ist sehr nahe das von mir gefundene; die GröÙe derselben sehr nahe die aus dem Austritte des Trabanten gefolgerte. Man kann nicht mehr bezweifeln, daß *Herschel* den Saturn nicht allein größer gemessen, sondern wirklich auch größer gesehen hat, als die jetzigen Achromaten ihn zeigen; denn der einzige Zweifel gegen die Richtigkeit der Beobachtung des Austritts, welchen man geltend zu machen geneigt sein könnte, nämlich daß der in der Nähe des hellen Planetenrandes lichtschwach erscheinende Trabant zu spät gesehen worden sei, ist mit der Beschreibung welche *Herschel* von der Beobachtung giebt, nicht vereinbar: er sah den Trabanten sich

*) In den *Philos. Transact.* 1790. P. I. Pag. 17. steht $22'',81$; das wahre Mittel aus den vier einzelnen Messungen ist aber $22'',41$.

gewissermaßen von dem Rande des Planeten ablösen und erwähnt auch der Lichtschwäche nicht als störend, was ein so vortrefflicher und zuverlässiger Astronom nicht unterlassen haben würde, wenn sie ihm wirklich störend gewesen wäre. Die bekannte Erfahrung, daß verschiedene Fernröhre die Fixsterne in verschiedener GröÙe zeigen, scheint hiermit zusammenzuhängen; auch kann man für die Richtigkeit der neuen Messung, und gegen die der alten anführen, daß nicht denkbar ist, daß ein Fernrohr einen hellen Gegenstand auf dunkeltem Grunde kleiner zeige als er wirklich ist. Allein dagegen dringt sich die Frage auf, wie die feinsten dunklen Linien auf dem Ringe sichtbar bleiben können, mit einem Instrumente, welches jeden hellen Rand mehr als eine Sekunde weit in das Dunkle rückt? —

9.

Die zweite, oben angeführte Beobachtung, welche zur Erkenntnis der GröÙe von k beitragen kann, die *Köhlersche* vom 12 Novbr. 1790, verdanke ich der gütigen Mittheilung des Herrn von *Zach*. Der Durchgang des Trabanten durch die kleine Axe der Ringellipse ereignete sich 7^h 17' 32" M.Z. in Dresden $= 5^h 19' 32''$ reducirte Pariser Zeit; die Entfernung desselben vom Südpole des Saturns war der Breite der Projection des Ringes, da wo dieselbe an den Planeten anstieß, gleich. Diese Beobachtung ist mit erwünschter Aufmerksamkeit gemacht: *Köhler* verfolgte die Bewegung des Trabanten und bemerkte 5' 26" vor dem angegebenen Momente der Conjunction, daß dieselbe noch nicht erfolgt, so wie 3' 25" nach demselben, daß sie bereits vorüber war; auch machte er noch eine zweite Schätzung der Entfernung $= \frac{1}{3}$, höchstens $= \frac{1}{2}$ der Axe. Diese ist mit der ersteren ziemlich übereinstimmend, allein ich halte mich an jene, indem ich glaube daß sich sicherer beurtheilen läßt ob zwei GröÙen gleich sind, als welcher aliquote Theil der einen die andere ist. Endlich lasse ich nicht unerinnert, daß das Instrument womit *Köhler* beobachtete, den Planeten etwa von derselben GröÙe gezeigt haben müsse wie ich ihn mit dem Heliometer sehe, denn zwei Messungen der Axen gaben ihm $a = 8'',264$, $b = 7'',581$, nur so wenig von meiner Bestimmung verschieden, daß man aus nur zwei Beobachtungen nicht folgern darf, daß er den Planeten wirklich kleiner gesehen habe als ich.

Der geocentrische Ort des Saturns ist:

$$359^\circ 26' 31'',4. - 2^\circ 33' 0'',2. \quad 0,9453650;$$

für die Ringebene ergiebt die Formel im 6^{ten} Art.

$$\alpha'' = 166^\circ 44' 21''; \quad i'' = 28^\circ 22' 4''$$

und hiermit findet man

$$\lambda' = 179^\circ 8' 54'',7; \quad \beta' = -3^\circ 44' 23'',4,$$

also, da der Trabant in der Erdferne war

$$l = \lambda' + 180^\circ = 359^\circ 8' 54''{,}7.$$

In beiden Hypothesen $k = 0$ und $k = 1$ findet man, aus diesem Werthe von l :

$$\begin{array}{rcl} \nu & = & 359^\circ 11' 58''{,}7. \quad 359^\circ 15' 15''{,}9 \\ b & = & + 21\ 23{,}3. \quad + 34\ 5{,}0 \end{array}$$

und, wenn man $r = 1,01997$ annimmt, die Entfernung in welcher der Trabant bei dem Mittelpunkte des Planeten vorbeiging

$$- 11'',494 \text{ und } - 10'',776.$$

Der Polarhalbmesser erschien dagegen $= 8'',484$, die Hekelbreite $= 2'',496$; der Trabant hat also, der Beobachtung zufolge, die Entfernung $- 10'',980$ gehabt und man erhält durch dieselbe die Gleichung

$$- 10'',980 = - 11'',494 + k \cdot 0'',718.$$

Die dritte Beobachtung vom 25 März 1715 gehört wegen der von *Cassini* II dabei gemachten, im 6ten Art. angeführten Bemerkung hierher. Er sah $10^h 45' \text{ V. Z.}$ den Satelliten, welcher den Planeten zu berühren schien; darauf fing derselbe an, an Grösse abzunehmen, und um 11^h war er ganz vom Planeten verfinstert.

Das Mittel aus den beiden angegebenen Zeiten ist $10^h 58' 31'' \text{ M. Z.} = 9^h 48' 53''$ reducirte Zeit; der geocentrische Ort des Saturns

$$169^\circ 55' 35'',0. + 2^\circ 24' 36'',4. \quad 0,9279835;$$

für die Ringebene ist

$$n'' = 165^\circ 53' 15''; \quad i'' = 28^\circ 22' 33''$$

und hieraus folgt

$$\lambda' = 350^\circ 35' 7'',5; \quad \beta' = - 0^\circ 12' 13'',3.$$

Aus diesen Rechnungselementen erhält man den Punkt der Bahn welcher mit dem Mittelpunkte des Planeten in Conjunction war, in beiden Hypothesen,

$$170^\circ 36' 43''. \quad 170^\circ 46' 22''$$

Die Entfernung des Trabanten von diesem Punkte ist, dem Halbmesser des Planeten und dem hinreichend genau bekannten Werthe von $r = 0,97248$ zufolge $= - 2^\circ 50' 13''$; der hierdurch bestimmte Ort des Trabanten in seiner Bahn ergibt seine Breite über der Ringebene

$$b = - 7' 34'' \text{ und } - 44' 54''$$

und endlich seine Entfernung von der Ansenlinie

$$= - 1'',112 \text{ und } - 3'',211.$$

Das Ansehen welches Saturn an dem Tage dieser Beobachtung darboth, war dem für den 2ten Novbr. 1789 beschriebenen ähnlich; nur erschien, jetzt die dunkle Seite des Ringes sehr schmal, nur $0'',02$ breit und wurde daher nicht gesehen; dagegen war der Schatten des Ringes breiter $= 0'',092$, lag $0'',241$ südlich von der Ansenlinie und wurde

von *Cassini* mit einem Fernrohre von 114 Fuß Länge gesehen. Hätte er bestimmt angegeben, daß der Trabant am Ringschatten eingetreten sei, so würde man die Gleichung

$$- 0'',241 = - 1'',112 - k \cdot 2'',099$$

erlangen, welche, wegen der Grösse des Coefficienten von k , zur Bestimmung von k sehr schätzbar sein würde. Da er aber nur sagt, der Trabant sei nahe in der Schattenlinie gewesen, so schließt seine Angabe nur diejenigen Werthe von k aus, welche man mit dieser Aeusserung nicht vereinigen zu können glaubt. Man muß sehr bedauern, daß *Cassini* seiner seltenen Beobachtung, durch die Unterlassung der genauen Beschreibung derselben, den grössten Theil der Wichtigkeit, welche sie haben könnte, entzogen hat.

Außer diesen drei Beobachtungen finde ich in älteren Nachrichten nichts was zur Untersuchung der Knotenbewegung zugezogen werden könnte. Bezeichnet man durch s, s', s'' die Gröfsen bis auf welche ein angenommener Werth von k die drei Wahrnehmungen darstellt, so ergeben die drei entwickelten Gleichungen:

$$\begin{array}{l} s = + 0'',381 - k \cdot 0'',700 \\ s' = - 0,514 + k \cdot 0,718 \\ s'' = - 0,871 - k \cdot 2,099 \end{array}$$

Setzt man $k = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$, so erhält man in diesen vier Hypothesen die Werthe:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} s \dots & + 0'',381 & + 0'',148 & - 0'',086 & - 0'',319 \\ s' \dots & - 0,514 & - 0,275 & - 0,035 & + 0,204 \\ s'' \dots & - 0,871 & - 1,571 & - 2,270 & - 2,970 \end{array}$$

Die erste dieser Hypothese scheint mit den Beobachtungen von *Herschel* und *Köhler* unverträglich zu sein, die letzte paßt nicht zu der Angabe von *Cassini*, denn sie würde den Trabanten mehr als ein Drittel des Halbmessers des Planeten von dem Ringschatten entfernen; die dritte würde die beiden ersten Beobachtungen am nächsten darstellen, allein die zweite entfernt sich von ihnen auch nicht außer der Grenze ihrer Sicherheit und empfiehlt sich durch näheres Anschließen an die letzte Beobachtung. Ich habe daher der zweiten Hypothese den Vorzug gegeben und $k = \frac{1}{2}$ gesetzt. Sobald der Fehler dieser Schätzung anfangen wird, in künftigen genaueren Beobachtungen merklich hervorzutreten, wird man sie berichtigen können; ich glaube aber nicht, daß dieses in ein Paar Decennien der Fall sein wird.

Für $k = \frac{1}{2}$ wird die Formel für die Lage der Bahn im 6ten Art., wenn man die Zeit t von 1830 arechnet

$$\begin{array}{l} n = 167^\circ 40' 57''{,}9 + t \cdot 35''{,}537 + 98''{,}9 \sin(2u' + 5^\circ 12') \\ i = 27\ 34\ 9{,}3 - t \cdot 0,253 + 51,0 \cos(2u' + 4\ 11) \end{array}$$

Es folgen hieraus die Ausdrücke der Länge des Knotens der Trabantenbahn auf der Saturnsbahn (n'), der Neigung gegen dieselbe (i') und der Entfernung der Saturnsbahn von der Ecliptik auf der Trabantenbahn gemessen (ω):

$$\begin{aligned} n' &= 171^\circ 49' 48'' 0 + t \cdot 35'' 515 + 103'' 5 \sin 2u' \\ i' &= 26 \ 13 \ 53,9 + 51'' 0 \cos 2u' \\ w &= 4 \ 38 \ 58,7 - t \cdot 0'' 919 - 7'' 9 \cos 2u' + 5'' 5 \sin 2u' \end{aligned}$$

10.

Es sind nun noch zwei Elemente zu bestimmen, nämlich die mittlere Bewegung des Trabanten und die Bewegung der Apsidenlinie seiner Bahn. Ich werde zuerst das was die Theorie über die letztere und die Veränderung der Excentricität ergeben hat weiter entwickeln.

Wenn man dem im 5^{ten} Art. angegebenen Ausdrucke des von den Längen der Sonne und des Trabanten unabhängigen Theils der Bewegung der Apsidenlinie, die jährliche Vorrückung der Nachtgleichen hinzufügt, oder P auf den beweglichen Nachtgleichenpunkt bezieht, so wird dieser Ausdruck:

$$\frac{dP}{dt} = + 84'',952 + 23'',988 \cos 2\Gamma$$

wo Γ die Entfernung des Perisaturniums des Trabanten von dem aufsteigenden Knoten seiner Bahn auf der Saturnsbahn, also $= P - n - w$, und nach der im vorigen Art. erlangten Bestimmung von n und w , für 1830,2 + t

$$= P - 172^\circ 20' 3'',7 - t \cdot 35'',518$$

ist. Der durch diese Formel ausgedrückten Wirkung der Sonne auf die Apsidenlinie kömmt noch das hinzu, was aus den Anziehungen hervorgeht, welche der Trabant von der sphäroidischen Gestalt des Saturns, von den Ringen und von den übrigen Trabanten erfährt. Dieses ist eine unbekannte beständige Größe, das eine der noch zu suchenden Elemente; ich werde die Bezeichnung α dafür anwenden. Man hat also

$$\frac{dP}{dt} = \alpha + 84'',952 + 23'',988 \cos 2\Gamma$$

oder

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \alpha + 49'',434 + 23'',988 \cos 2\Gamma$$

wofür ich, um abzukürzen,

$$\alpha + \beta \cos 2\Gamma$$

schreiben werde.

Wenn man den Werth von Γ für 1830,2 durch Γ' bezeichnet, und

$$\tan \psi = \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} \cdot \tan \Gamma$$

$$\tan \psi' = \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} \cdot \tan \Gamma'$$

setzt, so ist das Integral der Gleichung für Γ

$$\psi = \psi' + t \sqrt{(\alpha - \beta)\beta}$$

oder

$$\tan \Gamma = \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}} \cdot \tan [\psi' + t \sqrt{(\alpha - \beta)\beta}].$$

Verwandelt man diesen Ausdruck in die Reihe

$$\Gamma = \psi' + \alpha' t + \beta' \sin 2(\psi' + t\alpha') + \frac{1}{2}\beta'^2 \sin 4(\psi' + t\alpha') + \text{etc.}$$

in welcher α' und β' für

$$\sqrt{(\alpha - \beta)\beta} \quad \text{und} \quad \frac{\beta}{\alpha + \alpha'}$$

geschrieben sind, so ist für einen so großen Werth von α wie die Beobachtungen ergeben, die Convergenz derselben so groß, daß man die in das Quadrat und die höheren Potenzen von β' multiplicirten Glieder vernachlässigen kann; hierdurch wird sie für die Anwendung bequemer als der endliche Ausdruck. Setzt man für Γ seinen Ausdruck durch P , so erhält man

$$P = \psi' + 172^\circ 20' 3'',7 + t(\alpha' + 35'',518) + \beta' \sin 2(\psi' + \alpha' t);$$

der im 5^{ten} Art. gegebene Werth von P für 1830,2 ergibt

$$\Gamma' = 71^\circ 13' 26'',3; \quad \tan \psi' = \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} \cdot \tan \Gamma'.$$

Der Differentialquotient der Excentricität ist, dem 5^{ten} Art. zufolge,

$$w \cdot \frac{de}{dt} = + 23'',988 \cdot e \sin 2\Gamma$$

Diese Gleichung mit e dividirt und mit

$$dt = \frac{d\Gamma}{\alpha + \beta \cos 2\Gamma}$$

multiplicirt ergibt

$$w \cdot \frac{de}{e} = \frac{\beta \sin 2\Gamma \cdot d\Gamma}{\alpha + \beta \cos 2\Gamma}$$

wovon das Integral

$$e = e' \sqrt{\frac{\alpha + \beta \cos 2\Gamma'}{\alpha + \beta \cos 2\Gamma}} = e' \frac{\cos \Gamma'}{\cos \psi'} \cdot \frac{\cos \psi}{\cos \Gamma}$$

ist, und e' den Werth der Excentricität für 1830,2 = 0,02877729 bedeutet. Auch statt dieses Ausdrucks kann man den Anfang seiner Reihenentwicklung, nämlich

$$e = e' \cdot \frac{\cos \Gamma'}{\cos \psi'} (1 + \beta' + \frac{1}{2}\beta'\beta') [1 - \beta' \cos 2(\psi' + \alpha' t)]$$

mit demselben Rechte wie oben anwenden.

Ich werde nun die Ausdrücke sämtlicher Elemente und der Argumente von welchen ihre Ungleichheiten abhängen sammeln, und zugleich die allgemeine, aus der Bewegung der Ebene der Bahn hervorgehende Veränderung der Längen, nämlich

$$+ 10'',9 \sin 2u' + 1'',0 \cos 2u'$$

den Ausdrücken der mittleren Länge und der Länge des Perisaturniums hinzufügen:

Epoche 1830 $125^{\circ}2'25''; 1 - 34',1 \sin(2u' - 1^{\circ}41')$
 Perisaturnium $\psi + 172^{\circ}20'3'',7 + \epsilon(\alpha' + 35'',518) + \beta' \sin 2\Gamma$
 $+ 44'',6 \sin(2u' + 1^{\circ}17') + 517'',9 \sin(2u' - 2\Gamma)$
 Excentricität $0,02877729 \frac{\cos \Gamma'}{\cos \psi} (1 + \beta + \frac{1}{2}\beta\beta') (1 - \beta \cos 2\Gamma)$
 $+ 0,00007224 \cos(2u' - 2\Gamma)$
 Knoten $167^{\circ}41'50'' + \epsilon.35''537 + 98''9 \sin(2u' + 5^{\circ}12')$
 Neigung $27^{\circ}34'9''2 - \epsilon.0''253 + 51''0 \cos(2u' + 4^{\circ}11')$
 $\alpha = \alpha + 49'',434; \beta = 23'',988$
 $\alpha' = \sqrt{(\alpha\alpha - \beta\beta)}; \beta' = \frac{\beta}{\alpha + \alpha'}$
 $\Gamma' = 71^{\circ}13'26'',3; \tan \psi = \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} \cdot \tan \Gamma'$
 $\Gamma = \psi + \alpha't; u' = h - 171^{\circ}50' - \epsilon.35''515$

Die bequemste Art den Einfluss der periodischen Theile dieser Ausdrücke in Rechnung zu bringen, besteht darin dass man dem Logarithmen des Radiusvectors und der Länge in der Bahn die daraus entstehenden Veränderungen hinzufügt und die Breite des Trabanten über der mittleren Ebene seiner Bahn berücksichtigt. Man erhält auf diese Art:

$$\delta \log r = \frac{0,43429}{2 \cdot \omega} m \cos(M + \Phi)$$

$$\delta \nu = -45'',0 \sin 2u' - m \sin(M + \Phi)$$

$$\delta b = m' \sin(M + \Phi)$$

wo

$$m \sin M = 2\beta'e \sin 2\Gamma + 29'',8 \sin(2u' - 2\Gamma) + 157'',4 e \sin 2u'$$

$$m \cos M = 2\beta'e \cos 2\Gamma - 29'',8 \cos(2u' - 2\Gamma)$$

$$m' \sin(M' - \Gamma) = -45'',7 \sin 2u'$$

$$m' \cos(M' - \Gamma) = +51'',0 \cos 2u'$$

gesetzt worden sind. Die Werthe der hier eingeführten m, M, m', M' ändern sich sehr langsam, weshalb es, wenn man mehrere in einer Periode der Sichtbarkeit des Planeten gemachte Beobachtungen zu vergleichen hat, vortheilhaft ist, diese Größen für gewisse Zeiten, z. B. für jeden 100ten Tag, vorher zu berechnen. Will man aber für die Knotenlinie und Neigung ihre gestörten Werthe in die Rechnung bringen um dagegen keine Breitenstörung berechnen zu dürfen

$$\cos b \sin(l - \lambda') = \cos \delta b [\cos I \sin(\nu - n - a) \cos(\lambda' - n'' - a') - \cos(\nu - n - a) \sin(\lambda' - n'' - a')] - \sin \delta b \cdot \sin I \cos(\lambda' - n'' - a')$$

und ferner, ohne merklichen Fehler

$$(\rho \mp r) \frac{p}{r} = \sin(\lambda' - n'' - a) \cos(\nu - n - a) - \cos(\lambda' - n'' - a) \sin(\nu - n - a) \cos I + \cos(\lambda' - n'' - a') \sin I \cdot \delta b$$

Da die Neigung der Trabantenbahn gegen die Ringebene sehr klein, beträchtlich unter einem Grade ist, so ist es am bequemsten ν indirect zu berechnen. Setzt man, für den Fall dass der Trabant sich zwischen der Erde und dem Saturn befindet

$$\nu - n - a = \lambda' - n'' - a' + z,$$

fen, so muß man das erste Glied von $\delta \nu$ nicht $-45'',0 \sin 2u'$, sondern $-34'',1 \sin(2u' - 1^{\circ}41')$ setzen.

11.

Die älteren Beobachtungen, durch welche die Bestimmungen der mittleren Bewegung und der Constante α erlangt werden können, bestehen meistens in Angaben der Zeiten der Conjunction des Trabanten, entweder mit dem Mittelpunkte, oder mit einem anderen in der Ansenlinie liegenden Punkte des Planeten oder seines Ringes. Der Anführung der zu diesen Bestimmungen angewandten Beobachtungen lasse ich die Vorschrift zu ihrer Berechnung vorangehen.

Wenn man in den Formeln (c) des 7ten Art. für X, Y, Z die Coordinaten x, y, z des Trabanten setzt, so ist p die auf der Ansenlinie gezählte Entfernung des Punktes mit welchem der Trabant in Conjunction ist, von dem Mittelpunkte des Planeten. Man hat also, nachdem man x, y, z durch r, l, b ausgedrückt hat,

$$\tan p = \frac{-r \cos b \sin(l - \lambda')}{p - r [\cos \beta' \cos b \cos(l - \lambda') + \sin \beta' \sin b]}$$

woraus ν , die Länge des Trabanten in der Bahn, zu finden ist. Der Nenner dieses Ausdrucks ist, jenachdem der Trabant sich zwischen der Erde und dem Saturn, oder über diesen hinaus befindet, hinreichend nahe $= p' - r$ oder $= p' + r$, weshalb der Ausdruck

$$(\rho \mp r)p = -r \cos b \sin(l - \lambda')$$

geschrieben werden kann. Bezeichnet man die Entfernung des aufsteigenden Knotens der mittleren Ebene der Trabantenbahn auf der Ringebene von dem aufsteigenden Knoten der ersteren auf der Ecliptik durch a , die Entfernung desselben Punktes von dem aufsteigenden Knoten der letzteren auf der Ecliptik durch a' , die Neigung beider Ebenen gegeneinander durch I , so hat man

$$\cos b \cos(l - n'' - a') = \cos \delta b \cos(\nu - n - a)$$

$$\cos b \sin(l - n'' - a') = \cos \delta b \sin(\nu - n - a) \cos I - \sin \delta b \cdot \sin I$$

und hieraus

$$\cos b \sin(l - \lambda') = \cos \delta b [\cos I \sin(\nu - n - a) \cos(\lambda' - n'' - a') - \cos(\nu - n - a) \sin(\lambda' - n'' - a')] - \sin \delta b \cdot \sin I \cos(\lambda' - n'' - a')$$

für den Fall dass er jenseits des Saturns steht

$$\nu - n - a = 180^{\circ} + \lambda' - n'' - a' + z$$

so erhält man

$$\sin z = \mp (\rho \mp r) \frac{p}{r} + \cos \Lambda \sin(\Lambda + z) \cdot 2 \sin \frac{1}{2} I^2 \pm \cos \Lambda \sin I \cdot \delta b$$

wo A für $\lambda' - n'' - a'$ geschrieben ist und die oberen Zeichen dem ersten, die unteren dem zweiten Falle gemäß sind.

Zur Berechnung von a , a' , I dienen die *Gauß'schen* trigonometrischen Formeln:

$$\sin \frac{1}{2} I \sin \frac{1}{2} (a' + a) = \sin \frac{1}{2} (n - n'') \sin \frac{1}{2} (i + i'')$$

$$\sin \frac{1}{2} I \cos \frac{1}{2} (a' + a) = \cos \frac{1}{2} (n - n'') \sin \frac{1}{2} (i - i'')$$

$$\cos \frac{1}{2} I \sin \frac{1}{2} (a' - a) = \sin \frac{1}{2} (n - n'') \cos \frac{1}{2} (i + i'')$$

$$\cos \frac{1}{2} I \cos \frac{1}{2} (a' - a) = \cos \frac{1}{2} (n - n'') \cos \frac{1}{2} (i - i'')$$

allein die folgende Tafel überhebt der Mühe der Rechnung in jedem vorkommenden Falle:

	$n + a$	$n'' + a'$	$n + a - n'' - a'$	I
	° ' "	° ' "	+ ' "	' "
1670	322 42 42	322 37 36	+ 5 5,6	52 10,9
1680	323 12 48	323 7 48	4 59,6	52 0,4
1690	323 43 4	323 38 10	4 53,6	51 50,1
1700	324 13 29	324 8 41	4 47,7	51 39,9
1710	324 44 4	324 39 22	4 41,7	51 29,9
1720	325 14 48	325 10 12	4 35,7	51 20,0
1730	325 45 41	325 41 11	4 29,7	51 10,2
1740	326 16 43	326 12 19	4 23,7	51 0,6
1750	326 47 54	326 43 37	4 17,7	50 51,4
1760	327 19 15	327 15 4	4 11,7	50 42,0
1770	327 50 44	327 46 39	4 5,7	50 32,9
1780	328 22 23	328 18 23	3 59,7	50 24,0
1790	328 54 10	328 50 16	3 53,7	50 15,2
1800	329 26 6	329 22 18	3 47,8	50 6,6
1810	329 58 10	329 54 28	3 41,8	49 58,2
1820	330 30 23	330 26 47	3 35,8	49 50,9
1830	331 2 45	330 59 15	3 29,8	49 41,9
1840	331 35 15	331 31 51	3 23,8	49 34,0
1650	332 7 53	332 4 35	3 17,8	49 26,2

Man kann indessen nicht alle älteren Beobachtungen deren Kenntniss auf uns gekommen ist, als sichere Grundlagen der Bestimmung der noch zu suchenden beiden Elemente ansehen. Nach der Bemerkung im 8ten Art., welche durch die *Herschelsche* Beobachtung des Austritts des Trabanten aus der Planetenscheibe veranlaßt worden ist, können nur Conjunctionen mit dem Mittelpunkte des Planeten eine sichere Ortsbestimmung des Trabanten ergeben; Conjunctionen mit einem Rande aber nicht, weil es zweifelhaft bleibt welche Werthe der Halbmesser anzuwenden sind. Ein Unterschied von der Größe wie er sich zwischen der *Herschelschen* Bestimmung und der meinigen findet, hat einen Einfluß von etwa einem halben Grade auf die Länge des Trabanten und diese Unsicherheit kann nicht eher vermieden werden, als bis man die Ursache derselben vollständig kennen gelernt haben wird. Auch ist zu vermuthen, daß Conjunctionen mit dem Mittelpunkte, indem sie eine in Beziehung auf die Figur des Planeten symmetrische Erscheinung sind, sicherer wahrgenommen werden können, als nicht symmetrische Conjunctionen mit einem der Ränder. Allein

nicht einmahl alle Conjunctionen mit dem Mittelpunkte können als sicher beobachtet angenommen werden, denn wenn die kleine Axe der Ellipse der scheinbaren Trabantenbahn sich ihrem Maximo nähert, so wird die Entfernung vom Planeten, in welcher der Trabant in Conjunction kömmt, so groß, daß das Augenmaß alle Sicherheit verliert; hiervon habe ich mich durch eigene Versuche mehreremale überzeugt.

Ich habe zehn ältere Beobachtungen der Durchgangszeiten des Trabanten durch die kleine Axe der Ringellipse vorgefunden, allein drei derselben, welche in den Jahren 1691, 1704, 1706 gemacht sind, sind wegen der großen Oeffnung der Ellipse unsicher, so daß nur sieben übrig bleiben. Die beiden ersten derselben sind von *Edmund Halley*:

$$1682 \text{ Decbr. 1. } 19^h 0' \text{ W. Z.} = 18^h 59' 30'' \text{ M. Z. Paris}$$

$$1683 \text{ Febr. 19. } 8 10 \text{ —} = 8 33 42 \text{ —}$$

Die 3te und 4te sind von *Cassini I*:

$$1685 \text{ May 21. } 10^h 56'$$

$$1687 \text{ März 7. } 12 8$$

sie werden von *Cassini II* in den Pariser Mémoires für 1716 mitgetheilt, ohne daß er sagt in welcher Zeitart diese Angaben zu verstehen sind. Allein da er sie nur anführt um die Richtigkeit seiner Tafeln, mit welchen er sie unmittelbar vergleicht zu bestätigen, auch zwei in wahrer Zeit angegebene Beobachtungen, desselben Zwecks wegen, von dieser auf mittlere Zeit reducirt, so scheint die letztere verstanden werden zu müssen. Die 5te Beobachtung ist von *Cassinil*:

$$1714 \text{ Febr. 11. } 10^h \text{ W. Z.}$$

welches Moment er selbst $= 10^h 14' 53''$ M. Z. angiebt. Die 6te und 7te endlich sind die schon im 8ten und 9ten Art. zur Bestimmung der Bewegung der Knotenlinie angewandten von *Herschel* und *Köhler*. Diese Beobachtungen sind sämmtlich bei kleinen, oder wenigstens nicht sehr störenden Oeffnungen der Ringellipse gemacht; am größten waren die Entfernungen des Trabanten bei den beiden ersten Beobachtungen, nämlich 33'' und 41'' vom nächsten Rande des Planeten, allein wenn auch nicht zu bezweifeln ist, daß kleinere Entfernungen eine größere Sicherheit erreichbar gemacht haben würden, so glaube ich doch, daß man eine Conjunction in jener Entfernung noch ziemlich sicher beobachten kann. Von einem *Halley* ist überdies zu erwarten, daß er Unbefriedigendes nicht liefere.

Die Berechnung dieser Beobachtungen hat Folgendes ergeben:

	Reducirte Zeit.	Des Planeten Länge.	geocentr. Breite.	Log. der Entfernung.
1682 Dec. 1	17 47 22	140 25 30	+1 3 3	0,9432988
1683 Febr. 19	7 26 34	135 51 31	+1 15 2	0,9150543
1685 May 21	9 40 27	160 26 53	+2 6 43	0,9634257
1687 März 7	10 56 35	191 2 8	+2 42 5	0,9389293
1714 Febr. 11	9 6 7	159 5 42	+2 0 56	0,9225156
1789 Nov. 2	9 28 59	346 44 7	-2 18 2	0,9559934
1790 Nov. 12	5 19 32	359 26 31	-2 33 0	0,9453650

Die beiden letzten Beobachtungen sind oben schon berechnet worden und man hat den im 8ten und 9ten Art. angeführten, für $k = \frac{1}{3}$ zu nehmenden Längen in der Bahn nur die Verbesserung $-10'',9 \sin 2u' - 1'',0 \cos 2u'$ hinzuzufügen, um sie auf die mittlere Ebene der Bahn zu beziehen; für die fünf ersten findet man die auf die Ringebene bezogenen Oerter der Erde:

	λ'	β'
1682	323 35 58,0	- 12 34 28,2
1683	319 27 23,0	- 14 44 16,7
1685	342 3 43,0	- 4 16 55,6
1687	9 30 14,0	+ 9 21 41,7
1714	340 51 34,2	- 4 59 31,5

und endlich erhält man die beobachteten Längen des Trabanten in seiner Bahn:

	Reducirte Zeit.	Länge in der Bahn.
1682 Decbr. 1	17 47 22	143 40 55
1683 Febr. 19	7 26 34	139 32 19
1685 May 21	9 40 27	342 8 47
1687 März 7	10 56 35	9 35 21
1714 Febr. 11	9 6 7	340 56 18
1789 Nov. 2	9 28 50	171 51 30
1790 Nov. 12	5 19 32	359 12 59

12.

Um aus diesen Beobachtungen die mittlere Bewegung und den Werth von x zu erkennen, habe ich drei Hypothesen für x gemacht, nämlich $1700''$, $1750''$ und $1800''$, in jeder derselben die Länge des Perisaturniums, die Excentricität und die Ungleichheiten der Bewegung, nach den Formeln des 10ten Art. berechnet und hierdurch die beobachteten wahren Längen in mittlere verwandelt; ferner habe ich die mittleren Längen unter Annahme des im 5ten Art. gegebenen Werthes der Epoche, und der Bewegung in einem Julianischen Jahre

$$= 22 \text{ Rev.} + 326^\circ 14' 52'' 232 + x$$

berechnet und dadurch folgende Gleichungen erhalten:

	Hypoth. $x = 1700''$	1750''	1800''
1682	147,28 $x = +26' 45,8$	+ 32' 58,8	+ 39' 17,7
1683	147,06 $x = +48' 18,0$	+ 54' 16,8	+ 60' 22,4
1685	144,82 $x = +45' 21,5$	+ 38' 23,0	+ 31' 22,3
1687	143,02 $x = +54' 36,5$	+ 47' 58,7	+ 41' 25,8
1714	116,08 $x = +7' 57,3$	+ 2' 49,3	- 2' 22,8
1789	40,38 $x = +10' 46,8$	+ 11' 59,5	+ 13' 12,8
1790	39,33 $x = +10' 35,2$	+ 9' 14,9	+ 7' 53,6

Diese Gleichungen zeigen, daß die Beobachtung von 1714 mit den übrigen im Widerspruche ist: man kann ihr die Elemente nicht bis zu der Grenze nähern, innerhalb welcher die Conjunction, indem sie sich bei kleiner Oeffnung der Ringellipse ereignete, sicher beobachtet werden konnte, ohne dieselbe Grenze bei den übrigen Beobachtungen beträchtlich zu überschreiten. Da man sich also entweder mit einer unbefriedigenden Darstellung aller Beobachtungen begnügen, oder die von 1714 ausschließen muß, so habe ich das letztere vorgezogen. Den beiden, mit vorzüglicher Aufmerksamkeit und unter den günstigsten Umständen gemachten Beobachtungen von 1789 und 1790 habe ich dreifache Genauigkeit zugeschrieben und auf diese Art, in den drei Hypothesen, den Werth von

$$x = +17,516 \mid +17,412 \mid +17,327$$

und die übrigbleibenden Fehler

1682	-16' 14,0	- 9' 45,6	- 3' 14,2
1683	+ 5' 22,1	+ 11' 36,2	+ 17' 54,3
1685	+ 3' 4,8	- 3' 38,6	- 10' 27,0
1687	+ 12' 51,2	+ 6' 28,4	+ 0' 7,7
1789	- 1' 0,5	+ 0' 16,4	+ 1' 33,1
1790	- 0' 53,7	- 2' 9,8	- 3' 27,8

für die ausgeschlossene Beobachtung aber

$$1714 \mid -25' 56,0 \mid -30' 51,9 \mid -35' 54,1$$

gefunden. Durch diese Vergleichung der drei Hypothesen wird anschaulich, in wiefern die Beobachtungen hinreichend sind den Werth von x anzudeuten. Nimmt man an, daß dieselben mit Aufmerksamkeit gemacht sind und daß die Anziehungen der übrigen Trabanten keine beträchtliche Ungleichheiten erzeugen, so muß man die erste und letzte Hypothese, oder die Werthe von $x = 1700''$ und $1800''$ schon als unstatthaft betrachten, denn man kann, unter den Umständen unter welchen diese Beobachtungen gemacht sind, die Zeit der Conjunction ohne Zweifel bis auf eine Viertelstunde und dadurch die Länge des Trabanten bis auf einen Viertelgrad sicher schätzen; Kähler sah, wie ich im 9ten Art. angeführt habe, schon in dem dritten Theile dieser Zeit eine Ortsveränderung des Trabanten. Die vortheilhafteste Darstellung der Beobachtungen erhält man durch den

Werth von $x = 1744''{,}699$ und den dazugehörigen von $x = +17''{,}422$; die übrigbleibenden Fehler sind dann:

1682	—	10' 27,1
1683	+	10 56,3
1685	—	2 55,6
1687	+	7 9,0
1789	+	0 8,3
1790	—	2 1,6

und für die ausgeschlossene Beobachtung

1714	—	30' 20,2
------	---	----------

Wenn man nicht beträchtliche Störungen durch die übrigen Trabanten annehmen will, von einer Art welche die Helio-meter-Beobachtungen nicht verrathen konnten, d. h. von langen Perioden, so wird man annehmen müssen, daß *Cassini* II. die Conjunction eine halbe Stunde zu früh angegeben habe. Wenn man indessen nicht aus der Angabe der Zeit in runder Zahl (10 Uhr) den Verdacht schöpfen will, daß der Beobachter die größte erreichbare Sicherheit der Beobachtung nicht gesucht habe, so kann man einen so großen Fehler, der wenigstens das Doppelte des unvermeidlichen ist, nicht annehmen.

Die Elemente sind nun, nach den Angaben des 5ten und 9ten Art. und nach den Formeln des 10ten, für 1830 + t :

Epoche 1830	125° 2' 21,6
Mittl. Beweg. in 365,25 Tagen		326 15 9,654 + 22 Rev.
Perisaturnium	243 13 19 + t . 1829,491
Excentricität	0,02862534
Mittlere Entfernung	176'',62537
Aufsteigender Knoten	167°40' 57,9 + t . 35'',537
Neigung	27 34 9,3 — t . 0,253

Die Ungleichheiten sind:

$$\begin{aligned}\delta \log r &= 0,000001053 \cdot m \cos (M + \varphi) \\ \delta \cdot v &= -45'',0 \sin 2u' - m \sin (M + \varphi) \\ \delta \cdot b &= m' \sin (M' + \varphi)\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}m \sin M &= +79''0 \sin 2\Gamma + 29''8 \sin (2u' - 2\Gamma) + 4''5 \sin 2u' \\ m \cos M &= +79,0 \cos 2\Gamma - 29,8 \cos (2u' - 2\Gamma) \\ m' \sin (M' - \Gamma) &= -45''7 \sin 2u' \\ m' \cos (M' - \Gamma) &= +51,0 \cos 2u'\end{aligned}$$

bedeuten und die Argumente nach den Formeln

$$\begin{aligned}u' &= h - 171^\circ 49' 48,0 - t \cdot 35'',515 \\ \Gamma &= 70^\circ 53' 22'',6 + t \cdot 1793'',973\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}2\Gamma &= 141^\circ 46' 45'' + t \cdot 59' 47''95 \\ 2u' - 2\Gamma &= 2h + 234^\circ 33' 39'' - t \cdot 60' 58''98 \\ 2u' &= 2h + 16 20 24 - t \cdot 1 11,03\end{aligned}$$

berechnet werden.

13.

Obgleich ich, aus den im 11ten Art. angeführten Gründen, nur einer Auswahl aus den älteren Beobachtungen einen Einfluss auf die mittleren Bewegungen verstattet habe, so würde es doch unbefriedigend sein, wenn ich nicht alle übrigen mit den Elementen vergleichen wollte. Ich fange mit einer Beobachtung an, welche eine sehr selten sichtbare Erscheinung betrifft.

Es ist dieses ein Austritt aus dem Schatten des Planeten, welchen *Herschel* am 23 Sept. 1789, 10h 11' 55'' M. Z. in Slough als vor wenigen Secunden geschehen angibt. Diese Beobachtung kann nur mit den Elementen verglichen werden, wenn die Ausdehnung des Schattenkegels des Saturns als bekannt angenommen wird; nimmt man den Raum für beschattet an, welcher innerhalb eines Kegels liegt, dessen Spitze im Mittelpunkte der Sonne ist und dessen Mantel den Saturn berührt, so werden die Zeiten des Eintritts des Mittelpunkts des Trabanten in den Schatten, oder seines Austritts aus demselben, durch die im 8ten Art., der Auflösung einer ganz ähnlichen Aufgabe wegen, gegebene Gleichung $a = r \cdot \sin (\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}d')$ bestimmt, in welcher nur, statt der geocentrischen Angaben, heliocentrische gesetzt werden. Ich finde den heliocentrischen Ort des Saturns, für die dem angegebenen Momente entsprechende reducirte Zeit = 9h 12' 50'':

$$350^\circ 13' 26,7. - 2^\circ 7' 25,4. \quad 0,9822382$$

und hieraus den auf die Ringebene bezogenen Ort der Sonne:

$$\lambda = 170^\circ 49' 45,4; \quad \beta = +0^\circ 12' 34,6.$$

Den Ort des Trabanten ergeben die im vorigen Art. gefundenen Elemente:

$$\begin{aligned}l &= 353^\circ 30' 50,7 + t \cdot 0,90704 \\ b &= +0^\circ 20' 56,3 + t \cdot 0,00118 \\ \log r &= 0,00782.\end{aligned}$$

und hiermit findet man $\tau = -182''$, oder die Zeit des Austritts des Mittelpunkts des Trabanten = 10h 8' 53'' in Slough. Da *Herschel* den bereits ausgetretenen Trabanten 10h 11' 55'' sah, so ist die Beobachtung als mit den zu ihrer Berechnung angewandten Elementen übereinstimmend anzunehmen.

Indessen wird diese Beobachtung sehr auffallend durch eine Bezeichnung der Stellung des ausgetretenen Trabanten gegen den Planeten, welche *Herschel* giebt: der Trabant erschien nämlich, zu der angegebenen Zeit in Conjunction mit dem östlichen Rande des Planeten und war nicht ganz so nördlich vom Mittelpunkte desselben, als die Mitte

zwischen diesem und dem nördlichen Rande des Planeten. Man sollte nämlich nicht erwarten, daß der Trabant so nahe am Saturn wiedererschieden wäre, sondern daß der Schatten sich weiter östlich erstreckt hätte. Damit man dieses genauer beurtheilen könne werde ich den Punkt wo der Trabant erschienen ist, berechnen. Der geocentrische Ort des Saturns ist:

$$348^{\circ} 57' 10'',6. - 2^{\circ} 21' 56'',0. \quad 0,9354278$$

und er ergibt

$$\lambda' = 169^{\circ} 48' 33'',4; \quad \beta' = +1^{\circ} 1' 30'',9$$

Wenn man die Entfernungen so berechnet, wie sie in der mittleren Entfernung des Saturns erscheinen würden, so findet man den Mittelpunkt der Ellipse, welche durch den Durchschnitt des Schattenkegels mit einer auf seine Axe senkrechten, durch den Trabanten gelegten Ebene erzeugt wird

$$3'',201 \text{ östlich und } 2'',559 \text{ nördlich}$$

von dem Mittelpunkte des Planeten; der Trabant erschien aber, der aus den Elementen berechneten Breite desselben zufolge, $1'',752$ nördlich von der großen Axe der Schatten-Ellipse, wodurch seine östliche Entfernung von dem Mittelpunkt derselben $= p$, mittelst der Gleichung

$$1 = \frac{pp}{a'a'} + \left(\frac{1'',752}{b'} \right)^2$$

in welcher a' und b' die halben Axen der Ellipse bezeichnen, unter der Annahme $a:b = 1,085:1$.

$$p = \sqrt{[a'a' - (1'',901)^2]}$$

gefunden wird. Der Punkt wo der Trabant zum Vorschein kam war also

$$3'',201 + \sqrt{[a'a' - 3,614]} \text{ östlich und } 4'',311 \text{ nördlich}$$

von dem Mittelpunkte des Planeten, zugleich aber, nach *Herschels* Angabe, in Conjunction mit dem östlichen Rande, wodurch man einen Ausdruck der Gröfse in welcher der Aequatoreal-Halbmesser dem Beobachter erschien, nämlich

$$a = 3'',201 + \sqrt{[a'a' - 3,614]}$$

erhält. Die doppelte Beobachtung, daß der austretende Trabant in Conjunction mit dem östlichen Rande erschien, ist, wie man hieraus sieht, nicht anders zu erklären, als dadurch, daß der Schatten einen wirklich $3''$ kleineren Halbmesser hatte als der Planet, so wie dieser im Teleskope erschien. Was aus den Elementen entlehnt worden ist um dieses Resultat zu erhalten, nämlich die Entfernung des Trabanten von der großen Axe der Schatten-Ellipse, kann nicht soweit bezweifelt werden, daß der Einfluß dieses Zweifels auf das Resultat merklich würde;

auch widersetzt sich die schon angeführte Schätzung der Entfernung von der Ansenlinie, in welcher der Trabant erschien, jedem erheblichen Zweifel dieser Art. Wenn man von dem Unterschiede von $3''$ auch einen Theil als möglichen Fehler der Schätzung der Conjunction ansehen will, so bleibt noch immer der beträchtlichere Theil desselben übrig, denn die Schätzung der Conjunction mit dem Rande kann, in so kleiner Entfernung von der Ansenlinie, nicht beträchtlich unsicher sein. Diese Beobachtung vereinigt sich mit dem im 3^{ten} Art. untersuchten Austritte des Trabanten aus der Scheibe des Planeten darin, daß auch sie wahrscheinlich macht, daß *Herschel* den Saturn, den er größer gemessen hat als wir ihn jetzt messen, auch größer gesehen habe als unsere achromatischen Fernröhre ihn zeigen. Berechnete man nämlich aus der Conjunction mit dem östlichen Rande, unter Anwendung meiner Bestimmung des Aequatoreal-Halbmessers, die Länge des Trabanten, so würde dieselbe etwa einen Grad von den Elementen abweichen, was weit außerhalb der Grenzen der Unsicherheit sowohl der Beobachtung, als auch der Elemente zu liegen scheint, deren nahe Uebereinstimmung in derselben Gegend der Bahn überdies durch die ein Jahr später gemachte *Köhlersche* Beobachtung bestätigt wird. Auch *Herschels* Schätzung der Entfernung des Trabanten von der Ansenlinie, welche er etwas kleiner fand als die Hälfte des Polarhalbmessers, deutet an, daß er den Planeten größer gesehen, als ich ihn gemessen habe: diese Entfernung ist nämlich, der obigen Rechnung aus den Elementen zufolge, $= 4'',311$, also der Polarhalbmesser $> 8'',622$, während ich ihn nur $= 7'',837$ gefunden habe. Zugleich zeigt aber dieselbe Beobachtung, daß der Schatten weit kleiner ist als die Ausdehnung in welcher *Herschel* den Planeten sah; auch ergibt sie eine völlige Uebereinstimmung des Austritts aus dem Schatten mit den Elementen, wenn man den Schatten so groß annimmt wie ich der Saturn selbst gemessen habe. Will man die beiden *Herschelschen* Beobachtungen vom 23 Septbr. und 2 Nov. 1789 unter der Annahme erklären, daß *Herschel* den Saturn in seiner wahren Gröfse gesehen habe, so muß man zugeben, daß der Schatten weit kleiner ist als der Körper des Planeten, und ferner daß das Heliometer diesen zu klein gezeigt habe; will man die von mir gemessene Gröfse des Saturns als die wahre annehmen, so verstaten die Beobachtungen den Schatten für gleich groß anzunehmen, zwingen aber zuzugeben, daß *Herschels* Teleskop dem Planeten eine falsche Gröfse verliehen habe. Es ist nicht ohne Interesse diesen letzten Punkt soviel als möglich aufzuklären. Dieses wird durch Beobachtungen sowohl des Anfanges als auch des Endes von Finsternissen, welche der bevorstehende

Durchgang des Planeten durch die Knotenlinie der Trabantenbahn hoffentlich liefern wird, wahrscheinlich geschehen; allein ich lasse nicht unbemerkt, daß die Analogie welche die Finsternisse unseres Mondes und der Jupitersmonde darbieten, nicht erwarten läßt, daß der Schatten merklich kleiner sei als der Planet selbst: er könnte nur wenn Saturn eine strahlenbrechende Atmosphäre besitzt, kleiner sein, allein die Finsternisse unseres Mondes, bei welchen die Wirkung der Strahlenbrechung durch die damit verbundene Schwächung des Lichts vernichtet wird, zeigen, daß die Verkleinerung des Schattens nicht notwendige Folge der Strahlenbrechung ist. Andererseits habe ich oben schon bemerkt, daß zwar wohl denkbar ist, daß ein Fernrohr einen hellen Gegenstand auf dunkeltem Grunde zu groß zeige, nicht aber das Entgegengesetzte. Ich halte aus diesen Gründen für wahrscheinlich, daß *Herschels* Teleskope den Planeten in einer falschen Ausdehnung gezeigt haben, erinnere jedoch an die im 8^{ten} Art. aufgeworfene, noch unbeantwortete Frage.

14.

Eine zweite seltene Beobachtung ist die schon im 9^{ten} Art., eines anderen Zwecks wegen, untersuchte Bedeckung des Trabanten durch den Planeten. Den auf die Ringebene reducirten Ort der Erde, für 1715 März 25. 10^h 52' 30" wahrer Pariser Zeit = 9^h 48' 53" reducirter Zeit habe ich im 9^{ten} Art. angegeben; für den Trabant findet man aus den Elementen

$$\begin{aligned} l &= 167^{\circ} 35' 8,4 + \tau \cdot 0,99452 \\ b &= -0^{\circ} 19' 40,5 - \tau \cdot 0,00135 \\ \log r &= 9,98794. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Zeit seines Eintritts in die Scheibe = 10^h 2' 7" reducirter Zeit = 11^h 5' 44" W. Z. *Cassini* sah den Trabant um 10^h Uhr, wo er den Planeten zu berühren schien; dann bemerkte er eine Verminderung der GröÙe desselben und um 11^h war er ganz vom Planeten verfinstert. Die Rechnung aus den Elementen beruht auf der Annahme, daß *Cassini* den Planeten in derselben GröÙe gesehen habe, welche meine Messungen ihm beilegen; die *Herschelsche* würde den Eintritt etwa eine halbe Stunde früher ergeben haben.

Eine sorgfältige Beobachtung ist am 30 Decbr. 1790 von *Köhler* gemacht; er sah den Trabant, der bei Eintritt der Nacht schon über die Conjunction hinaus war, um 5^h 25' 30" M. Z. in Conjunction mit dem einen halben Halbmesser des Planeten östlich vom Mittelpunkt liegenden Punkte der Ansenlinie, 6^h 40' 0" aber in Conjunction mit

dem östlichen Rande. Die Entfernung von der Ansenlinie betrug nur 11 bis 12", war also so klein, daß die Beobachtung leicht und möglichst sicher gewesen sein muß. Die Zeiten entsprechen den reducirten Pariser Zeiten 3^h 21' 23" und 4^h 35' 53"; für die letztere ist der geocentrische Ort des Saturns:

$$359^{\circ} 51' 8,1. \quad - 2^{\circ} 22' 4,1. \quad 0,9805932$$

woraus man

$$\lambda' = 179^{\circ} 25' 40,9; \quad \beta = -4^{\circ} 5' 21,9$$

erhält. Die Elemente ergeben, für beide Zeiten,

$$\begin{aligned} \text{Länge in der Bahn} & \dots \nu = 0^{\circ} 58' 7,3. \quad 2^{\circ} 5' 20,2 \\ \text{Log. } r & \dots \dots \dots 0,00890. \quad 0,00907 \end{aligned}$$

und hiermit findet man, den Elementen zufolge, die erste Erscheinung 8' 6" früher, die zweite 7' 20" später als sie beobachtet worden sind.

Die übrigen, noch vorhandenen älteren Nachrichten, habe ich mit den Elementen nur beiläufig verglichen, indem eine ohngefähre Uebersicht hier hinzureichen schien. Es sind dieses erstlich zwei Conjunctionen mit dem westlichen Rande, von *Halley*: 1682 Novbr. 23. 19^h W. Z. und 1683 Febr. 3. 8^h 0' W. Z., deren erste die Länge des Trabanten (wenn man meine Bestimmung des Halbmessers des Planeten annimmt) 53' größer, die zweite 23' kleiner angiebt als die Elemente. Ferner drei Conjunctionen von *Cassini*: 1691 Jan. 18. 18^h 14'; 1704 Octbr. 27. 11^h 12'; 1706 März 6. 7^h 50' mittlere Zeit; die erste muß aber durch irgend einen Irrthum entstellt sein, indem die angegebene Zeit vier Stunden später ist, als sie den Elementen zufolge sein sollte; die zweite giebt die Länge 1° 54', die dritte 1° 2' kleiner als die Elemente. Noch ein Paar Beobachtungen von *Cassini* bestehen in Angaben der Entfernungen von der Conjunction in Graden und deren Theilen, und können nicht berechnet werden da man die Schätzungen woraus diese Angaben hervorgegangen sein könnten nicht kennt. Ich glaube nicht, daß die beiden Beobachtungen von 1704 und 1706 erhebliche Zweifel gegen die Richtigkeit der Elemente begründen können, indem sie bei sehr weiten Oeffnungen der Ringellipse gemacht worden sind, wo Schätzungen der Conjunctionszeiten alle Sicherheit verlieren. Allein ich erlaube mir zu bemerken, daß Beobachtungen welche gegenwärtig, wo das Heliumeter nur zwei Elemente, nämlich die mittlere Bewegung und die Bewegung der Apsidenlinie unbestimmt gelassen hat, so starke Abweichungen zeigen, früher, wo fünf Elemente so bestimmt werden mußten, daß sie sich an dieselben Beobachtungen so viel als möglich anschlossen, weit von der

Wahrheit abgelenkt haben müssen. Wirklich sind die Fehler meines früheren Versuchs beträchtlich: wenn man die Zeit t von 1740 anrechnet, welches Jahr etwa als die mittlere Epoche der Beobachtungen worauf jener Versuch sich gründet angesehen werden kann, so sind die Abweichungen der älteren Elemente von den gegenwärtigen:

$$\begin{array}{lcl} \text{Mittlere Länge} & & + 12' 8'' - t . 17,4 \\ \text{Perisaturnium} & & - 14^{\circ} 11' - t . 10' 12'' \\ \text{Excentricität} & & + 0,0202. \end{array}$$

Die frühere Bestimmung der mittleren Länge bezog sich auf die Zeit der Ankunft des vom Saturn ausgehenden Lichts in der mittleren Entfernung, die gegenwärtige auf die Zeit seines Ausganges; der hieraus entstehende scheinbare Unterschied beider, der bei ihrer Vergleichung berücksichtigt werden muß, ist $1^{\circ} 13' 46'',8$.

$$\begin{aligned} \kappa = \frac{1296000 \cdot 365,25}{T} M \times & \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \frac{(\rho'^4 - \rho^4) : (\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^2 (1 - ee)^2} \right. \\ & + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \cdot \frac{(\rho'^6 - \rho^6) : (\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^4 (1 - ee)^4} (2 + \frac{3}{2} ee) \\ & + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \cdot \frac{(\rho'^8 - \rho^8) : (\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^6 (1 - ee)^6} (3 + \frac{1}{2} ee + \frac{1}{8} e^4) \\ & + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \right)^2 \cdot \frac{(\rho'^{10} - \rho^{10}) : (\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^8 (1 - ee)^8} (4 + 21 ee + \frac{3}{2} e^4 + \frac{1}{8} e^6) \\ & \left. + \text{etc.} \dots \right\} \end{aligned}$$

Setzt man $\rho = 19'',374$, $\rho' = 19'',656$, die übrigen Elemente aber wie ich sie gefunden habe, so ergiebt diese Formel die jährliche Bewegung

$$\kappa = 205682'' M$$

Aus den Beobachtungen ist $\kappa = 1744'' 699$ gefunden, allein diese Bewegung ist nicht dem Ringe allein zuzuschreiben, sondern ein Theil derselben entsteht aus den Anziehungen des sphäroidischen Planeten und der übrigen Trabanten; diesen wahrscheinlich wenig beträchtlichen Theil kann man nicht berücksichtigen, da alles zu seiner Berechnung Nothwendige unbekannt ist; man kann daher nur aus der Gleichung

$$1744'',699 = 205682'' M$$

einen Näherungswerth

$$M = \frac{1}{118}$$

erhalten. Der wahre Werth der Masse der Ringe scheint eher kleiner als größer zu sein, indem die angeführten Anziehungen die Apsidenlinie in derselben Richtung bewegen, in welcher diese Masse sie bewegt. Nimmt man

15.

Es sind nun noch einige Folgerungen aus den vorigen Untersuchungen zu ziehen; namentlich die Bestimmungen der Massen des Planeten und seines Ringes. Die Bewegung der Apsidenlinie der Trabantenbahn ist eine der Erscheinungen, welche man zur Bestimmung der Masse des Ringes benutzen kann. Wenn man die Begrenzungen der Ringe als um den Mittelpunkt des Saturns mit den Halbmessern ρ und ρ' beschriebene Kreise, die Masse M der Ringe als gleichförmig zwischen diesen Kreisen vertheilt annimmt und durch Δ , e , T die mittlere Entfernung, Excentricität und siderische Umlaufzeit des Trabanten bezeichnet, so findet man die Bewegung der Apsidenlinie in einem julianischen Jahre:

die Dichtigkeit der Ringe (die des Saturns $= 1$ gesetzt) $= \delta$ an, so ergeben der gefundene Werth von M und die Voraussetzung der gleichförmigen Vertheilung der Masse, die Dicke der Ringe

$$= \frac{0'',031}{\delta}$$

oder in geographischen Meilen ausgedrückt

$$= \frac{29,7}{\delta}.$$

Wenn dieses Resultat auch auf einigen nicht sicheren Voraussetzungen beruht, so mügte es doch von der bisher unbekannten Dicke der Ringe einen ohngefähren Begriff geben können.

Außer dem Theile der Anziehung des Trabanten durch die Ringe, welcher die Bewegung der Apsidenlinie ergiebt, ist noch der sich mit der Anziehung des Planeten vereinigende Theil zu untersuchen. Unter den bei jenem gemachten Voraussetzungen ist der Ausdruck desselben

$$\begin{aligned}
&= M \cdot \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(\rho'^4 - \rho^4) : (\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^2 (1 - ee)^{\frac{3}{2}}} \right. \\
&\quad + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{(\rho'^6 - \rho^6) : (\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^4 (1 - ee)^{\frac{5}{2}}} (1 + \frac{1}{2} ee) \\
&\quad + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{(\rho'^8 - \rho^8) : (\rho'^2 - \rho^2)}{\Delta^6 (1 - ee)^{\frac{7}{2}}} (1 + 3 ee + \frac{1}{2} e^2) \\
&\quad \left. + \text{etc.} \dots \right\}
\end{aligned}$$

und sein Zahlenwerth

$$= M \cdot 1,006858;$$

er erlangt einen kleinen Einfluss auf die Masse des Saturns welche man aus der mittleren Entfernung und der mittleren Bewegung des Trabanten ableitet.

Nimmt man die Masse der Sonne zur Einheit und bezeichnet man die Massen des Saturns und des Trabanten durch m und $M'm$, so ist die Anziehung welche die elliptische Bewegung des Trabanten erzeugt, der Summe

$$m [1 + M + M' + M \cdot 0,006858]$$

proportional; die Masse womit die drei Körper vereint in beträchtlichen Entfernungen anziehen aber

$$m [1 + M + M']$$

proportional. Diese letztere ist das was man in der Theorie des Planetensystems, unter der Benennung der Saturnsmasse, zu wissen verlangt, ich werde sie durch μ , die mittleren Bewegungen des Trabanten und des Planeten, in einem julianischen Jahre, durch n und n' bezeichnen. Nach diesen Bezeichnungen hat man

$$\frac{\sqrt{1+u}}{n} = \frac{\sqrt{(\mu + m M \cdot 0,006858)}}{n' \sin \Delta^{\frac{3}{2}}},$$

woraus

$$\mu = \frac{\left(\frac{n}{n'} \right)^2 \sin \Delta^3 - 0,006858 M m}{1 - \left(\frac{n}{n'} \right)^2 \sin \Delta^3}$$

folgt.

Die mittlere tropische Bewegung des Trabanten in einem julianischen Jahre ist $= 22 \text{ Rev.} + 326^\circ 15' 9'',654$; vermindert man sie um die Präcession $= 50'',231$, und fügt man $+ 46'',357$ hinzu (Art. 5) um sie von der Einwirkung der Sonne zu befreien, so erhält man

$$n = 29686505'',78;$$

die mittlere Bewegung des Saturns ist dagegen nach Herrn *Bouvard's* Tafeln $= 12^\circ 14' 6'',227$, und ergibt, wenn man die Präcession abzieht

$$n' = 43995'',996.$$

Endlich ist, meinen Beobachtungen zufolge:

$$\Delta = 176'',62537$$

und der mittlere Fehler dieser Bestimmung

$$= \pm 0'',04513.$$

Diese Werthe von n , n' , Δ und die Annahme

$$M m = \frac{\mu}{119} \text{ ergeben die Saturnsmasse}$$

$$= \frac{1}{3497,24},$$

und den mittleren Fehler des Nenners dieses Bruchs

$$= \pm 2,68$$

Einheiten. Dieses Resultat stimmt außerordentlich nahe mit dem von Herrn *Bouvard*, auf einem sehr verschiedenen Wege gefundenen überein.

i n h a l t.

zu Nr. 193, 194 und 195.

Bestimmung der Bahn des *Hugenischen* Saturns-Satelliten, von Herrn Professor und Ritter *Bessel*. S. 1.

Altona im Februar 1831. (Hiebei ein Blatt mit Tafeln.)

Tafeln der mittleren Bewegungen des *Hugenischen* Saturns-Satelliten.

	Länge.	Perisaturn.	Knoten.	Neigung.		Länge.	Perisaturn.	Knoten.	Neigung.
	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "		° ' "	° ' "	° ' "	° ' "
1800	68 44 50,6	227 58 37	167 23 11,8	27 34 16,9	1850	170 5 34,7	253 23 9	167 52 48,6	27 34 4,2
1801	29 21 20,9	228 29 5	23 47,4	34 16,6	1851	130 42 5,0	253 53 37	53 24,2	34 4,0
1802	349 57 51,3	228 59 33	24 22,9	34 16,4	1852	113 53 12,6	254 24 10	53 59,8	34 3,7
1803	310 34 21,6	229 30 1	24 58,4	34 16,1	1853	74 29 42,9	254 24 39	54 35,3	34 3,5
1804	293 45 29,2	230 0 35	25 34,0	34 15,9	1854	35 6 13,3	255 25 7	55 10,8	34 3,2
1805	254 21 59,6	230 31 3	26 9,5	34 15,6	1855	355 42 43,6	255 55 35	55 46,3	34 3,0
1806	214 58 29,9	231 1 31	26 45,0	34 15,4	1856	338 53 51,2	256 26 8	56 21,9	34 2,7
1807	175 35 0,2	231 31 59	27 20,5	34 15,1	1857	299 30 21,6	256 56 37	56 57,4	34 2,5
1808	158 46 7,8	232 2 33	27 56,1	34 14,9	1858	260 6 51,9	257 27 5	57 32,9	34 2,2
1809	119 22 38,2	232 33 1	28 31,6	34 14,6	1859	220 43 22,3	257 57 33	58 8,5	34 2,0
1810	79 59 8,5	233 3 29	29 7,2	34 14,4	1860	203 54 29,8	258 28 6	58 44,1	34 1,7
1811	40 35 38,9	233 33 57	29 42,7	34 14,1	1861	164 31 0,2	258 58 34	59 19,6	34 1,5
1812	23 46 46,4	234 4 31	30 18,3	34 13,9	1862	125 7 30,5	259 29 3	59 55,1	34 1,2
1813	344 23 16,8	234 34 59	30 53,8	34 13,6	1863	85 44 0,9	259 59 31	168 0 30,6	34 1,0
1814	304 59 47,1	235 5 27	31 29,3	34 13,3	1864	68 55 8,5	260 30 4	1 6,2	34 0,7
1815	265 36 17,5	235 35 55	32 4,8	34 13,1	1865	29 31 38,8	261 0 32	1 41,7	34 0,4
1816	248 47 25,1	236 6 29	32 40,4	34 12,8	1866	350 8 9,1	261 31 1	2 17,2	34 0,2
1817	209 23 55,4	236 36 57	33 15,9	34 12,6	1867	310 44 39,5	262 1 29	2 52,7	33 59,9
1818	170 0 25,8	237 7 25	33 51,5	34 12,3	1868	293 55 47,1	262 32 2	3 28,4	33 59,7
1819	130 36 56,1	237 37 53	34 27,0	34 12,1	1869	254 32 17,4	263 2 30	4 3,9	33 59,4
1820	113 48 3,7	238 8 27	35 2,6	34 11,8	1870	215 8 47,8	263 32 59	4 39,4	33 59,2
1821	74 24 34,0	238 38 55	35 38,1	34 11,6	1871	175 45 18,1	264 3 27	5 14,9	33 58,9
1822	35 1 4,4	239 9 23	36 13,6	34 11,3	1872	158 56 25,7	264 34 0	5 50,5	33 58,7
1823	355 37 34,7	239 39 51	36 49,1	34 11,1	1873	119 32 56,0	265 4 28	6 26,0	33 58,4
1824	338 48 42,3	240 10 25	37 24,7	34 10,8	1874	80 9 26,4	265 34 57	7 1,5	33 58,2
1825	199 25 12,6	240 40 53	38 0,2	34 10,6	1875	40 45 56,7	266 5 25	7 37,0	33 57,9
1826	260 1 43,0	241 11 21	38 35,8	34 10,3	1876	23 57 4,3	266 35 58	8 12,7	33 57,7
1827	220 38 13,3	241 41 49	39 11,3	34 10,1	1877	344 33 34,6	267 6 26	8 48,2	33 57,4
1828	203 49 20,9	242 12 23	39 46,9	34 9,8	1878	305 10 5,0	267 36 55	9 23,7	33 57,2
1829	164 25 51,3	242 42 51	40 22,4	34 9,6	1879	265 46 35,3	268 7 23	9 59,2	33 56,9
1830	125 2 21,6	243 13 19	40 57,9	34 9,3	1880	248 57 42,9	268 37 56	10 34,8	33 56,7
1831	85 38 52,0	243 43 47	41 33,4	34 9,0	1881	209 34 13,3	269 8 24	11 10,3	33 56,4
1832	68 49 59,5	244 14 20	42 9,0	34 8,8	1882	170 10 43,6	269 38 53	11 45,8	33 56,1
1833	29 26 29,9	244 44 49	42 44,5	34 8,5	1883	130 47 14,0	270 9 21	12 21,3	33 55,9
1834	350 3 0,2	245 15 17	43 20,0	34 8,3	1884	113 58 21,5	270 39 54	12 56,9	33 55,6
1835	310 39 30,6	245 45 45	43 55,6	34 8,0	1885	74 34 51,9	271 10 22	13 32,5	33 55,4
1836	293 50 38,1	246 16 18	44 31,2	34 7,8	1886	35 11 22,2	271 40 50	14 8,0	33 55,1
1837	254 27 8,5	246 46 47	45 6,7	34 7,5	1887	355 47 52,6	272 11 19	14 43,5	33 54,9
1838	215 3 38,8	247 17 15	45 42,2	34 7,3	1888	338 59 0,1	272 41 52	15 19,1	33 54,6
1839	175 40 9,2	247 47 43	46 17,7	34 7,0	1889	299 35 30,5	273 12 20	15 54,6	33 54,4
1840	158 51 16,8	248 18 16	46 53,3	34 6,8	1890	260 12 0,8	273 42 48	16 30,1	33 54,1
1841	119 27 47,1	248 48 45	47 28,8	34 6,5	1891	220 48 31,2	274 13 17	17 5,6	33 53,9
1842	80 4 17,4	249 19 13	48 4,3	34 6,3	1892	203 59 38,8	274 43 50	17 41,2	33 53,6
1843	40 40 47,8	249 49 41	48 39,9	34 6,0	1893	164 36 9,1	275 14 18	18 16,8	33 53,4
1844	23 51 55,4	250 20 14	49 15,5	34 5,8	1894	125 12 39,5	275 44 46	18 52,3	33 53,1
1845	344 28 25,7	250 50 43	49 51,0	34 5,5	1895	85 49 9,8	276 15 15	19 27,8	33 52,9
1846	305 4 56,1	251 21 11	50 26,5	34 5,3	1896	69 0 17,4	276 45 48	20 3,4	33 52,6
1847	265 41 26,4	251 51 39	51 2,0	34 5,0	1897	29 36 47,7	277 16 16	20 38,9	33 52,3
1848	248 52 34,0	252 22 12	51 37,6	34 4,7	1898	350 13 18,1	277 46 44	21 14,4	33 52,1
1849	209 29 4,3	252 52 41	52 13,1	34 4,5	1899	310 49 48,4	278 17 13	21 49,9	33 51,8

Reduction auf die beiden früheren Jahrhunderte

— 200 | 314 37 3,7 | 258 21 52 | — 1 58 27,4 | + 50,6 | — 100 | 157 18 31,8 | 309 10 56 | — 0 59 13,7 | + 25,3
 gr Bd.

	M o n a t e.				
	Länge.			Perisat.	Knoten.
	°	'	"	'	"
Januar	0	0	0,0	0	0
Februar	339	53	14,2	2	35
März	252	2	36,8	4	56
April	231	55	51,0	7	31
May	189	14	28,1	10	1
Juni	169	7	42,3	12	36
Juli	126	26	19,3	15	7
August	106	19	33,6	17	42
September	86	12	47,8	20	17
October	43	31	24,8	22	47
November	23	24	39,1	25	23
December	340	43	16,1	27	53

T a g e.			
	Länge.	Perisat.	Knoten.
1	22 34 37,2	0 5	0,1
2	45 9 14,5	0 10	0,2
3	67 43 51,7	0 15	0,3
4	90 18 28,9	0 20	0,4
5	112 53 6,2	0 25	0,5
6	135 27 43,4	0 30	0,6
7	158 2 20,6	0 35	0,7
8	180 36 57,9	0 40	0,8
9	203 11 35,1	0 45	0,9
10	225 46 12,3	0 50	1,0
11	248 20 49,6	0 55	1,1
12	270 55 26,8	1 0	1,2
13	293 30 4,0	1 5	1,3
14	316 4 41,3	1 10	1,4
15	338 39 18,5	1 15	1,5
16	1 13 55,7	1 20	1,6
17	23 48 33,0	1 25	1,7
18	46 23 10,2	1 30	1,8
19	68 57 47,4	1 35	1,8
20	91 32 24,7	1 40	1,9
21	114 7 1,9	1 45	2,0
22	136 41 39,1	1 50	2,1
23	159 16 16,4	1 55	2,2
24	181 50 53,6	2 0	2,3
25	204 25 30,8	2 5	2,4
26	227 0 8,1	2 10	2,5
27	249 34 45,3	2 15	2,6
28	272 9 22,5	2 20	2,7
29	294 43 59,8	2 25	2,8
30	317 18 37,0	2 30	2,9
31	339 53 14,2	2 35	3,0
32	2 27 51,5	2 40	3,1

	S t u n d e n.			M i n u t e n u n d S e c u n d e n.		
	Länge.			Länge.		
	°	'	"	'	"	"
1	0	56	26,5	1	0	56,4
2	1	52	53,1	2	1	52,9
3	2	49	19,7	3	2	49,3
4	3	45	46,2	4	3	45,8
5	4	42	12,7	5	4	42,2
6	5	38	39,3	6	5	38,7
7	6	35	5,9	7	6	35,1
8	7	31	32,4	8	7	31,5
9	8	27	59,0	9	8	28,0
10	9	24	25,5	10	9	24,4
11	10	20	52,1	11	10	20,9
12	11	17	18,6	12	11	17,3
13	12	13	45,2	13	12	13,8
14	13	10	11,7	14	13	10,2
15	14	6	38,3	15	14	6,6
16	15	3	4,8	16	15	3,1
17	15	59	31,4	17	15	59,5
18	16	55	57,9	18	16	56,0
19	17	52	24,5	19	17	52,4
20	18	48	51,0	20	18	48,8
21	19	45	17,6	21	19	45,3
22	20	41	44,1	22	20	41,7
23	21	38	10,7	23	21	38,2
24	22	34	37,2	24	22	34,6
				25	23	31,1
				26	24	27,5
				27	25	23,9
				28	26	20,4
				29	27	16,8
				30	28	13,3
				31	29	9,7
				32	30	6,2
				33	31	2,6
				34	31	59,0
				35	32	55,5
				36	33	51,9
				37	34	48,4
				38	35	44,8
				39	36	41,3
				40	37	37,7
				41	38	34,1
				42	39	30,6
				43	40	27,0
				44	41	23,5
				45	42	19,9
				46	43	16,3
				47	44	12,8
				48	45	9,2
				49	46	5,7
				50	47	2,1
				51	47	58,6
				52	48	55,0
				53	49	51,4
				54	50	47,9
				55	51	44,3
				56	52	40,8
				57	53	37,2
				58	54	33,7
				59	55	30,1
				60	56	26,5

$$\log we = 3,771176$$

$$\log \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = 0,0124352$$

$$\log e = 8,456751$$

Argumente der Ungleichheiten:

$$\Gamma = \text{Perisaturnium} - \text{Knoten} - 4^{\circ} 39'$$

$$u' = \text{Länge } \mathfrak{h} - \text{Knoten} - 4^{\circ} 9'.$$

Im Januar und Februar der Schaltjahre wird der vorhergehende Tag genommen.