Elementare Theorie der ganzen transcendenten Funktionen von endlicher Ordnung.

Von

Alfred Pringsheim in München.

In einigen kleineren Aufsätzen, welche im Laufe der letzten zwei Jahre in den Münchener Sitzungsberichten erschienen sind*), habe ich den Versuch gemacht, gewisse Hauptsätze aus der Theorie der *ganzen transcendenten Funktionen von endlicher Ordnung* in vollkommen *elementarer* Weise zu begründen. Dem aus diesem Anlaß von verschiedenen Seiten, so auch von der Redaktion dieser Zeitschrift geäußerten Wunsche nach einer elementaren, möglichst vollständigen und systematischen Darstellung dieser ganzen Theorie komme ich um so lieber nach, als es hierzu lediglich der Überarbeitung einer im Sommer 1902 von mir gehaltenen Vorlesung bedurfte. Von einer derartigen Darstellung wird man selbstverständlich nicht erwarten dürfen, daß sie wesentlich neue *Resultate* zu Tage fördert. Liegt es ja doch vielmehr auf der Hand, daß die Benützung des Infinitesimalkalküls und der komplexen Integration in mancher Hinsicht weiter trägt, als die hier angewendeten rein elementaren Methoden. Nichtsdestoweniger wird man, wie ich hoffe, ganz abgesehen von der Einfachheit der aufgewendeten Beweismittel, auch in der Fassung und Präzisierung der Resultate manches neue finden. Im übrigen verweise ich bezüglich der Auswahl und Gruppierung des hier verarbeiteten Stoffes auf die folgende ausführliche Inhaltsübersicht**).

---

*) Bd. 32 (1902), p. 163. 295; Bd. 33 (1903), p. 295.

**) *Literatur:* H. Poincaré, Sur les fonctions entières, Bull. de la soc. math. de France, T. 11 (1883), p. 142.

J. Hadamard, Études sur les propriétés des fonctions entières etc., Journ. de math. (4), T. 9 (1893), p. 171.

H. von Schaper, Über die Theorie der Hadamardschen Funktionen etc. Dissertat. Göttingen 1898.

E. Borel, Leçons sur les fonctions entières (Paris 1900).

Inhaltsübersicht.

I. Koeffizienteneigenschaften der ganzen Funktionen von endlicher Ordnung.

II. Ganze Funktionen, welche gar keine oder endlich viele Nullstellen besitzen.

III. Ganze Funktionen mit unendlich vielen Nullstellen, insbesondere primitive ganze Funktionen von endlichem Range.

IV. Ganze Funktionen von endlicher Höhe.

Ernst Lindelöf, Mémoire sur les fonctions entières de genre fini, Acta soc. scient. Fennicar, T. 31 (1902), p. 1.

(NB. Es sind hier nur die *wesentlichsten* Arbeiten über den vorliegenden Gegenstand angeführt; einige andere werden noch gelegentlich im Laufe der folgenden Untersuchung zitiert.)

I. Koeffizienteneigenschaften der ganzen Funktionen $G(x)$ von endlicher Ordnung.

§ 1.

Definition der ganzen Funktionen $G(x)$ von endlicher Ordnung. — Ordnungszahl und Spezialtypus.

1. Für eine ganze *rationale* Funktion n^{ten} Grades: $g(x) = \sum_0^n{}^\nu c_\nu x^\nu$ besteht bekanntlich die Beziehung:

$$\lim_{|x|=\infty} |g(x)| = \infty, \tag{1}$$

und zwar kann das Verhalten von $g(x)$ in der Nähe der „Stelle" $x = \infty$ des näheren in folgender Weise charakterisiert werden: Jedem $\varepsilon > 0$ läßt sich eine positive Zahl R_ε so zuordnen, daß:

$$|G(x)| \begin{Bmatrix} < |x|^{n+\varepsilon} \\ > |x|^{n-\varepsilon} \end{Bmatrix} \text{ für } \textit{alle } x, \text{ deren } |x| > R_\varepsilon. \tag{2}$$

Diese beiden Ungleichungen in Verbindung mit dem durchweg *regulären* Verhalten *im Endlichen* sind dann für $g(x)$ in *der* Weise *charakteristisch*, daß dadurch $g(x)$ unzweideutig als eine *ganze rationale Funktion* n^{ten} *Grades* gekennzeichnet wird.

Aus dieser Erkenntnis erwächst naturgemäß die Frage: Läßt sich nicht auch für ganze *transcendente* Funktionen eine genauere Differenzierung des *Verhaltens im Unendlichen* benützen, um bestimmte *Funktionsklassen* mit besonderen, wohldefinierten Eigenschaften eindeutig zu charakterisieren? Dabei wird man von vornherein festzuhalten haben, daß für eine ganze *transcendente* Funktion $G(x) = \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu x^\nu$ an die Stelle der Beziehung (1) lediglich die folgende tritt:

$$\overline{\lim_{|x|=\infty}} |G(x)| = \infty \qquad (\text{dagegen: } \underline{\lim_{|x|=\infty}} |G(x)| = 0). \tag{3}$$

Versteht man also unter $M_1(r) > M_2(r)$ zwei je nach Umständen passend zu wählende und einander zu nähernde, monoton ins Unendliche wachsende Funktionen der positiven Veränderlichen r, so können hier die den Ungleichungen (2) entsprechenden Beziehungen nur in dem folgenden Umfange bestehen:

$$|G(x)| \begin{cases} < M_1(|x|) \text{ für } \textit{alle hinlänglich großen } x, \\ > M_2(|x|) \text{ für } \textit{gewisse } x, \textit{ unter denen auch beliebig große} \end{cases} \tag{4}$$

vorkommen. Zugleich erscheint die mögliche Auswahl von $M_1(r)$, $M_2(r)$

nach unten hin durch die Überlegung beschränkt, daß nach dem Cauchyschen Koeffizientensatze:

$$\operatorname*{Max}_{|x|=r} |G(x)| > c_{m_\nu} r^{m_\nu},$$

wenn c_{m_ν} *irgend einen* von Null verschiedenen unter den Koeffizienten c_ν bezeichnet. Daraus folgt also, daß $M_1(r)$ jedenfalls *stärker* ins Unendliche wachsen muß, als *jede noch so hohe Potenz von r*. Andererseits zeigt ein Blick auf einfache Beispiele, wie: e^{x^n}, $x^{-\frac{1}{2}} \sin\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$, daß es sicher ganze Funktionen $G(x)$ gibt, welche für *alle hinlänglich großen* x einer Ungleichung von der Form genügen:

$$\text{(A)} \qquad |G(x)| < e^{|x|^a},$$

unter a irgend eine *positive* Zahl verstanden (welche, wie das zweite der oben genannten Beispiele zeigt, eventuell auch < 1 sein kann). Wir führen nun die folgende *Definition* ein:

> Jede ganze transcendente Funktion, welche einer Relation von der Form (A) genügt, soll eine ganze (transcendente) Funktion *von endlicher Ordnung* heißen.

Es wird sich dann zunächst darum handeln, aus der vorausgesetzten Existenz von Ungleichung (A) für *irgend ein* (endliches) $a > 0$ bestimmte Schlüsse auf die genauere Präzisierung der oben mit $M_1(|x|)$, $M_2(|x|)$ bezeichneten Funktionen zu ziehen. Dabei wollen wir im folgenden den Umfang zweier Aussagen von der Form (4) ein für allemal durch den etwas kürzeren Ausdruck bezeichnen:

$$\text{(4a)} \qquad |G(x)| \begin{cases} < M_1(|x|) \text{ für } \textit{alle } |x| > R, \\ > M_2(|x|) \text{ für } \textit{gewisse beliebig große } x. \end{cases}$$

2. Angenommen nun, es gibt irgend eine positive Zahl a_1, derart, daß Ungl. (A) erfüllt ist für $a = a_1$ und alle x, deren absoluter Betrag eine bestimmte positive Zahl R_1 übersteigt. Möglicherweise ist dann dieses a_1 schon die *kleinste* Zahl, welche die Existenz der fraglichen Relation nach sich zieht. Wenn *nicht*, so steht es frei, a_1 noch zu *verkleinern*. In jedem Falle wird man sagen können, daß die durch Ungl. (A) mit dem Zusatze $|x| > R_1$ charakterisierten Zahlen a_1 eine bestimmte *untere Grenze* α_1 besitzen, d. h. es gibt eine bestimmte, dem Intervall $0 \leq \alpha_1 \leq a_1$ angehörige Zahl α_1 von der Beschaffenheit, daß bei *beliebig kleinem* $\varepsilon > 0$:

$$\text{(5)} \qquad |G(x)| \begin{cases} < e^{|x|^{\alpha_1+\varepsilon}} \text{ für } \textit{alle } |x| > R_1, \\ > e^{|x|^{\alpha_1-\varepsilon}} \text{ für } \textit{mindestens ein } x \text{ des Bereiches } |x| > R_1. \end{cases}$$

Wird jetzt $R_2 > R_1$ angenommen, so gehört analog zu R_2 eine Zahl $\alpha_2 \geqq 0$, derart, daß bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

$$|G(x)| \begin{cases} < e^{|x|^{\alpha_2+\varepsilon}} & \text{für } alle\ |x| > R_2, \\ > e^{|x|^{\alpha_2-\varepsilon}} & \text{für } mindestens\ ein\ x \text{ des Bereiches } |x| > R_2. \end{cases}$$

Dabei kann nur $\alpha_2 \leqq \alpha_1$ sein, da die *erste* dieser Ungleichungen wegen $R_2 > R_1$ infolge der *ersten* Ungl. 5 *sicher* besteht, wenn $\alpha_2 = \alpha_1$ angenommen wird, die *zweite* aus dem nämlichen Grunde *niemals* bestehen kann, wenn $\alpha_2 > \alpha_1$. Bedeutet also

$$R_1,\ R_2 \cdots R_\nu \cdots$$

eine beliebige Folge *positiver, monoton ins Unendliche wachsender* Zahlen, so entspricht derselben eine *niemals zunehmende* Folge *nicht-negativer* Zahlen:

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_\nu \geqq \cdots$$

von *der* Beschaffenheit, daß bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

(6) $$|G(x)| \begin{cases} < e^{|x|^{\alpha_\nu+\varepsilon}} & \text{für } alle\ |x| > R_\nu, \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots), \\ > e^{|x|^{\alpha_\nu-\varepsilon}} & \text{für } mindestens\ ein\ x \text{ des Bereiches } |x| > R_\nu. \end{cases}$$

Die Folge der α_ν besitzt alsdann einen bestimmten *Grenzwert*, etwa:

(7) $$\lim_{\nu=\infty} \alpha_\nu = \alpha \geqq 0,$$

welcher offenbar von der besonderen Wahl der Folge (R_ν) völlig *unabhängig* ist. Denn läßt man an die Stelle der Folge (R_ν) irgend eine andere monoton ins Unendliche wachsende Folge (R'_μ) treten, so gehört zu jedem μ ein ν, derart, daß:

$$R_\nu \leqq R'_\mu < R_{\nu+1}.$$

Wird also die nach Art der (α_ν) gebildete Folge, welche der Folge (R'_μ) zugehört, mit (α'_μ) bezeichnet, so hat man nach dem oben gesagten:

$$\alpha_\nu \leqq \alpha'_\mu \leqq \alpha_{\nu+1}, \quad \text{also auch: } \lim_{\mu=\infty} \alpha'_\mu = \alpha.$$

Die Zahl α erscheint also als eine für die betrachtete Funktion $G(x)$ *charakteristische*, deren endgültige Bedeutung sich in folgender Weise angeben läßt. Wird $\delta > 0$ *beliebig klein* vorgeschrieben, so läßt sich eine natürliche Zahl n_δ so fixieren, daß:

$$\alpha_{n_\delta} \leqq \alpha + \frac{\delta}{2}, \quad \text{also: } \alpha_{n_\delta} + \frac{\delta}{2} \leqq \alpha + \delta,$$

und es besteht demnach, wenn man in der *ersten* Ungleichung (6) $\nu = n_\delta$, $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ setzt, die Beziehung:

(8) $$|G(x)| < e^{|x|^{\alpha+\delta}} \quad \text{für } alle\ |x| > R_{n_\delta}.$$

Andererseits hat man für *jedes* ν:

$$\alpha_\nu > \alpha - \frac{\delta}{2}, \quad \text{also: } \alpha_\nu - \frac{\delta}{2} > \alpha - \delta,$$

sodaß aus der *zweiten* Ungleichung (6) vermittelst der Annahme $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ sich ergibt:

(9) $\quad |G(x)| > e^{|x|^{\alpha - \delta}}$ für *mindestens ein* x des Bereiches $|x| > R_\nu$.

Da hier ν jede der Zahlen $1, 2, 3, \cdots$ bedeuten kann und $\lim\limits_{\nu=\infty} R_\nu = \infty$ ist, so besteht also die letzte Ungleichung für *unendlich viele* x, unter denen auch *beliebig große* vorkommen.

Schreibt man schließlich noch R_δ statt R_{n_δ} oder, noch etwas prägnanter, bezeichnet man mit R_δ die *untere Grenze* aller möglichen R_{n_δ}, so läßt sich das in Ungl. (8) und (9) enthaltene Resultat in folgender Weise formulieren:

Jede ganze Funktion von ***endlicher*** *Ordnung ist von ganz* ***bestimmter*** *Ordnung* α*); *d. h. genügt* $G(x)$ *einer Relation von der Form* (A), *so existiert eine***) *bestimmte Zahl* $\alpha \geqq 0$ *von der Beschaffenheit, daß bei beliebig kleinem* $\delta > 0$ *stets:*

$$\text{(B)} \qquad |G(x)| \begin{cases} < e^{|x|^{\alpha+\delta}} & \textit{für alle } |x| > R_\delta, \\ > e^{|x|^{\alpha-\delta}} & \textit{für gewisse beliebig große } x. \end{cases}$$

3. In dem besonderen Falle $\alpha = 0$, dessen Möglichkeit nach dem bisher gesagten keineswegs ausgeschlossen erscheint***), wird der Wert der *zweiten* Ungleichung (B) offenbar illusorisch: dieselbe enthält dann lediglich die triviale Aussage, daß für *gewisse beliebig große* x $|G(x)| > 1$ ausfällt. Will man hier eine wirklich *brauchbare*, d. h. mit $|x|$ noch *ins Unendliche* wachsende und daher zur Charakterisierung des *Unendlichwerdens* von $|G(x)|$ geeignete *untere* Schranke für $|G(x)|$ erhalten, so muß man von vornherein statt des Exponenten $|x|^\alpha$ eine Funktion einführen, die *langsamer* wächst, als jede *noch so niedrige* Potenz $|x|^\alpha$, dagegen immerhin *schneller* als jedes *noch so große* Multiplum von $\lg |x|$ (wegen $e^{n \cdot \lg |x|} = |x|^n$), und die dann eventuell auch zur Herabminderung der *oberen* Schranke $e^{|x|^\delta}$ dienen kann. Es wird hiernach zweckmäßig er-

---

*) Französische Autoren bezeichnen nach dem Vorgange von Borel das, was hier schlechthin „*Ordnung*" genannt wird, (wie mir scheint, nicht sehr glücklich) als „*ordre apparent*", während dann „*ordre réel*" als gleichbedeutend mit der weiter unten (s. § 8, Nr. 2, p. 293) einzuführenden Bezeichnung „*Grenzexponent*" gebraucht wird.

**) Daß es *nur eine* Zahl α geben kann, für welche die *beiden* Ungleichungen (B) in dem angegebenen Umfange bestehen, ist unmittelbar einleuchtend.

***) Beispiele für das wirkliche Vorkommen dieses Falles s. p. 316, Fußn. 1. Vgl. auch p. 328, Fußn. 4.

scheinen, den Begriff der Funktionen *endlicher* Ordnung noch dahin einzuschränken, daß man darunter nur Funktionen von *endlicher, nicht verschwindender* Ordnung versteht. Dabei wird aber festzuhalten sein, daß alle Resultate, welche von der in (B) auftretenden *oberen* Schranke herrühren, auch noch für den Fall $\alpha = 0$, also für die Funktionen *nullter* Ordnung gültig und brauchbar bleiben, während dagegen die auf der Existenz der *unteren* Schranke (B) beruhenden illusorisch werden*)

Im übrigen wird offenbar die soeben angedeutete *Einengung* der Schranken (B), welche bei den Funktionen *nullter* Ordnung für eine genauere Charakterisierung des infinitären Verhaltens sich geradezu als *notwendig* erwies, auch bei den Funktionen von (nicht verschwindender) *endlicher* Ordnung *möglich* und zur Verschärfung gewisser Resultate auch *wünschenswert* erscheinen. Bei der Herstellung solcher *engerer* Schranken hätte man offenbar in ganz analoger Weise zu verfahren, wie bei der successiven Verschärfung der Kriterien für die absolute Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen. Doch soll von der Durchführung dieses Prinzips hier vollständig abgesehen**) und lediglich noch die *folgende* besonders einfache und, wie sich zeigen wird, auch nützliche Verschärfung der Grenzbedingungen (B) in Betracht gezogen werden.

4. Es sei $G(x)$ *von der Ordnung* α. Dann ist offenbar der Fall denkbar und, wie die oben schon erwähnten einfachen Beispiele

$$e^{x^n}, \qquad x^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'$$

unmittelbar erkennen lassen, auch tatsächlich vorhanden, daß für alle hinlänglich großen x nicht nur, wie die erste Ungleichung (B) es verlangt:

$$|G(x)| < e^{|x|^{\alpha+\delta}},$$

sondern sogar für irgend ein $c > 0$:

$$\text{(C)} \qquad |G(x)| < e^{c \cdot |x|^{\alpha}}.$$

Hat man sodann speziell:

$$\text{(10)} \qquad |G(x)| < e^{c_1 \cdot |x|^{\alpha}}, \quad \text{für } |x| > R_1,$$

so haben wiederum bei festgehaltenem R_1 die Zahlen c_1, für welche diese Ungleichung möglich ist, eine bestimmte *untere Grenze* γ_1, die sich *keinesfalls erhöhen* kann, wenn man R_1 successive durch *größere* Zahlen $R_2, R_3, \cdots$ ersetzt. Man gelangt auf diese Weise durch Benützung der

---

*) Analoge Bemerkungen gelten natürlich für ganze Funktionen von der Ordnung ∞, d. h. solche, welche für gewisse beliebig große x stärker anwachsen, als $e^{|x|^{\beta}}$ für *jedes noch so große* $\beta > 0$.

**) Derartige Untersuchungen findet man bei E. Lindelöf, a. a. O.; vgl. insbesondere p. 25. 45.

nämlichen Schlüsse, wie in Nr. 2, zunächst zu einer Folge *niemals zunehmender*, *nicht-negativer* Zahlen γ_ν $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ von *der* Beschaffenheit, daß bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ (vgl. Ungl. (6)):

$$(11)\quad |G(x)| \begin{cases} < e^{(\gamma_\nu + \varepsilon)\cdot |x|^\alpha} \text{ für } alle\ |x| > R_\nu, & (\nu = 1, 2, 3, \cdots) \\ > e^{(\gamma_\nu - \varepsilon)\cdot |x|^\alpha} \text{ für } mindestens\ ein\ x \text{ des Bereiches } |x| > R_\nu, \end{cases}$$

und schließlich zu einer durch die Gleichung:

$$(12)\qquad \gamma = \lim_{\nu=\infty} \gamma_\nu$$

definierten, übrigens von der Wahl der R_ν durchaus *unabhängigen* und für die Funktion $G(x)$ *charakteristischen* nicht-negativen Zahl γ, welche die Eigenschaft besitzt, daß bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ (vgl. Ungl. (B)):

$$(\mathrm{D})\qquad |G(x)| \begin{cases} < e^{(\gamma+\varepsilon)\cdot |x|^\alpha} \textit{ für alle } |x| > R_\varepsilon, \\ > e^{(\gamma-\varepsilon)\cdot |x|^\alpha} \textit{ für gewisse beliebig große } x. \end{cases}$$

Ist hierbei $\gamma > 0$, in welchem Falle man den Ungleichungen (D) durch Substitution von $\gamma\varepsilon$ für ε auch die Form geben kann:

$$(\mathrm{D}')\qquad |G(x)| \begin{cases} < e^{(1+\varepsilon)\cdot\gamma\cdot |x|^\alpha}, \\ > e^{(1-\varepsilon)\cdot\gamma\cdot |x|^\alpha}, \end{cases}$$

so soll gesagt werden, es gehöre $G(x)$ dem *Normaltypus* γ der *Ordnung* α, kürzer: dem *Normaltypus* (α, γ) an.

Ist dagegen speziell $\gamma = 0$, in welchem Falle die *erste* der Ungleichungen (D) die Form annimmt:

$$(\mathrm{E}_1)\qquad |G(x)| < e^{\varepsilon\cdot |x|^\alpha} \textit{ für jedes } \varepsilon > 0 \textit{ und alle } |x| > R_\varepsilon,$$

während die Brauchbarkeit der *zweiten* illusorisch wird und an ihre Stelle lediglich die ursprüngliche zweite Ungleichung (B) tritt, d. h.:

$$(\mathrm{E}_2)\qquad |G(x)| > e^{|x|^{\alpha-\delta}} \textit{ für jedes } \delta > 0 \textit{ und gewisse beliebig große } x,$$

so soll gesagt werden, es gehöre $G(x)$ dem *Minimaltypus* der *Ordnung* α, kürzer: dem *Minimaltypus* (α) an.

Hierzu sei noch ausdrücklich bemerkt, daß die Existenz von Ungl. (E_1) für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ *keineswegs* diejenige von Ungl. (E_2) für jedes noch so kleine $\delta > 0$ *ausschließt.* Denn, wie klein auch $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ angenommen werden mögen, so hat man stets:

$$(13)\qquad \varepsilon \cdot |x|^\delta > 1, \quad \text{wenn: } |x| > R = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}},$$

und sodann durch Multiplikation mit $|x|^{\alpha-\delta}$:

$$(14)\qquad \varepsilon \cdot |x|^\alpha > |x|^{\alpha-\delta} \text{ für } |x| > R,$$

sodaß die *gleichzeitige* Existenz der Ungleichungen (E_1) und (E_2) keinen Widerspruch enthält.

Als Resultat dieser letzten Betrachtung ergibt sich also:

Genügt eine ganze Funktion $G(x)$ von der Ordnung α einer Relation von der Form (C): $|G(x)| < e^{c \cdot |x|^\alpha}$ *für* $|x| > R$, *so gehört $G(x)$ entweder dem* ***Normal-*** *oder dem* ***Minimaltypus*** *an; d. h.: Es gibt entweder eine bestimmte positive Zahl γ, welche gestattet, die* ***beiden*** *definierenden Ungleichungen* (B) *durch die präziseren Ungleichungen* (D) *oder* (D') *zu ersetzen;* oder es läßt sich die *erste* Ungleichung (B) durch die *sehr viel stärkere* (E_1) *ersetzen.*

Es bleibt noch als *zweite*, ausschließlich vorhandene Möglichkeit der Fall zu untersuchen, daß $G(x)$ *keiner* Relation von der Form (C) genügt. Dann müssen offenbar, *wie groß* auch die positive Zahl c angenommen wird, unter *beliebig großen* Werten von x immer wieder solche vorkommen, für welche:

$$(15) \qquad |G(x)| > e^{c \cdot |x|^\alpha}$$

ausfällt. In diesem Falle läßt sich also die *zweite* Ungleichung (B) durch die *sehr viel stärkere* (15) in *dem* Sinne ersetzen, daß es freisteht c *unbegrenzt zu vergrößern.* Für jedes *nicht* dem *Normal-* oder *Minimal*typus angehörige $G(x)$ von der Ordnung α bestehen demnach die charakteristischen Ungleichungen:

$$(\mathrm{F}) \qquad |G(x)| \begin{cases} < e^{|x|^{\alpha+\delta}} & \text{für } \textit{jedes } \delta > 0 \text{ und } \textit{alle } |x| > R_\delta, \\ > e^{\frac{1}{\varepsilon} \cdot |x|^\alpha} & \textit{für jedes } \varepsilon > 0 \textit{ und gewisse beliebig große } x. \end{cases}$$

Alsdann soll gesagt werden, es gehöre $G(x)$ dem *Maximaltypus* der Ordnung α, kürzer: dem *Maximaltypus* (α) an.

Hiernach lassen sich die Hauptergebnisse dieses Paragraphen schließlich in folgender Weise zusammenfassen:

Ist eine ganze Funktion $G(x)$ überhaupt von ***endlicher*** *Ordnung, so ist sie nicht nur von* ***bestimmter*** *Ordnung α, sondern sie gehört, sofern nur $\alpha > 0$,* ***einem bestimmten*** *von drei wohldefinierten* ***Haupttypen*** *an. Mit anderen Worten: Steht von vornherein nur fest, daß für $G(x)$ eine Relation von der Form* (A) *existiert, so genügt $G(x)$ nicht nur den beiden Ungleichungen* (B), *sondern einem der drei* ***spezielleren Ungleichungspaare*** (D), (E), (F).

§ 2.

Eine Koeffizienteneigenschaft von $G(x)$, welche aus der Existenz einer *oberen* Schranke für $|G(x)|$ folgt.

Hauptsatz I. *Genügt die beständig konvergierende Reihe* $\sum_0^\infty{}_\nu\, c_\nu x^\nu$ *für alle* x, *deren absoluter Betrag eine gewisse positive Zahl übersteigt, einer Relation von der Form:*

(G) $$\left|\sum_0^\infty{}_\nu\, c_\nu x^\nu\right| \leqq A\cdot e^{\gamma\cdot|x|^\alpha}, \quad (A>0,\ \gamma>0,\ \alpha>0),$$

so hat man:

(g) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot|c_\nu|} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Beweis. Aus (G) folgt auf Grund des Cauchyschen Koeffizientensatzes:

(1) $$|c_\nu x^\nu| \leqq A\cdot e^{\gamma\cdot|x|^\alpha} \qquad (\nu=0,1,2,\cdots;\ |x|>R).$$

Setzt man:

$$|x| = \left(\frac{\nu}{\alpha\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > R, \text{ d. h. } \nu > \alpha\gamma\cdot R^\alpha,$$

so wird:

(2) $$|c_\nu|\cdot\left(\frac{\nu}{\alpha\gamma}\right)^{\frac{\nu}{\alpha}} \leqq A\cdot e^{\frac{\nu}{\alpha}},$$

anders geschrieben:

(3) $$\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{\nu}{\alpha}}\cdot|c_\nu| \leqq A\cdot(\alpha\gamma)^{\frac{\nu}{\alpha}}.$$

Erhebt man in die $\left(\frac{1}{\nu}\right)^{te}$ Potenz, so folgt durch Übergang zur Grenze $\nu=\infty$:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sqrt[\nu]{|c_\nu|} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}},$$

d. h. man erhält die *erste* Form der unter (g) behaupteten Koeffizientenrelation. Um auch die *zweite* zu gewinnen, könnte man sich der Stirlingschen Formel:

$$\nu! = \sqrt{2\pi}\cdot\nu^{\nu+\frac{1}{2}}\cdot e^{-\nu+\frac{\vartheta_\nu}{12\nu}} \qquad (0<\vartheta_\nu<1)$$

bedienen, welche ja für $\nu=\infty$ die Beziehung liefert:

(4) $$\sqrt[\nu]{\nu!} \cong \frac{\nu}{e}\cdot$$

Man kann aber diese letztere Beziehung und somit das gewünschte Resultat auch *ohne* dieses relativ komplizierte Hilfsmittel in folgender, äußerst elementaren Weise herleiten. Man hat:

$$(5)\qquad e^{\nu} = \sum_{0}^{\infty} \lambda \frac{\nu^{\lambda}}{\lambda!} > \frac{\nu^{\nu}}{\nu!}, \quad \text{also:} \quad \nu! > \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\nu}.$$

Andererseits ist:

$$\nu! = \frac{1^2 \cdot 2^3 \cdot 3^4 \cdots (\nu-1)^{\nu} \cdot \nu^{\nu+1}}{2^2 \cdot 3^3 \cdots (\nu-1)^{\nu-1} \cdot \nu^{\nu}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^{\nu} \cdot \nu^{\nu+1} = \nu^{\nu+1} \cdot \prod_{1}^{\nu-1} \lambda \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^{\lambda+1}}$$

und daher mit Benützung der bekannten Beziehung: $\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^{\lambda+1} > e$:

$$(6)\qquad \nu! < \nu^{\nu+1} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{\nu-1} = \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\nu} \cdot \nu e.$$

Durch Zusammenfassung von (5) und (6) ergibt sich also die doppelte Ungleichung:

$$(7)\qquad \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\nu} < \nu! < \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\nu} \cdot \nu e,$$

aus welcher dann unmittelbar die Beziehung (4) resultiert.

Im übrigen findet man auch durch direkte Benützung der *zweiten* Ungleichung (7) und Gleichung (3):

$$(8)\qquad (\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_{\nu}| < A \cdot (\nu e)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot (\alpha\gamma)^{\frac{\nu}{\alpha}}$$

und hieraus durch Erhebung in die $\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\text{te}}$ Potenz und Übergang zur Grenze $\nu = \infty$ die *zweite* Form der Behauptung (f):

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_{\nu}|} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

§ 3.

Eine Koeffizienteneigenschaft von $G(x)$, welche aus der Existenz einer *unteren* Schranke für gewisse $|G(x)|$ folgt.

1. Dem Beweise des weiter unten zu formulierenden *Hauptsatzes* II, welcher das Analogon und die Ergänzung zu dem zuvor abgeleiteten *Hauptsatze* I bildet, schicken wir zunächst zwei Hilfssätze*) voran.

*) Die Verwertung des *Hilfssatzes* I zur Abkürzung eines früher von mir gegebenen elementaren Beweises für den *Hauptsatz* II (Münch. Ber. 32 [1902] p. 165)

Hilfssatz I. *Bedeutet* $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu r^\nu$ *eine beständig konvergierende Reihe mit reellen Koeffizienten und ist für unendlich viele positive* r, *unter denen auch beliebig große vorkommen:*

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu r^\nu \geqq 0, \tag{1}$$

so gibt es unendlich viele Indices m_ν, *für welche:*

$$a_{m_\nu} \geqq 0. \tag{2}$$

Beweis. Angenommen, die Behauptung wäre unrichtig, so müßte von einer bestimmten Stelle ab, etwa $\nu \geqq n$, beständig

$$a_\nu < 0 \tag{3}$$

sein. Andererseits könnte man eine positive Zahl R so fixieren, daß für $r > R$:

$$|a_n| \cdot r^n > \left| \sum_0^{n-1}{}^\nu a_\nu r^\nu \right|, \tag{4}$$

und daher, wegen: $a_n r^n < 0$:

$$\sum_0^n{}^\nu a_\nu r^\nu < 0 \quad (\text{für: } r > R). \tag{5}$$

Da überdies für *jedes* positive r

$$\sum_{n+1}^\infty{}^\nu a_\nu r^\nu < 0 \tag{6}$$

ausfallen müßte, so hätte man schließlich:

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu r^\nu < 0 \quad \text{für } \textit{jedes } r > R, \tag{7}$$

was der Voraussetzung widerspricht. —

Hilfssatz II. *Ist* $\sum_0^\infty b_\nu^\varkappa$, *wo* $\varkappa > 0$, *eine konvergente Reihe mit nicht-negativen Gliedern,* δ *eine beliebig anzunehmende positive Zahl, so hat man:*

(a) Für $\varkappa > 1$: $\displaystyle \sum_0^\infty{}^\nu b_\nu^\varkappa < \left(\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu \right)^\varkappa$,

(b) Für $\varkappa < 1$: $\displaystyle \sum_0^\infty{}^\nu b_\nu^\varkappa \leqq \left(\frac{1+\delta}{\delta} \right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu (1+\delta)^{\left(\frac{1}{\varkappa}-1\right)\cdot\nu} . b_\nu \right)^\varkappa$.

---

verdanke ich Herrn Lüroth (vgl. ebendas. p. 295), von dem auch der Grundgedanke zur Abkürzung des von mir ursprünglich gegebenen Beweises von *Hilfssatz* II herrührt.

Beweis. Setzt man:

$$\sum_0^\infty {}_\nu b_\nu = B\ ^{*)},$$

so besteht für jedes ν die Beziehung:

$$\frac{b_\nu}{B} < 1, \tag{8}$$

und daher auch, falls $\varkappa > 1$, die folgende:

$$\left(\frac{b_\nu}{B}\right)^{\varkappa - 1} < 1,$$

also:

$$\left(\frac{b_\nu}{B}\right)^{\varkappa} < \frac{b_\nu}{B}. \tag{9}$$

Substituiert man hier $\nu = 0, 1, 2, \cdots, n$, so folgt durch Summation und Übergang zur Grenze $n = \infty$:

$$\frac{1}{B^\varkappa} \cdot \sum_0^\infty {}_\nu b_\nu^\varkappa < \frac{1}{B} \cdot \sum_0^\infty {}_\nu b_\nu = 1, \tag{10}$$

also in der Tat, wie unter (a) behauptet:

$$\sum_0^\infty {}_\nu b_\nu^\varkappa < \left(\sum_0^\infty {}_\nu b_\nu\right)^\varkappa \qquad (\varkappa > 1). \tag{a}$$

Um die Richtigkeit von (b) zu beweisen, werde gesetzt:

$$\sum_0^\infty {}_\nu a_\nu = A, \quad \sum_0^\infty {}_\nu a_\nu c_\nu = S, \tag{11}$$

wobei vorläufig Σa_ν, $\Sigma a_\nu c_\nu$ *irgend zwei konvergente* Reihen mit nichtnegativen Gliedern bedeuten sollen. Ist sodann für $\varkappa < 1$ auch noch die Reihe $\Sigma a_\nu c_\nu^\varkappa$ *konvergent*, so besteht die Identität:

$$\sum_0^\infty {}_\nu a_\nu c_\nu^\varkappa = \left(\frac{S}{A}\right)^\varkappa \cdot \sum_0^\infty {}_\nu a_\nu \cdot \left(\frac{A}{S} \cdot c_\nu\right)^\varkappa. \tag{12}$$

---

*) Hiermit wird also Σb_ν ohne weiteres als *konvergent* angesehen. Die Richtigkeit dieser Annahme folgt in der Tat unmittelbar aus der vorausgesetzten Konvergenz von $\Sigma b_\nu^\varkappa$, falls $\varkappa < 1$. Ist dagegen $\varkappa > 1$, so *könnte* Σb_ν immerhin *divergieren*. In diesem Falle würde offenbar Ungleichung (a) etwas allemal *richtiges*, aber *wertloses* aussagen: es kommt also auch hier lediglich der Fall der *Konvergenz* von Σb_ν ernstlich in Betracht.

Nun gilt aber für jedes $a > 0$, $\varkappa < 1$ die bekannte Beziehung*):

$$a^{\varkappa} \leqq 1 + \varkappa(a-1),$$

also:

(13) $$\left(\frac{A}{S}\cdot c_{\nu}\right)^{\varkappa} < 1 + \varkappa\cdot\left(\frac{A}{S}\cdot c_{\nu} - 1\right).$$

Durch Multiplikation mit a_{ν}, Substitution von $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ und Summation ergibt sich hieraus:

(14) $$\sum_0^{\infty}{}^{\nu}\, a_{\nu}\cdot\left(\frac{A}{S}\cdot c_{\nu}\right)^{\varkappa} < \sum_0^{\infty}{}^{\nu}\, a_{\nu} + \varkappa\left(\frac{A}{S}\cdot\sum_0^{\infty}{}^{\nu}\, a_{\nu} c_{\nu} - \sum_0^{\infty}{}^{\nu}\, a_{\nu}\right) = \sum_0^{\infty}{}^{\nu}\, a_{\nu},$$

und daher mit Benützung der Identität (12):

$$\sum_0^{\infty}{}^{\nu}\, a_{\nu} c_{\nu}^{\varkappa} < \left(\frac{S}{A}\right)^{\varkappa}\cdot\sum_0^{\infty}{}^{\nu}\, a_{\nu} = \left(\sum_0^{\infty}{}^{\nu}\, a_{\nu}\right)^{1-\varkappa}\cdot\left(\sum_0^{\infty}{}^{\nu}\, a_{\nu} c_{\nu}\right)^{\varkappa}.$$

Setzt man jetzt noch:

(15) $$a_{\nu} = \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{\nu}, \quad a_{\nu} c_{\nu}^{\varkappa} = b_{\nu}^{\varkappa},$$

also:

$$\sum_0^{\infty}{}^{\nu}\, a_{\nu} = \frac{1+\delta}{\delta}, \qquad c_{\nu} = a_{\nu}^{-\frac{1}{\varkappa}}\cdot b_{\nu} = (1+\delta)^{\frac{\nu}{\varkappa}}\cdot b_{\nu},$$

so folgt, wie unter (b) behauptet wurde:

(b) $$\sum_0^{\infty}{}^{\nu}\, b_{\nu}^{\varkappa} < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-\varkappa}\cdot\left(\sum_0^{\infty}{}^{\nu}\,(1+\delta)^{\left(\frac{1}{\varkappa}-1\right)\nu}\cdot b_{\nu}\right)^{\varkappa} \qquad (\varkappa < 1).$$

2. **Hauptsatz II.** *Genügt die beständig konvergierende Reihe* $\sum_0^{\infty}{}^{\nu}\, C_{\nu} x^{\nu}$ *für unendlich viele* x, *unter denen auch beliebig große vorkommen, einer Relation von der Form:*

(H) $$\left|\sum_0^{\infty}{}^{\nu}\, C_{\nu} x^{\nu}\right| \geqq A\cdot e^{\gamma\cdot|x|^{\alpha}} \quad (A>0,\ \gamma>0,\ \alpha>0),$$

so hat man:

(h) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sqrt[\nu]{|C_{\nu}|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot|C_{\nu}|} \geqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Beweis. Es werde zunächst $\alpha = 1$ angenommen. Setzt man sodann $|x| = r$, so resultiert aus der Voraussetzung ~~(G)~~ (H) *a fortiori* die folgende:

*) Eine völlig elementare Herleitung dieser Ungleichung s. Münch. Ber. 32 (1902) p. 176, 300.

$$(16)\qquad \sum_0^\infty {}_\nu |C_\nu| \cdot r^\nu \geqq A \cdot e^{\gamma r} = A \cdot \sum_0^\infty {}_\nu \frac{\gamma^\nu r^\nu}{\nu!},$$

sodaß also für unendlich viele r, unter denen auch beliebig große vorkommen, die Beziehung besteht:

$$(17)\qquad \sum_0^\infty {}_\nu \frac{1}{\nu!}\left(\nu! \, |C_\nu| - A\gamma^\nu\right) \cdot r^\nu \geqq 0.$$

Man hat somit nach Hilfssatz I für *unendlich viele* m_ν:

$$(18)\qquad m_\nu! \, |C_{m_\nu}| \geqq A \cdot \gamma^{m_\nu}$$

und, mit Benützung der aus Ungl. (7), p. 267 entspringenden Beziehung:

$$\left(\frac{m_\nu}{e}\right)^{m_\nu} > \frac{1}{m_\nu e} \cdot m_\nu!$$

auch:

$$(19)\qquad \left(\frac{m_\nu}{e}\right)^{m_\nu} \cdot |C_{m_\nu}| > A \cdot \frac{1}{m_\nu e} \gamma^{m_\nu}.$$

Erhebt man die beiden Ungleichungen (18), (19) in die $\left(\frac{1}{m_\nu}\right)^{\text{te}}$ Potenz, so liefern sie durch Übergang zur Grenze die Beziehung:

$$(20)\qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{\nu}{e} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu! \, |C_\nu|} \geqq \gamma,$$

welche mit der unter (g) behaupteten für den Fall $\alpha = 1$ zusammenfällt.

Ist jetzt α von 1 verschieden, so bringe man die auf Grund der Voraussetzung ~~(G)~~ (H) *a fortiori* bestehende Ungleichung:

$$(21)\qquad \sum_0^\infty {}_\nu |C_\nu x^\nu| \geqq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha} \quad (\text{für } \textit{gewisse beliebig große } x)$$

durch die Substitution

$$|x| = r^{\frac{1}{\alpha}}$$

auf die Form:

$$(22)\qquad \sum_0^\infty {}_\nu |C_\nu| \cdot r^{\frac{\nu}{\alpha}} \equiv \sum_0^\infty {}_\nu \left(|C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqq A \cdot e^{\gamma r}.$$

Man hat sodann im Falle $\alpha < 1$ nach Ungl. (a) des Hilfssatzes II (indem man dort $\varkappa = \frac{1}{\alpha}$, $b_\nu = |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu$ setzt):

$$(23)\qquad \sum_0^\infty {}_\nu \left(|C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu\right)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(\sum_0^\infty {}_\nu |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

und daher, wenn man diese Ungleichung in die α^{te} Potenz erhebt, mit Berücksichtigung von Ungl. (22):

$$(24)\qquad \sum_0^\infty {}_\nu |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu > A^\alpha \cdot e^{\alpha\gamma r} \quad \text{(für \textit{gewisse beliebig große} } r\text{)},$$

sodaß sich mit Benützung des bereits gefundenen, in Ungl. (20) enthaltenen Spezialresultates ergibt:

$$(25)\qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \frac{\nu}{e} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|^\alpha} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \sqrt[\nu]{\nu!\,|C_\nu|^\alpha} \geqq \alpha\gamma \qquad (\alpha < 1).$$

Im Falle $\alpha > 1$ hat man analog nach Ungl. (b) des Hilfssatzes II:

$$(26)\qquad \sum_0^\infty {}_\nu (|C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{\alpha}} \cdot \left(\sum_0^\infty {}_\nu (1+\delta)^{(\alpha-1)\cdot\nu} \cdot |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

folglich, wenn man diese Ungleichung wiederum in die α^{te} Potenz erhebt, mit Berücksichtigung von Ungl. (22):

$$(27)\qquad \begin{aligned} \sum_0^\infty {}_\nu (1+\delta)^{(\alpha-1)\cdot\nu} \cdot |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu &> \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{\alpha-1} \cdot \left(\sum_0^\infty {}_\nu (|C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha \\ &\geqq \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{\alpha-1} \cdot A^\alpha \cdot e^{\alpha\gamma r}, \end{aligned}$$

und, wenn man noch r durch $(1+\delta)^{1-\alpha} \cdot r$ ersetzt:

$$(28)\qquad \sum_0^\infty {}_\nu |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu > \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{\alpha-1} \cdot A^\alpha \cdot e^{\alpha\gamma(1+\delta)^{1-\alpha}\cdot r},$$

Hieraus würde sich mit Hilfe von Ungl. (20) zunächst ergeben:

$$(29)\qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \frac{\nu}{e} \sqrt[\nu]{|C_\nu|^\alpha} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \sqrt[\nu]{\nu!\,|C_\nu|^\alpha} \geqq (1+\delta)^{1-\alpha} \cdot \alpha\gamma.$$

Da aber $\delta > 0$ unbegrenzt verkleinert werden darf, so folgt schließlich:

$$(30)\qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \frac{\nu}{e} \sqrt[\nu]{|C_\nu|^\alpha} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \sqrt[\nu]{\nu!\,|C_\nu|^\alpha} \geqq \alpha\gamma \qquad (\alpha > 1).$$

Durch Erhebung der Relationen (25), (30) in die $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{te}$ Potenz und Zusammenfassung mit Ungl. (20) ergibt sich also, wie behauptet:

$$(\text{h})\qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |C_\nu|} \geqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

für *jedes* positive α.

§ 4.

Umkehrbare Beziehungen zwischen der Ordnungszahl von $G(x)$ und dem infinitären Verhalten der Koeffizienten.

1. Die in § 2, § 3 bewiesenen Hauptsätze sind in der gegebenen Form *nicht* ohne weiteres *umkehrbar*. Dagegen lassen sich die betreffenden Voraussetzungen in verschiedener Art so *erweitern*, daß die entsprechenden Sätze *umkehrbar* werden.

Satz I. *Ist bei beliebig kleinen* $\varepsilon > 0$:

$$(\mathrm{I}_1) \qquad \left|\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu x^\nu\right| < e^{(1+\varepsilon)\cdot\gamma\cdot|x|^\alpha} \quad \textit{für alle } |x| > R_\varepsilon,$$

$$(\mathrm{I}_2) \qquad \left|\sum_0^\infty{}^\nu C_\nu x^\nu\right| > e^{(1-\varepsilon)\cdot\gamma\cdot|x|^\alpha} \quad \textit{für gewisse beliebig große } x,$$

so bestehen die Beziehungen:

$$(\mathrm{i}_1) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot|c_\nu|} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$(\mathrm{i}_2) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot|C_\nu|} \geqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}},$$

*und umgekehrt**).

---

*) Setzt man:

$$(\alpha\gamma e)^{\frac{1}{\alpha}} = \varkappa, \quad \text{also:} \quad \gamma = \frac{\varkappa^\alpha}{\alpha e},$$

so nimmt die fragliche Umkehrung die folgende Form an:

Aus den Voraussetzungen:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sqrt[\nu]{|c_\nu|} \leqq \varkappa,$$

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sqrt[\nu]{|C_\nu|} \geqq \varkappa$$

folgt allemal:

$$\left|\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu x^\nu\right| < e^{\frac{1+\varepsilon}{\alpha e}\cdot|\varkappa x|^\alpha},$$

$$\left|\sum_0^\infty{}^\nu C_\nu x^\nu\right| > e^{\frac{1-\varepsilon}{\alpha e}\cdot|\varkappa x|^\alpha}$$

in dem oben näher bezeichneten Umfange.

Eine sehr kurze und verhältnismäßig elementare Herleitung dieser Beziehungen gibt Herr E. Lindelöf in einer Note, welche mir während der Drucklegung dieser Abhandlung zuging: „Sur la détermination de la croissance des fonctions entières etc.“ Bull. des sc. math. (2) T. 27 (1903). Eine *vollkommen* elementare Modifikation der

Beweis. Aus der Voraussetzung (I_1) würde auf Grund des Hauptsatzes I (Ungl. (G), (g), p. 266) zunächst folgen, daß für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} \leqq ((1+\varepsilon)\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Da aber diese Grenzwerte, wenn sie überhaupt unter einer endlichen Schranke liegen, eindeutig bestimmte Zahlen vorstellen und andererseits ε unbegrenzt verkleinert werden darf, so ergibt sich unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung (i_1).

Das analoge gilt bezüglich der Herleitung von Ungl. (i_2).

Die *Umkehrbarkeit* dieser Resultate läßt sich sodann in folgender Weise *indirekt* beweisen. Angenommen, es bestehe die Voraussetzung (i_1) und es sei *nicht* möglich, *jedem beliebig kleinen* $\varepsilon > 0$ ein R_ε so zuzuordnen, daß Ungl. (I_1) für $|x| > R_\varepsilon$ *beständig* erfüllt ist: alsdann müßte ein bestimmtes $\varepsilon' > 0$ existieren, derart daß unter *beliebig großen* x immer wieder solche vorkommen, für welche:

$$\left|\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu x^\nu\right| \geqq e^{(1+\varepsilon')\cdot\gamma\cdot|x|^\alpha}.$$

Hieraus würde aber nach dem Hauptsatze II (Formel (H), (h) p. 270) folgen, daß:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} \geqq ((1+\varepsilon')\cdot\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}},$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Analog würde die Annahme, daß die Beziehung (I_2) *nicht* allemal aus der Voraussetzung (i_2) resultiere, die Existenz einer Ungleichung von der Form:

$$\left|\sum_0^\infty{}^\nu C_\nu x^\nu\right| \leqq e^{(1-\varepsilon')\cdot\gamma\cdot|x|^\alpha}$$

nach sich ziehen und somit schließlich im Widerspruche mit der Voraussetzung auf die Relation:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |C_\nu|} \leqq ((1-\varepsilon')\cdot\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}$$

führen.

Lindelöfschen Methode findet man in einem *Nachtrage* am Schlusse der vorliegenden Abhandlung.

2. Satz II. *Ist bei beliebig kleinem* $\varepsilon > 0$:

$$\left|\sum_0^\infty c_\nu x^\nu\right| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\alpha} \quad \textit{für alle } |x| > R_\varepsilon, \tag{K$_1$}$$

$$\left|\sum_0^\infty C_\nu x^\nu\right| > e^{\frac{1}{\varepsilon} \cdot |x|^\alpha} \quad \textit{für gewisse beliebig große } x, \tag{K$_2$}$$

so bestehen die Beziehungen:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} = 0, \tag{k$_1$}$$

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |C_\nu|} = \infty, \tag{k$_2$}$$

und umgekehrt.

Beweis. Aus den Voraussetzungen (K_1), (K_2) würde auf Grund der Hauptsätze I, II zunächst folgen, daß:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} \leqq (\alpha\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |C_\nu|} \geqq \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Da es aber freisteht, $\varepsilon > 0$ unbegrenzt zu verkleinern, so müssen die fraglichen Grenzwerte geradezu $= 0$ bezw. $= \infty$ ausfallen. Infolgedessen ist es auch gestattet, im ersten Gliede *beider* Relationen den Faktor $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ einfach wegzulassen, außerdem in der *ersten* Relation das Zeichen $\overline{\lim}$ durch $\lim$ zu ersetzen, sodaß sich in der Tat die Ungleichungen (k_1), (k_2) ergeben.

Die Umkehrbarkeit dieser Resultate erkennt man dann wiederum unmittelbar auf indirektem Wege, ganz analog wie bei Satz I. —

3. Satz III. *Ist bei beliebig kleinem* $\delta > 0$;

$$\left|\sum_0^\infty c_\nu x^\nu\right| < e^{|x|^{\alpha+\delta}} \quad \textit{für alle } |x| > R_\delta, \tag{L$_1$}$$

$$\left|\sum_0^\infty C_\nu x^\nu\right| > e^{|x|^{\alpha-\delta}} \quad \textit{für gewisse beliebig große } x, \tag{L$_2$}$$

so bestehen für jedes beliebig kleine $\delta > 0$ die Beziehungen:

$$(\mathrm{l}_1) \qquad \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot |c_\nu|} = 0,$$

$$(\mathrm{l}_2) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot |C_\nu|} = \infty,$$

und umgekehrt.

Beweis. Denkt man sich δ beliebig klein fixiert, so besteht auf Grund der Voraussetzung (L_1) für alle hinlänglich großen x (nämlich für $|x| > R_{\frac{1}{2}\delta}$) die Beziehung:

$$\left|\sum_0^\infty{}^{\nu} c_\nu x^\nu\right| < e^{|x|^{\alpha+\frac{\delta}{2}}} = e^{\left|\frac{1}{x}\right|^{\frac{\delta}{2}} \cdot |x|^{\alpha+\delta}}.$$

Wie klein jetzt auch $\varepsilon > 0$ vorgeschrieben werden möge, so kann man durch hinlängliche Vergrößerung von $|x|$ stets erzielen, daß $\left|\frac{1}{x}\right|^{\frac{\delta}{2}} < \varepsilon$ ausfällt. Dann ergibt sich aber aus Satz II (Ungl. (k_1)), daß für *dieses* und somit schließlich für *jedes* $\delta > 0$:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot |c_\nu|} = 0,$$

wie unter (l_1) behauptet wurde. Das analoge gilt bezüglich der Behauptung (l_2).

Auch hier erkennt man die Umkehrbarkeit der betreffenden Resultate mit Hilfe des in Satz I benützten indirekten Beweisverfahrens. —

4. Ersetzt man in den vorstehenden Sätzen I, II, III die mit C_ν bezeichneten Koeffizienten durch c_ν, so ergibt sich mit Benützung der in § 1 gegebenen Definitionen das folgende *Hauptresultat**):

Ist $G(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} c_\nu x^\nu$ von der Ordnung $\alpha > 0$, so bestehen bei beliebig kleinem $\delta > 0$ die Beziehungen:

$$(\mathrm{Ia}) \qquad \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot |c_\nu|} = 0,$$

$$(\mathrm{Ib}) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \cdot |c_\nu|} = \infty,$$

*) Literaturangaben s. Münch. Ber. 32 (1902), p. 163, 164.

Gehört $G(x)$ dem Minimal- bezw. Maximaltypus (α) an, so darf man in der ersten bezw. zweiten Relation geradezu $\delta = 0$ setzen, sodaß also:

(IIa) $$\lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} = 0 \quad \text{für den Minimaltypus,}$$

(IIb) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} = \infty \quad \text{für den Maximaltypus.}$$

Gehört $G(x)$ dem Normaltypus (α, γ) an, so wird:

(III) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} = (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{(d. h. endlich und von Null verschieden).}$$

Alle diese Beziehungen sind umkehrbar).*

Man kann den wesentlichen Inhalt dieser Aussagen in folgender Weise zusammenfassen:

Die Ordnung (einschließlich des besonderen Typus) von $G(x) = \sum_0^\infty c_\nu x^\nu$ d. h. das infinitäre Anwachsen der Maxima von $|G(x)|$ ist umkehrbar-eindeutig mit der infinitären Abnahme der $|c_\nu|$ verknüpft.

Auch sei noch ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß also *Ordnung* und *Spezialtypus* von $G(x)$ lediglich von den *Absolutwerten* der c_ν, noch präciser ausgedrückt, von dem infinitären Verhalten dieser Absolutwerte abhängig ist. Im übrigen läßt sich selbstverständlich das infinitäre

*) Dabei bestimmt sich also, wenn:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\nu=\infty} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} \\ \lim\limits_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} |c_\nu|} \end{array}\right\} = \lambda,$$

der „Typus" γ aus der Gleichung:

$$(\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}} = \lambda, \quad \text{also:} \quad \gamma = \frac{\lambda^\alpha}{\alpha}.$$

Man bemerke noch, daß die drei Gleichungen (IIa), (IIb) und (III) *alle* Möglichkeiten erschöpfen, welche das Verhalten von $\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt[\nu]{|c_\nu|}$ darbieten kann. Damit ist also zugleich ein neuer Beweis dafür geliefert, daß jedes $G(x)$ von der Ordnung α *einem* jener drei *Spezialtypen* angehören muß.

Verhalten der $|c_\nu|$ statt durch die oben angegebenen *Grenzgleichungen* auch durch entsprechende *Ungleichungen* für *endliche* ν charakterisieren. Setzt man der bequemeren Schreibweise halber durchweg:

$$\alpha = \frac{1}{\alpha'}$$

und sodann in (Ia):

$$\frac{1}{\alpha+\delta} = \frac{1}{\alpha} - \frac{\delta}{\alpha(\alpha+\delta)} = \alpha' - \delta' \quad \left(\text{also: } \delta' = \frac{\delta}{\alpha(\alpha+\delta)}\right),$$

desgl. in (Ib):

$$\frac{1}{\alpha-\delta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha(\alpha-\delta)} = \alpha' + \delta' \quad \left(\text{also: } \delta' = \frac{\delta}{\alpha(\alpha-\delta)}\right),$$

sodaß also in beiden Fällen δ' *gleichzeitig* mit δ *beliebig klein* wird, so nimmt der zweite Teil der Gleichungen (Ia), (Ib) die Form an:

$$(\mathrm{K}') \quad \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\nu!^{\alpha'-\delta'} \cdot |c_\nu|} = 0, \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!^{\alpha'+\delta'} \cdot |c_\nu|} = \infty \qquad (\text{für jedes } \delta' > 0).$$

Hieraus ergibt sich, daß zum mindesten:

$$|c_\nu| \begin{cases} < \left(\dfrac{1}{\nu!}\right)^{\alpha'-\delta'} & \text{für } \textit{alle hinlänglich großen } \nu, \text{ etwa } \nu > n_{\delta'}, \quad (1\text{a}) \\[2ex] > \left(\dfrac{1}{\nu!}\right)^{\alpha'+\delta'} & \text{für } \textit{gewisse beliebig große } \nu. \quad (1\text{b}) \end{cases}$$

Es läßt sich aber leicht zeigen, daß auch umgekehrt diese letzteren Ungleichungen stets die Existenz der Gleichungen (K′) nach sich ziehen.*) Aus (1a), (1b) folgt nämlich, daß auch:

$$|c_\nu| \begin{cases} < \left(\dfrac{1}{\nu!}\right)^{\alpha'-\frac{\delta'}{2}} = \left(\dfrac{1}{\nu!}\right)^{\frac{\delta'}{2}} \cdot \left(\dfrac{1}{\nu!}\right)^{\alpha'-\delta'} & \text{für } \textit{alle } \nu > n_{\frac{\delta'}{2}}, \\[2ex] > \left(\dfrac{1}{\nu!}\right)^{\alpha'+\frac{\delta'}{2}} = (\nu!)^{\frac{\delta'}{2}} \cdot \left(\dfrac{1}{\nu!}\right)^{\alpha'+\delta'} & \text{für } \textit{gewisse beliebig große } \nu, \end{cases}$$

also:

$$(\nu!)^{\alpha'-\delta'} \cdot |c_\nu| < \left(\frac{1}{\nu!}\right)^{\frac{\delta'}{2}}, \quad (\nu!)^{\alpha'+\delta'} \cdot |c_\nu| > (\nu!)^{\frac{\delta'}{2}} \quad (\text{in dem angegebenen Umfange}),$$

woraus dann unmittelbar die Grenzbeziehungen (K′) hervorgehen.

---

*) Mit anderen Worten: Die Ungleichungen (1a), (1b) sagen infolge der Möglichkeit, δ' beliebig zu verkleinern, *nicht weniger* aus, als die folgenden offenbar gleichfalls aus (K′) resultierenden:

$$|c_\nu| \begin{cases} < \dfrac{\varepsilon^\nu}{(\nu!)^{\alpha'-\delta'}} \\[2ex] > \dfrac{1}{\varepsilon^\nu \cdot (\nu!)^{\alpha'+\delta'}} \end{cases}$$

(wo $\varepsilon > 0$ *beliebig klein*).

Gehört $G(x)$ dem *Minimal-* bezw. *Maximal*typus an, so ergibt sich aus (IIa) bezw. (IIb) als Ersatz für Ungl. (1a) bezw. (1b) die folgende Ungleichung:

$$\left.\begin{array}{lll}(2\text{a}) & |c_\nu| < \dfrac{\varepsilon^\nu}{(\nu!)^{\alpha'}} & \text{für } \textit{alle } \nu > n_\varepsilon \\ (2\text{b}) & |c_\nu| > \dfrac{1}{\varepsilon^\nu \cdot (\nu!)^{\alpha'}} & \text{für } \textit{gewisse beliebig große } \nu\end{array}\right\} (\varepsilon > 0 \textit{ beliebig klein}).$$

Gehört endlich $G(x)$ dem *Normal*typus (α, γ) an und setzt man (wie p. 277, Fußn.) $(\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}} = \lambda$, so läßt sich Gl. (III) durch die folgenden Ungleichungen ersetzen:

$$(3) \quad |c_\nu| \left\{\begin{array}{ll} < \dfrac{(\lambda+\varepsilon)^\nu}{(\nu!)^{\alpha'}} & \text{für } \textit{alle } \nu > n_\varepsilon \\ > \dfrac{(\lambda-\varepsilon)^\nu}{(\nu!)^{\alpha'}} & \text{für } \textit{gewisse beliebig große } \nu\end{array}\right\} (\varepsilon > 0 \textit{ beliebig klein}).$$

Legt man den Zahlen $\frac{1}{\nu!}$ (als den Koeffizienten der *einfachsten* ganzen transcendenten Funktion e^x) die *Ordnungszahl* 1, also den Zahlen $\left(\frac{1}{\nu!}\right)^{\alpha'}$ und etwas allgemeiner einer Folge schließlich stets *unterhalb* $\left(\frac{1}{\nu!}\right)^{\alpha'-\delta'}$, aber mindestens zum Teil *oberhalb* $\left(\frac{1}{\nu!}\right)^{\alpha'+\delta'}$ bleibender Zahlen die *Ordnungszahl* α' bei, so wird man die vorliegende Funktion $G(x)$ auch durch die Aussage charakterisieren können: sie sei von der *Koeffizientenordnung* α'. Alsdann läßt sich das oben ausgesprochene Hauptresultat auch folgendermaßen formulieren:

*Eine ganze Funktion von der Ordnung α ist von der Koeffizientenordnung $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$ und umgekehrt.**)

Zugleich ergeben sich im Anschlusse an die Ungleichungen (2a), (2b), (3) auch für die *Koeffizientenordnung* α' noch die drei *besonderen Typen*, welche eindeutig-umkehrbar den betreffenden *Typen* der *Funktionsordnung* α entsprechen und, wie der Inhalt der Ungleichungen (2a), (2b), (3) zeigt, auch sinngemäß mit den nämlichen Ausdrücken bezeichnet werden können.**)

---

*) Funktions- und Koeffizientenordnung sind also immer *gleichzeitig* endlich und von Null verschieden.

**) Daher entspricht also dem „*Normal*"-Typus (α', λ) der *Koeffizientenordnung* der spezielle *Funktionsordnungs*-Typus (α, γ), wo $\gamma = \frac{\lambda^\alpha}{\alpha}$ (s. Ungl. (3)).

Ferner sei noch hervorgehoben, daß die *Koeffizientenordnung* (einschließlich des besonderen *Typus*) *erhalten* bleibt, wenn man die Mac Laurinsche Entwickelung $G(x)=\sum_0^\infty{}_\nu c_\nu x^\nu$ durch eine beliebige Taylorsche $G(x)=\sum_0^\infty{}_\nu c_\nu'(x-x_0)^\nu$ ersetzt.*) Denn man hat für alle hinlänglich großen x:

$$e^{|x|^\alpha}=e^{\left|\frac{x}{x-x_0}\right|^\alpha\cdot|x-x_0|^\alpha}\begin{cases}< e^{(1+\varepsilon)\cdot|x-x_0|^\alpha}\\ > e^{(1-\varepsilon)\cdot|x-x_0|^\alpha}\end{cases}$$

$\left(\text{wegen } \lim\limits_{x=\infty}\left|\frac{x}{x-x_0}\right|^\alpha=1\right)$, und daraus folgt, daß die *Ordnung* von $G(x)$ (einschließlich des etwa vorhandenen besonderen *Typus*) unverändert bleibt, wenn man $G(x)$ als ganze Funktion von $(x-x_0)$ auffaßt. Infolgedessen müssen aber die c_ν' *genau denselben* Grenzbeziehungen genügen, wie die ursprünglichen c_ν.

Wurde in dem eben betrachteten Zusammenhange die unmittelbar ersichtliche Unveränderlichkeit der *Funktions*ordnung benützt, um die gleiche Eigenschaft für die *Koeffizienten*ordnung festzustellen**), so führt die *umgekehrte* Schlußweise unmittelbar zum Beweise des folgenden Satzes:

> *Die Funktionsordnung α von $G(x)$ kommt (einschließlich des besonderen Typus) auch der Ableitung $G'(x)$, und somit schließlich allen möglichen Ableitungen von $G(x)$ zu.*

Ist nämlich $G(x)=\sum_0^\infty{}_\nu c_\nu x^\nu$, so folgt: $x\cdot G'(x)=\sum_1^\infty{}_\nu \nu\cdot c_\nu x^\nu$. Da aber $\lim\limits_{\nu=\infty}\sqrt[\nu]{\nu}=1$, so genügt $\sqrt[\nu]{\nu\cdot|c_\nu|}$ genau denselben Grenzbeziehungen, wie $\sqrt[\nu]{|c_\nu|}$, sodaß also $x\cdot G'(x)$ und daher auch $G'(x)$ von derselben *Koeffizienten*ordnung, mithin auch von derselben *Funktions*ordnung wie $G(x)$ ist. Das nämliche gilt dann offenbar für $G''(x)$ usf. — schließlich für jedes beliebige $G^{(\nu)}(x)$.

---

*) Vgl. v. Schaper, a. a. O. p. 14.

**) *Direkter* Beweis für die Invarianz der *Koeffizienten*ordnung bei G. Vivanti: Rend. Ist. Lomb. (2), Vol. 36 (1903), p. 1000.

II. Ganze Funktionen, welche gar keine oder endlich viele Nullstellen besitzen.

§ 5.

Ordnung und Spezialtypus von $e^{\sum_0^q \nu\, a_\nu x^\nu}$.

Eine ganze transcendente Funktion *ohne* Nullstelle ist stets von der Form $e^{g(x)}$, wo $g(x)$ eine *rationale* oder *transcendente* ganze Funktion bedeutet. Ist zunächst $g(x)$ *rational*, etwa vom Grade q, so hat man für alle hinlänglich großen x: $|g(x)| < |x|^{q+\varepsilon}$ und daher:

(1) $$|e^{g(x)}| \leqq e^{|g(x)|} < e^{|x|^{q+\varepsilon}},$$

sodaß $e^{g(x)}$ jedenfalls von *endlicher* Ordnung und zwar *höchstens* von der Ordnung q ist. Eine genauere Untersuchung führt zu folgendem Resultat:

Ist $g(x) = \sum_0^q \nu\, a_\nu x^\nu$, *so ist* $e^{g(x)}$ *von der Ordnung* q *und zwar vom Normaltypus* $(q, |a_q|)$, *d. h. man hat bei beliebig kleinem* $\varepsilon > 0$:

(A) $$|e^{g(x)}| \begin{cases} < e^{(1+\varepsilon)\cdot|a_q|\cdot|x|^q} & \textit{für alle } |x| > R_\varepsilon, \\ > e^{(1-\varepsilon)\cdot|a_q|\cdot|x|^q} & \textit{für gewisse beliebig große } x. \end{cases}$$

Beweis. Bezeichnet man den *reellen Teil* von $g(x)$ mit $\mathfrak{R}(g(x))$, so hat man:

(2) $$|e^{g(x)}| = e^{\mathfrak{R}(g(x))},$$

sodas also zur Abschätzung von $|e^{g(x)}|$ eine genauere Untersuchung von $\mathfrak{R}(g(x))$ erforderlich ist. Bringt man $g(x)$ auf die Form:

(3) $$g(x) = (1+\varphi(x))\cdot a_q x^q, \quad \text{wo also: } \varphi(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_{q-1}x^{q-1}}{a_q x^q},$$

so läßt sich zunächst zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ ein R_ε so fixieren, daß:

(4) $$|\varphi(x)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |x| > R_\varepsilon,$$

und somit:

(5) $$\mathfrak{R}(g(x)) \leqq |\mathfrak{R}(g(x))| \leqq |g(x)| < (1+\varepsilon)\cdot|a_q x^q| \quad \text{für} \quad |x| > R_\varepsilon.$$

Um auch eine passende, für *gewisse beliebig große* x geltende *untere* Schranke für $\mathfrak{R}(g(x))$ festzustellen, werde gesetzt:

(6) $$x = |x|\cdot e^{\vartheta i}, \qquad a_q = |a_q|\cdot e^{\alpha i}.$$

sodaß also Gl. (3) in die folgende übergeht:

(7) $$g(x) = (1+\varphi(x))\cdot e^{(\alpha+q\vartheta)i}\cdot|a_q x^q|.$$

Wird jetzt $\vartheta = \vartheta_\varkappa$ in der Weise *fixiert*, daß:

(8) $\alpha + q\vartheta_\varkappa = 2\varkappa\pi$ (wo $\varkappa$ irgend eine der Zahlen $0, 1, \cdots, (q-1)$ bedeutet),

so hat man:

$$(9) \qquad g(x) = (1 + \varphi(x)) \cdot |a_\varrho x^\varrho|$$

und daher mit Berücksichtigung von Ungl. (4):

$$(10) \qquad \Re(g(x) > (1 - \varepsilon) \cdot |a_\varrho x^\varrho| \quad \text{für} \quad x = |x| \cdot e^{\vartheta_x i}, \quad |x| > R_\varepsilon.$$

Durch Zusammenfassung der Ungleichungen (5) und (10) mit Gl. (2) ergeben sich also schließlich die gesuchten Beziehungen:

$$(11) \qquad |e^{g(x)}| \begin{cases} < e^{(1+\varepsilon)\cdot|a_\varrho|\cdot|x|^\varrho} & \text{für } alle\ |x| > R_\varepsilon, \\ > e^{(1-\varepsilon)\cdot|a_\varrho|\cdot|x|^\varrho} & \text{für } gewisse\ beliebig\ gro\beta e\ x \end{cases}$$

(nämlich für *alle* $x = |x| \cdot e^{\vartheta_x i}$, wo $|x| > R_\varepsilon$).

§ 6.

Allgemeine Form aller ganzen Funktionen ohne Nullstellen und von endlicher Ordnung. — Ganze Funktionen mit endlich vielen Nullstellen.

1. Zur Vervollständigung des soeben gefundenen Resultats bleibt noch die Frage zu beantworten: Ist die Gesamtheit der ganzen Funktionen *ohne* Nullstellen und von *endlicher* Ordnung durch die soeben untersuchte Kategorie vollständig erschöpft? Mit anderen Worten: Kann $e^{g(x)}$ von *endlicher* Ordnung sein, wenn $g(x)$ eine *transcendente* ganze Funktion ist? Zur Beantwortung dieser Frage, welche wiederum lediglich auf eine zweckentsprechende Abschätzung von $\Re(g(x))$ hinausläuft, schicken wir den folgenden Hilfssatz voraus.

Hilfssatz. *Ist (zum mindesten für* $|x| \equiv r < R$*):*

$$(1) \qquad f(x) = \sum_0^\infty {}^\lambda a_\lambda x^\lambda, \quad a_\lambda = \alpha_\lambda + \beta_\lambda i,$$

also:

$$(2) \quad f(re^{\varphi i}) = \sum_0^\infty {}^\lambda (\alpha_\lambda \cos\lambda\varphi - \beta_\lambda \sin\lambda\varphi)\cdot r^\lambda + i\sum_0^\infty {}^\lambda (\beta_\lambda \cos\lambda\varphi + \alpha_\lambda \sin\lambda\varphi)\cdot r^\lambda$$
$$= f_1(r, \varphi) + i \cdot f_2(r, \varphi),$$

so gelten außer der bekannten), für* $\lambda = 0, 1, 2, \cdots$ *bestehenden Koeffizientendarstellung:*

---

*) Vgl. Math. Ann. 47 (1896), p. 137. Daselbst steht an Stelle von n durchweg $N = 2^n$, da aus methodischen Rücksichten die Benützung von Exponential- und trigonometrischen Funktionen vermieden werden sollte. Fällt, wie hier, dieser Grund fort, so erscheint es natürlicher und bietet selbstverständlich auch nicht die geringste Schwierigkeit, die fraglichen Mittelwerte auf den Fall eines *beliebigen* $N = n$ auszudehnen.

$$(3)\quad a_\lambda = \underset{x=|r|}{\mathfrak{M}}\left(x^{-\lambda}\cdot f(x)\right) = \lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{1}^{n}{}_{\nu} f\left(r\cdot e^{\nu\varphi_n i}\right)\cdot r^{-\lambda}\cdot e^{-\nu\lambda\varphi_n i}\left(wo:\ \varphi_n=\frac{2\pi}{n}\right),$$

für $\lambda \geqq 1$ auch die beiden folgenden:

$$(4)\qquad a_\lambda \begin{cases} = 2\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{1}^{n}{}_{\nu} f_1(r,\ \nu\varphi_n)\cdot r^{-\lambda}\cdot e^{-\nu\lambda\varphi_n i}, \\ = 2i\cdot\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{1}^{n}{}_{\nu} f_2(r,\ \nu\varphi_n)\cdot r^{-\lambda}\cdot e^{-\nu\lambda\varphi_n i}. \end{cases}$$

Beweis. Aus Gl. (3) folgt durch Multiplikation mit r^λ:

$$(5)\qquad a_\lambda r^\lambda = \lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{1}^{n}{}_{\nu} f\left(r\cdot e^{\nu\varphi_n i}\right)\cdot e^{-\nu\lambda\varphi_n i}.$$

Andererseits hat man*) für $\lambda = 1, 2, 3, \cdots$:

$$0 = \underset{|x|=r}{\mathfrak{M}}\left(x^\lambda\cdot f(x)\right) = \lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{1}^{n}{}_{\nu} f\left(r\cdot e^{\nu\varphi_n i}\right)\cdot r^\lambda\cdot e^{\nu\lambda\varphi_n i},$$

also durch Multiplikation mit $r^{-\lambda}$:

$$(6)\qquad 0 = \lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{1}^{n}{}_{\nu} f\left(r\cdot e^{\nu\varphi_n i}\right)\cdot e^{\nu\lambda\varphi_n i}.$$

Wenn man diese Gleichung einmal zu Gl. (5) addiert, das andere Mal davon subtrahiert, so folgt (mit Berücksichtigung von $e^{-\varphi i} + e^{\varphi i} = 2\cos\varphi$, $e^{-\varphi i} - e^{\varphi i} = -2i\sin\varphi$):

$$(7)\qquad a_\lambda r^\lambda \begin{cases} = \quad 2\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{1}^{n}{}_{\nu} f\left(r\cdot e^{\nu\varphi_n i}\right)\cdot\cos\nu\lambda\varphi_n, \\ = -2i\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{1}^{n}{}_{\nu} f\left(r\cdot e^{\nu\varphi_n i}\right)\cdot\sin\nu\lambda\varphi_n, \end{cases}\qquad (\lambda\geqq 1),$$

und daher durch Trennung des Reellen und Imaginären:

$$(8)\qquad \begin{cases} \alpha_\lambda r^\lambda = \quad 2\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{1}^{n}{}_{\nu} f_1(r,\ \nu\varphi_n)\cdot\cos\nu\lambda\varphi_n, \\ \qquad\ \ = \quad 2\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{1}^{n}{}_{\nu} f_2(r,\ \nu\varphi_n)\cdot\sin\nu\lambda\varphi_n, \\ \beta_\lambda i r^\lambda = -2i\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{1}^{n}{}_{\nu} f_1(r,\ \nu\varphi_n)\cdot\sin\nu\lambda\varphi_n, \\ \qquad\ \ = \quad 2i\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{1}^{n}{}_{\nu} f_2(r,\ \nu\varphi_n)\cdot\cos\nu\lambda\varphi_n. \end{cases}$$

*) Vgl. a. a. O. p. 138, Gl. (4).

Durch entsprechende Addition dieser Ausdrücke ergeben sich schließlich die Beziehungen:

$$(9)\begin{cases}\text{(a)} & \\ & a_\lambda r^\lambda \begin{cases} = 2\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_1^n{}^{\nu} f_1(r,\nu\varphi_n)\cdot e^{-\nu\lambda\varphi_n i}, \\ = 2i\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_1^n{}^{\nu} f_2(r,\nu\varphi_n)\cdot e^{-\nu\lambda\varphi_n i}, \end{cases} \\ \text{(b)} & \end{cases} \qquad (\lambda \geqq 1),$$

welche durch Multiplikation mit $r^{-\lambda}$ in die behaupteten Koeffizientendarstellungen (4) übergehen.

2. Mit Benutzung der *ersten* dieser Beziehungen beweisen wir jetzt den folgenden Satz*):

Genügt der reelle Teil *$g_1(r,\varphi)$ der ganzen Funktion $g(x)\equiv g(r\cdot e^{\varphi i})$ für unendlich viele beliebig große r und alle möglichen φ (also, geometrisch gesprochen, auf unendlich vielen Kreisen mit beliebig großem Radius) einer Ungleichung von der Form**):*

$$(10)\qquad g_1(r,\varphi) < A\cdot r^\sigma \quad (A>0,\ \sigma>0),$$

so ist $g(x)$ eine rationale *ganze Funktion vom Grade $q \leqq \sigma$.*

*Ist die Beziehung (10) für jedes noch so kleine $A=\varepsilon>0$ erfüllt, so hat man allemal $q<\sigma$***).*

Beweis. Ist $g(x)=\sum\limits_0^\infty{}^{\lambda} a_\lambda x^\lambda$, so folgt aus Gl. (9a), daß *für jedes noch so große r:*

$$(11)\qquad |a_\lambda|\cdot r^\lambda \leqq 2\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_1^n{}^{\nu}|g_1(r,\nu\varphi_n)|, \qquad (\lambda\geqq 1).$$

---

*) Der Satz rührt von Hadamard her (a. a. O. p. 186). Der dort mit Hülfe der Fourierschen *Integralform* der Koeffizienten gegebene Beweis wird hier mit Beibehaltung des eigentlichen Grundgedankens auf die elementare *Mittelwert*darstellung übertragen.

**) Es wird also den Zahlen $g_1(r,\varphi)$ lediglich nach der *positiven* Seite hin eine Schranke gesetzt. Dabei *könnten* zunächst unter den *negativen* Werten von $g_1(r,\varphi)$ immerhin solche vorkommen, deren *absoluter Betrag* jene Schranke $A\cdot r^\sigma$ beliebig übersteigt. Der vorliegende Satz lehrt dann eben, daß aus der Voraussetzung:

$$g_1(r,\varphi) < A\cdot r^\sigma$$

(in dem gegebenen Umfange) geradezu folgt:

$$|g_1(r,\varphi)| < A\cdot r^\sigma$$

(und zwar sogar für *alle* hinlänglich großen r und beliebiges φ).

***) Diese Bemerkung findet sich bei E. Lindelöf, a. a. O. p. 15.

Andererseits ergibt sich aus (3) für $\lambda = 0$:

$$a_0 = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{1}^{n} {}^{\nu}\, g\left(r \cdot e^{\nu \varphi_n i}\right) = \lim \frac{1}{n} \cdot \sum_{1}^{n} {}^{\nu} \left(g_1(r, \nu\varphi_n) + i \cdot g_2(r, \nu\varphi)\right),$$

und daher:

$$(12) \qquad \alpha_0 = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{1}^{n} {}^{\nu}\, g_1(r, \nu\varphi_n), \quad \text{wenn: } a_0 = \alpha_0 + \beta_0 i,$$

folglich, wenn man diese Gleichung mit 2 multipliziert und zu Gl. (11) addiert:

$$(13) \qquad |a_\lambda| \cdot r^\lambda + 2\alpha_0 = 2 \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{1}^{n} {}^{\nu} \left(|g_1(r, \nu\varphi_n)| + g_1(r, \nu\varphi_n)\right).$$

Nun ist aber:

$$(14) \quad |g_1(r, \nu\varphi_n| + g_1(r, \nu\varphi_n) \begin{cases} = 2g_1(r, \nu\varphi_n), & \text{wenn } g_1(r, \nu\varphi_n) > 0, \\ = 0 & , \text{ wenn } g_1(r, \nu\varphi_n) < 0. \end{cases}$$

Bedeutet jetzt r einen jener Werte, für welche die Voraussetzung (10) gilt, so hat man unter allen Umständen:

$$(15) \qquad |g_1(r, \nu\varphi_n)| + g_1(r, \nu\varphi_n) < 2Ar^\sigma,$$

sodaß also Gl. (13) die folgende Beziehung liefert:

$$(16) \qquad |a_\lambda| \cdot r^\lambda + 2\alpha_0 < 4A \cdot r^\sigma,$$

d. h. man hat:

$$(17) \qquad |a_\lambda| < 4A \cdot \frac{1}{r^{\lambda-\sigma}} - \frac{2\alpha_0}{r^\lambda}$$

für unendlich viele r, unter denen auch *beliebig große* vorkommen. Mithin ergibt sich, da es freisteht, r unbegrenzt zu vergrößern:

$$(18) \qquad |a_\lambda| = 0, \quad \text{falls } \lambda > \sigma.$$

Es *fehlen* also in der Reihe $g(x) = \sum_{0}^{\infty} {}^{\nu}\, a_\lambda x^\lambda$ alle Potenzen, deren Grad λ die Zahl σ übersteigt, sodaß die *höchste* in $g(x)$ vorkommende Potenz x^q einen Grad $q \leq \sigma$ besitzt: dabei kann offenbar nur dann $q = \sigma$ werden, wenn σ eine *ganze* Zahl, anderenfalls müßte immer $q < \sigma$ sein.

Diese letztere Beziehung gilt aber auch im Falle eines *ganzzahligen* σ, wenn die Voraussetzung (10) für *jedes noch so kleine* positive $A = \varepsilon$ besteht. Denn aus Ungl. (17), welche nunmehr die Form annimmt:

$$(19) \qquad |a_\lambda| < 4\varepsilon \cdot \frac{1}{r^{\lambda-\sigma}} - \frac{2\alpha_0}{r^\lambda},$$

ergibt sich alsdann für $\lambda = \sigma$:

(20) $$|a_\sigma| < 4\varepsilon + \frac{2|\alpha_0|}{r^\sigma}, \quad \text{d. h.} = 0^*).$$

3. Aus dem eben bewiesenen Satze folgt, daß $g(x)$ stets eine *rationale* ganze Funktion sein muß, wenn $e^{g(x)}$ *überhaupt* von *endlicher* Ordnung sein soll. Faßt man dieses Resultat mit dem in § 5 gefundenen zusammen, so ergibt sich also der folgende Satz:

Ist die Funktion $e^{g(x)}$ überhaupt von endlicher Ordnung, so ist sie stets von ganzzahliger Ordnung q und überdies vom Normaltypus (q, γ), d. h. es gibt eine bestimmte Zahl $\gamma > 0$, derart, daß:

(21) $$|e^{g(x)}| \begin{cases} < e^{(1+\varepsilon)\cdot\gamma\cdot|x|^q} & \textit{für alle } |x| > R_\varepsilon, \\ > e^{(1-\varepsilon)\cdot\gamma\cdot|x|^q} & \textit{für gewisse beliebig große } x. \end{cases}$$

Zugleich hat man alsdann $g(x) = \sum_0^q {}_\nu\, a_\nu x^\nu$, *wo* $|a_q| = \gamma$.

Im übrigen kommen die eben genannten Eigenschaften, wie leicht zu sehen, auch jeder ganzen Funktion von *endlicher* Ordnung zu, welche nur eine *endliche* Anzahl von Nullstellen besitzt und somit von der Form ist: $g_0(x)\cdot e^{g(x)}$, wo $g_0(x)$ wiederum eine ganze *rationale* Funktion bedeutet. Da nämlich bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ und jedem bestimmten $q > 0$:

(22) $$g_0(x) \left\{ \begin{matrix} < e^{\varepsilon\cdot|x|^q} \\ > 1 \end{matrix} \right\} \text{ für } \textit{alle hinlänglich großen } x,$$

so erkennt man ohne weiteres, daß *ganz allgemein* das Hinzutreten eines Faktors von der Form $g_0(x)$ die *Ordnung* und den etwa vorhandenen besonderen *Typus* einer ganzen Funktion $G(x)$ *in keiner Weise alteriert.* Wendet man diese Bemerkung speziell auf Funktionen von der Form $g_0(x)\cdot e^{g(x)}$ an, so folgt, daß der oben für Funktionen *ohne* Nullstellen ausgesprochene Satz auch für solche mit einer *endlichen* Anzahl von Nullstellen *ohne jeden weiteren Zusatz gültig* bleibt und daher auch in folgender Weise formuliert werden kann:

Ist die Funktion $G(x)$ von nicht-ganzzahliger oder, zwar von ganzzahliger, aber nicht dem Spezialtypus angehöriger Ordnung, so besitzt sie allemal unendlich viele Nullstellen.

Beispiel: Ist $0 < \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|b_\nu|} < \infty$, $m > 1$, so ist $\sum b_\nu \cdot \frac{x^\nu}{(m\nu)!}$, wie leicht mit Hülfe von Ungl. (7), p. 267 erkannt wird, von der Koeffizienten-

*) Selbstverständlich gilt ein ganz analoger Satz für den *imaginären* Teil von $g(x)$ (als reellen Teil von $-i\cdot g(x)$ oder auch unmittelbar auf Grund der Relation (9b)).

ordnung m, also von der Funktionsordnung $\frac{1}{m}$, muß somit stets unendlich viele Nullstellen besitzen. Das nämliche gilt dann offenbar auch von $\sum b_\nu \cdot \frac{x^{m\nu}}{(m\nu)!}$ $\left(\text{z. B. } \cos x = \sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu \cdot \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}, \quad \cos\text{hyp}\, x = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}\right)$

§ 7.

Einfluß jedes einzelnen Koeffizienten auf die Existenz bezw. Nichtexistenz unendlich vieler Nullstellen. — Der Picardsche Satz.

1. Nach dem Satze von Art. 3 des vorigen Paragraphen erscheinen die *Ganzzahligkeit* der Funktionsordnung und die Zugehörigkeit zum *Normaltypus* als *notwendige* Bedingungen dafür, daß eine im übrigen beliebig vorgelegte beständig konvergierende Reihe $\Sigma c_\nu x^\nu$ von *endlicher* Ordnung *höchstens eine endliche* Anzahl von Nullstellen besitzt. Daß jene Bedingungen aber *keine hinreichenden* sein können, folgt schon aus dem Umstande, daß dieselben, wie oben (§ 4, Art. 4) ausdrücklich hervorgehoben wurde, lediglich von den *Absolutwerten* der c_ν abhängen, während für die Existenz bezw. Nichtexistenz von *Nullstellen* offenbar die *wirklichen Werte* der c_ν wesentlich in Betracht kommen. So unterscheiden sich z. B. die Koeffizienten von $G_1(x) = e^{x^q}$ und $G_2(x) = \cos(x^q) - \sin(x^q)$ lediglich durch das *Vorzeichen*: beide Funktionen sind von der Ordnung q und zwar vom Spezialtypus $(q, 1)$. Nichtsdestoweniger hat nur die erste *keine*, die zweite *unendlich viele* Nullstellen $\left(\text{nämlich } x = \sqrt[q]{(\pm \nu + \frac{1}{4})\pi}\right)$.

Es hängen aber ferner jene zwei Bedingungen sogar nur von dem *infinitären* Verhalten der $|c_\nu|$ ab, während andererseits für die Existenz bezw. Nichtexistenz von Nullstellen die *Gesamtheit* der c_ν, ja sogar *jedes einzelne* c_ν maßgebend ist. Es gilt nämlich der folgende Satz:

> *Ist $G(x) = \Sigma c_\nu x^\nu$ von endlicher Ordnung und höchstens mit einer endlichen Anzahl von Nullstellen versehen, so genügt jede Abänderung irgend einer endlichen Anzahl von Koeffizienten, um eine Funktion mit unendlich vielen Nullstellen zu erzeugen.*

Beweis. Ändert man eine beliebige endliche Anzahl von Koeffizienten in irgend welcher Weise ab, so wird $G(x)$ übergeführt in $G(x) + \mathfrak{g}(x)$, wo $\mathfrak{g}(x)$ eine *rationale* ganze Funktion bedeutet, die sich eventuell auch auf eine einzelne Potenz von x oder eine *von Null verschiedene* Konstante reduzieren kann.

Andererseits hat man auf Grund der Voraussetzung: $G(x) = g_0(x) \cdot e^{g(x)}$, wo $g_0(x)$, $g(x)$ ebenfalls *rationale* ganze Funktionen, $g_0(x)$ von beliebigem (d. h. eventuell auch nullten) Grade, $g(x)$ vom Grade $q \geqq 1$ und, wie man ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen darf, *ohne* konstantes

Glied, da man ja einen Faktor von der Form e^{α_0} allemal zu $g_0(x)$ ziehen kann. Die Behauptung besagt dann, daß $g_0(x) \cdot e^{g(x)} + \mathfrak{g}(x)$ stets *unendlich viele* Nullstellen besitzt.

Angenommen, dies wäre *nicht* der Fall, so hätte man:

$$(1) \qquad g_0(x) \cdot e^{g(x)} + \mathfrak{g}(x) = \gamma_0(x) \cdot e^{\gamma(x)},$$

wo $\gamma_0(x)$ eine ganze rationale Funktion, eventuell eine *von Null verschiedene* Konstante, $\gamma(x)$ wiederum eine ganze Funktion vom Grade q (da ja $g_0(x) \cdot e^{g(x)}$ von der *Ordnung* q) *ohne* konstantes Glied.

Bringt man diese Gleichung auf die Form:

$$(2) \qquad \frac{g_0(x)}{\mathfrak{g}(x)} \cdot e^{g(x)} - \frac{\gamma_0(x)}{\mathfrak{g}(x)} \cdot e^{\gamma(x)} = -1,$$

so folgt durch Derivation und Multiplikation mit $\mathfrak{g}(x)^2$:

$$(3) \qquad g_1(x) \cdot e^{g(x)} - \gamma_1(x) \cdot e^{\gamma(x)} = 0,$$

wo $g_1(x)$, $\gamma_1(x)$ die folgenden zwei ganzen Funktionen bedeuten:

$$(4) \qquad \begin{cases} g_1(x) = \mathfrak{g}(x) \cdot g_0'(x) - g_0(x)\,(\mathfrak{g}'(x) - \mathfrak{g}(x) \cdot g'(x)) \\ \gamma_1(x) = \mathfrak{g}(x) \cdot \gamma_0'(x) - \gamma_0(x)\,(\mathfrak{g}'(x) - \mathfrak{g}(x) \cdot \gamma'(x)), \end{cases}$$

welche, wie leicht zu sehen, keinesfalls identisch verschwinden können. Denn wäre z. B. $g_1(x) \equiv 0$, so hätte man:

$$D_x\left(\frac{g_0(x)}{\mathfrak{g}(x)} \cdot e^{g(x)}\right) \equiv 0, \quad \text{also: } \frac{g_0(x)}{\mathfrak{g}(x)} \cdot e^{g(x)} \equiv \text{Konst.},$$

woraus mit Notwendigkeit $g(x) \equiv 0$ folgen würde.

Aus Gl. (3) ergibt sich sodann:

$$(5) \qquad e^{g(x)-\gamma(x)} = \frac{\gamma_1(x)}{g_1(x)},$$

was wiederum nur möglich erscheint, wenn:

$$(6) \qquad g(x) - \gamma(x) \equiv 0, \quad \text{also: } \gamma(x) \equiv g(x).$$

Infolgedessen würde aber Gl. (1) die Beziehung liefern:

$$(7) \qquad (g_0(x) - \gamma_0(x)) \cdot e^{g(x)} = -\,\mathfrak{g}(x),$$

d. h. es müßte sein *entweder:* $g_0(x) - \gamma_0(x) = -\,\mathfrak{g}(x) \equiv 0$,

oder: $g(x) \equiv 0$,

was beides der Voraussetzung widerspricht. Damit ist also der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

2. Als ein spezieller Fall des soeben abgeleiteten Resultates erscheint der bekannte „Picardsche *Satz*"*) (*hier* freilich mit der Beschränkung auf ganze Funktionen von *endlicher* Ordnung), nämlich:

*) Ann. de l'École Normale, (2) T. 9 (1880), p. 146. Traité d'Analyse, II, p. 231. (Beweis mit Hülfe von Sätzen aus der Theorie der Modulfunktionen. Direkterer Beweis von Borel a. a. O. p. 103 [auch: Par. C. R. 122 (1896), p. 1045; Acta math. 20 (1897), p. 382]. Vollständigere und schärfere Fassung des Borelschen Beweises bei A. Kraft. Über ganze transcendente Funktionen von unendlicher Ordnung. Dissertat. Goettingen 1903).

Eine ganze Funktion von endlicher Ordnung nimmt ***jeden*** *bestimmten Wert* ***unendlich oft*** *an, mit* ***eventueller*** *Ausnahme eines* ***einzigen*** *Wertes a (den sie* ***gar nicht*** *oder nur n* ***mal*** *anzunehmen braucht).*

Denn bedeutet a eine beliebig angenommene Zahl, $(G(x)-a)$ eine ganze transzendente Funktion *ohne* bezw. *mit nur n* Nullstellen (sodaß also $G(x)$ von der Form $g_0(x)\cdot e^{g(x)}+a$), so besitzt nach dem obigen Satze die Funktion: $(G(x)-a) \not\equiv (b-a)$, d. h. $(G(x)-b)$ für *jedes* von a verschiedene b *unendlich viele* Nullstellen, sodaß also $G(x)$ in der Tat *jeden* von a verschiedenen Wert b *unendlich oft* annimmt.

Hieran knüpft sich naturgemäß die Frage, ob ein solcher *Ausnahmewert a immer* oder wenigstens „*in der Regel*" existieren müsse. Daß dieselbe, auch in der zweiten, beschränkteren Form zu *verneinen* ist, lehrt indessen schon der Satz von Nr. 1. Denn bedeutet $G_a(x)$ *irgend eine* ganze Funktion, welche den Wert a *gar nicht* oder *nur n mal* annimmt, sodaß also: $G_a(x)=g_0(x)\cdot e^{g(x)}+a$, so folgt aus dem angeführten Satze, daß $G_a(x)+\mathfrak{g}(x)-b$ für *jedes b unendlich viele Nullstellen* besitzt, falls $\mathfrak{g}(x)-b$ für *kein b* identisch verschwindet, d. h. falls $\mathfrak{g}(x)$ sich nicht auf eine Konstante reduziert. Jedes $G_a(x)$ wird also durch Addition *jedes beliebigen nicht konstanten* $\mathfrak{g}(x)$ in eine solche ganze Funktion übergeführt, die *jeden* bestimmten Wert ohne Ausnahme *unendlich oft* annimmt.

Weiter läßt sich aber zeigen, daß auch die Addition zweier oder beliebig vieler Funktionen $G_a(x)$ — mit Ausnahme des *einzigen* Falles, daß alle $G_a(x)$ den *nämlichen* Exponentialfaktor $e^{g(x)}$ besitzen — stets eine Funktion erzeugt, welche *alle* Werte unendlich oft annimmt. Zum Beweise dient der folgende Hilfssatz.

3. **Hilfssatz.** *Versteht man unter $g_\nu(x)$ $(\nu=1,2,\cdots n)$ lauter* ***verschiedene*** *ganze rationale Funktionen ohne konstantes Glied, unter $g_{\nu 0}(x)$ $(\nu=1,2,\cdots n)$ ganze rationale Funktionen, die sich teilweise oder sämtlich auch auf Konstanten reduzieren dürfen, so kann eine Identität von der Form:*

$$(8)\qquad \sum_1^n{}_\nu\, g_{\nu 0}(x)\cdot e^{g_\nu(x)}\equiv 0$$

nur bestehen, wenn:

$$(9)\qquad g_{\nu 0}(x)\equiv 0,\qquad (\nu=1,2,\cdots n).$$

Beweis. Angenommen die $g_{\nu 0}(x)$ wären sämtlich*) von Null verschieden. Bringt man dann Gl. (8) auf die Form:

*) Wäre für *gewisse* $\nu: g_{\nu 0}(x)\equiv 0$, so könnte man ja die betreffenden Glieder aus der Relation (8) von vornherein weglassen, sodaß man immer nur mit der im Text gemachten Annahme zu operieren hat.

$$(10)\qquad \sum_{1}^{n-1}{}_{\nu} \frac{g_{\nu 0}(x)}{g_{n 0}(x)} \cdot e^{g_\nu(x) - g_n(x)} + 1 \equiv 0,$$

so folgt durch Derivation und Multiplikation mit $g_{n0}(x)^2$:

$$(11)\qquad \sum_{1}^{n-1}{}_{\nu} g_{\nu 1}(x) \cdot e^{g_\nu(x) - g_n(x)} \equiv 0,$$

wo die $g_{\nu 1}(x)$ $(\nu = 1, 2, \cdots (n-1))$ ganze Funktionen, nämlich:

$$(12)\qquad \begin{aligned} g_{\nu 1}(x) = g_{\nu 0}(x) \cdot g'_{\nu 0}(x) &- g_{\nu 0}(x) \cdot g'_{n 0}(x) \\ &+ g_{n0}(x) \cdot g_{\nu 0}(x)\, (g'_\nu(x) - g'_n(x)), \end{aligned}$$

bedeuten, welche für *kein* ν identisch verschwinden können. Denn wäre für irgend ein $\nu < n : g_{\nu,1}(x) \equiv 0$, so hätte man:

$$D_x\left(\frac{g_{\nu 0}(x)}{g_{n 0}(x)} \cdot e^{g_\nu(x) - g_n(x)}\right) \equiv \frac{g_{\nu 1}(x)}{g_{n 0}(x)^2} \cdot e^{g_\nu(x) - g_n(x)} \equiv 0,$$

also:

$$\frac{g_{\nu 0}(x)}{g_{n 0}(x)} \cdot e^{g_\nu(x) - g_n(x)} \equiv \text{Konst.},$$

d. h.

$$g_\nu(x) - g_n(x) \equiv 0 \qquad (\nu < n),$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Wendet man dasselbe Verfahren, welches von Gl. (8) zu Gl. (11) führte, auf Gl. (11) an, so ergibt sich analog:

$$(13)\qquad \sum_{1}^{n-2}{}_{\nu} g_{\nu,2}(x) \cdot e^{g_\nu(x) - g_{n-1}(x)} \equiv 0,$$

und, so fortfahrend, schließlich:

$$(14)\qquad g_{\nu,n-1}(x) \cdot e^{g_1(x) - g_2(x)} \equiv 0,$$

wo $g_{\nu,n-1}(x)$ *nicht identisch verschwinden könnte.* In diesem Falle ist aber offenbar eine Relation von der Form (14) *unmöglich*, die gemachte Annahme somit unzulässig und der fragliche Hilfssatz bewiesen.

4. Nunmehr ergibt sich unmittelbar das folgende Resultat:

Sind die $g_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \cdots n)$ lauter verschiedene ganze rationale Funktionen ohne konstantes Glied, während die $g_{\nu 0}(x)$ nur der Bedingung zu genügen haben, nicht identisch zu verschwinden, und setzt man:

$$(15)\qquad G(x) = \sum_{1}^{n}{}_{\nu} g_{\nu 0}(x) \cdot e^{g_\nu(x)}, \qquad (n \geqq 2),$$

so nimmt $G(x)$ jeden bestimmten Wert ohne Ausnahme unendlich oft an.

Denn nähme $G(x)$ einen gewissen Wert *a gar nicht* oder nur *n mal* an, so hätte man:

$$(16) \qquad \sum_1^n {}_\nu\, g_{\nu 0}(x) \cdot e^{g_\nu(x)} - a = \gamma_0(x) \cdot e^{\gamma(x)},$$

wo $\gamma_0(x)$, $\gamma(x)$ ganze rationale Funktionen sind*). Hieraus würde sich aber durch einmalige Derivation eine Beziehung von jener Form ergeben, deren Möglichkeit auf Grund des oben bewiesenen Hülfssatzes ausgeschlossen erscheint.

Hiernach wird man sagen können, daß schon innerhalb des Gebietes der Funktionen von *ganzzahliger* Ordnung diejenigen, welche irgend einen bestimmten Wert *gar nicht* oder nur *n mal* annehmen, eine *sehr spezielle* Klasse bilden. Fügt man hinzu, daß jede Funktion von *nicht ganzzahliger* Ordnung sicher *alle* Werte *unendlich oft* annimmt, da sie ja *niemals* von der Form $g_0(x) \cdot e^{g(x)}$ (das hieße nämlich: von *ganzzahliger* Ordnung) sein kann, so läßt sich der Inhalt des Picardschen Satzes, etwas ausführlicher als in Art. 2, etwa folgendermaßen formulieren:

> *Eine ganze Funktion von endlicher Ordnung nimmt im allgemeinen jeden bestimmten Wert unendlich oft an, in besonderen Fällen einen und nur einen speziellen Wert gar nicht oder nur n mal.*

In § 15 wird gezeigt werden, daß sich dieses Ergebnis noch erheblich präzisieren läßt.

III. Ganze Funktionen mit unendlich vielen Nullstellen, insbesondere primitive ganze Funktionen von endlichem Range.

§ 8.

Definition: Rang und Grenzexponent. Primitive ganze Funktionen.

1. Es bedeute a_ν $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ im folgenden ein für allemal eine Folge verschiedener oder auch zum Teil unter sich gleicher Zahlen von der Beschaffenheit, daß:

$$(1) \qquad 0 < |a_\nu| \leqq |a_{\nu+1}|, \quad \lim_{\nu=\infty} |a_\nu| = \infty.$$

*) Die *Rationalität* von $\gamma(x)$ folgt daraus, daß $G(x)$ als Summe einer endlichen Anzahl von Funktionen endlicher Ordnung offenbar selbst von endlicher Ordnung ist.

Dann lassen sich bekanntlich*) stets Folgen niemals abnehmender natürlicher Zahlen m_ν angeben, derart, daß die Reihe $\sum \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu+1}$ beständig konvergiert, und es liefert sodann das für jeden endlichen Bereich absolut und gleichmäßig konvergente Produkt:

$$\mathfrak{L}(x) = x^k \cdot \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{g_\nu(x, m_\nu)},$$

$$(2) \qquad \text{wo:} \begin{cases} k \text{ eine nat. Zahl bezw. } = 0 \\ g_\nu(x, m_\nu) = \sum_1^{m_\nu}{}_k \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^k & (m_\nu \geqq 1) \\ g_\nu(x, 0) \equiv 0 \end{cases}$$

eine ganze transcendente Funktion mit den Nullstellen a_ν und der k-fachen Nullstelle $x = 0$ (d. h. im Falle $k = 0$: *ohne* die Nullstelle $x = 0$), während *alle möglichen* ganzen Funktionen mit den nämlichen Nullstellen in der Form enthalten sind:

$$(3) \qquad G(x) = C \cdot e^{g(x)} \cdot x^k \cdot \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{g_\nu(x, m_\nu)},$$

unter $g(x)$ eine beliebige rationale oder transcendente ganze Funktion ohne konstantes Glied verstanden (eventuell auch $g(x) \equiv 0$).

Sind nun die Zahlen a_ν so beschaffen, daß für irgend ein $\sigma > 0$ die Reihe $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma$ *konvergiert*, und ist $\sigma = p + 1$ die *kleinste ganze* Zahl, für welche dies stattfindet (also $p \geqq 0$), so steht es frei, $m_\nu = p$ zu setzen (für *jedes* ν), und es soll dann

$$(4) \qquad \begin{gathered} G(x) = C \cdot e^{g(x)} \cdot x^k \cdot \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{g_\nu(x, p)}, \\ \text{wo:} \begin{cases} g_\nu(x, p) = \sum_1^{p}{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa & (p \geqq 1), \\ g_\nu(x, 0) \equiv 0 \end{cases} \end{gathered}$$

eine ganze Funktion vom *Range* p, generell von *endlichem Range* heißen (wobei also hier die Bezeichnung „*endlich*" den Fall $p = 0$ mit einschließt); während die *einfachste* Funktion mit den betreffenden Nullstellen, nämlich:

$$(5) \qquad \mathfrak{L}(x) = x^k \cdot \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{g_\nu(x, p)}$$

als *primitive* (ganze) Funktion vom *Range* p bezeichnet werden soll.

*) Weierstraß, Abh. zur Funktionenlehre, p. 16 = Werke, Bd. 2, p. 92.

Durch den *Rang* p wird offenbar das schließliche *Anwachsen* der $|a_\nu|$ und damit die *Dichtigkeit* der Nullstellen bis zu einem gewissen Grade charakterisiert. Aus der *Konvergenz* von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1}$ und der Monotonie der $|a_\nu|$ folgt nämlich, daß:

$$(6) \qquad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1} = 0, \quad \text{d. h.} \quad |a_\nu| > \nu^{\frac{1}{p+1}}.$$

Da aber andererseits $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p}$ *divergent*, so folgt, daß *nicht* von irgend einer bestimmten Stelle ν ab *beständig:*

$$\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p} \leqq \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1+p\varepsilon}, \quad \text{also:} \quad a_\nu \geqq \nu^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$$

sein kann, d. h. man hat bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

$$(7) \qquad |a_\nu| < \nu^{\frac{1}{p}+\varepsilon} \quad \text{für } \textit{unendlich viele } \nu.^{*})$$

2. Bei dem überaus großen Spielraum, welchen die in (6) und (7) angegebenen Schranken für das infinitäre Wachstum der $|a_\nu|$ noch zulassen, erscheint es zweckmäßig, zur Herstellung *engerer* Schranken an Stelle des Ranges p eine andere, dem Intervalle $(p, p+1)$ angehörige charakteristische Zahl einzuführen und zwar in folgender Weise:

Da $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1}$ *konvergiert*, $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p}$ *divergiert*, so haben die Exponenten σ, für welche $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\sigma}$ *konvergiert*, eine bestimmte *untere* Grenze ϱ, welche offenbar dem Intervalle $p \leqq \varrho \leqq p+1$ angehört; d. h. es ist alsdann für jedes $\varepsilon > 0$ zwar $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho+\varepsilon}$ *konvergent*, $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho-\varepsilon}$ *divergent*, während $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho}$ *konvergieren* oder *divergieren* kann. Diese Zahl ϱ soll der *Grenzexponent* der *Folge* (a_ν) oder auch *der Funktion* $G(x)$ bezw. $\mathfrak{L}(x)$ mit den Nullstellen a_ν heißen und nach Bedarf spezieller als *Konvergenz*- bezw. *Divergenz*exponent bezeichnet werden, je nachdem $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho}$ *konvergiert* oder *divergiert*.**)

---

*) Diese Bedingung hat offenbar nur einen Sinn für $p > 0$; für $p = 0$ versagt sie: vgl. die analoge Erscheinung § 1, Nr. 3.

**) Man hat also:

$$p < \varrho \leqq p+1,$$

wenn ϱ *Konvergenz*exponent; dagegen

$$p \leqq \varrho < p+1,$$

wenn ϱ *Divergenz*exponent.

Mit Hilfe des Grenzexponenten ϱ lassen sich dann die Schranken, innerhalb deren sich die $|a_\nu|$ für hinlänglich große ν bewegen, in folgender Weise fixieren. Aus der *Konvergenz* von $\sum\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho+\varepsilon}$ für jedes $\varepsilon > 0$, folgt einerseits, daß:

$$(8) \qquad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho+\varepsilon} = 0, \quad \text{anders geschrieben:} \quad |a_\nu| > \nu^{\frac{1}{\varrho+\varepsilon}}.$$

Andererseits folgt aus der *Divergenz* von $\sum\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho-\varepsilon}$, daß für jedes $\varepsilon>0$:

$$(9) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho-\varepsilon} = \infty, \quad \text{also für } \textit{unendlich viele } m_\nu: \quad |a_{m_\nu}| < \nu^{\frac{1}{\varrho-\varepsilon}}.^{*)}$$

Denn hätte man für irgend ein $\varepsilon > 0$:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho-\varepsilon} < g \quad \text{(d. h. endlich)},$$

Beispiele:

$$|a_\nu| = \sqrt{\nu}, \quad \text{also:} \quad \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^2 = \nu^{-1}, \quad \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{2+\varepsilon} = \nu^{-\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)},$$

d. h. $\varrho = 2$, auch $p = 2$, ϱ *Divergenz*exponent. Dagegen:

$$|a_\nu| = \sqrt{\nu} \cdot \lg \nu, \quad \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^2 = \nu^{-1}(\lg \nu)^{-2}, \quad \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{2-\varepsilon} = \nu^{-\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)} \cdot (\lg \nu)^{-(2-\varepsilon)},$$

d. h. $\varrho = 2$, $p + 1 = 2$, ϱ *Konvergenz*exponent. Ferner:

$$|a_\nu| = \nu^{\frac{2}{3}}, \quad \text{also:} \quad \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\frac{3}{2}} = \nu^{-1}, \quad \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\frac{3}{2}+\varepsilon} = \nu^{-\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

d. h. $\varrho = \frac{3}{2}$ *Divergenz*exponent, $p = 1$.

$$a = \nu^{\frac{2}{3}} \cdot \lg \nu, \text{ also: } \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\frac{3}{2}} = \nu^{-1} \cdot (\lg \nu)^{-\frac{3}{2}}, \quad \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\frac{3}{2}-\varepsilon} = \nu^{-\left(1-\frac{2}{3}\varepsilon\right)} \cdot (\lg \nu)^{-\left(\frac{3}{2}-\varepsilon\right)},$$

d. h. $\varrho = \frac{3}{2}$ *Konvergenz*exponent, $p = 1$.

Ist endlich:

$$|a_\nu| = 2^\nu, \quad \text{also:} \quad \left|\frac{1}{a_\nu}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu, \quad \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varepsilon = \left(\frac{1}{2^\varepsilon}\right)^\nu,$$

so hat man:

$$\varrho = 0 \ \textit{Divergenz}\text{exponent}, \ p = 0.$$

Der Fall $\varrho = 0$: *Konvergenz*exponent ist offenbar ein für allemal ausgeschlossen, sofern die Anzahl der a_ν überhaupt unendlich ist.

*) Die letzte Umformung ist offenbar nur erlaubt, wenn $\varrho > \varepsilon > 0$: in der Tat wird im Falle $\varrho = 0$ schon die Bedingung, daß $\sum\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho-\varepsilon} \equiv \sum|a_\nu|^\varepsilon$ divergieren solle, *wertlos*. Der Fall $\varrho = 0$ wird daher im folgenden auszuschließen sein: dabei kann immerhin $p = 0$ sein.

so würde durch Erhebung in die Potenz:

$$\frac{\varrho - \frac{\varepsilon}{2}}{\varrho - \varepsilon} \equiv 1 + \frac{1}{2(\varrho - \varepsilon)} = 1 + \varepsilon' \quad (\text{wo } \varepsilon' > 0)$$

sich ergeben:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \, \nu^{1+\varepsilon'} \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho - \frac{\varepsilon}{2}} < g^{1+\varepsilon'},$$

woraus sofort die *Konvergenz* von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho - \frac{\varepsilon}{2}}$ folgen würde.

Man kann hiernach auf Grund der Beziehungen (8) und (9) den *Grenzexponenten* ϱ auch geradezu definieren als die *untere Grenze* der (positiven) Zahlen σ, für welche eine Beziehung von der Form:

(10) $$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\sigma} = 0$$

besteht.

§ 9.

Endlichkeit des Ranges jeder ganzen Funktion von endlicher Ordnung. — Die Ordnungszahl als obere Schranke des Grenzexponenten.

1. Um den Zusammenhang zwischen der *Ordnung* und dem *Range* bezw. dem *Grenzexponenten* einer ganzen Funktion festzustellen, beweisen wir zunächst den folgenden Satz*):

Ist für alle $|x| > R$:

(A) $$|G(x)| \leqq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^{\alpha}} \qquad (A > 0,\ \gamma > 0,\ \alpha > 0)^{**}),$$

so ist, wenn $G(x)$ *überhaupt unendlich viele Nullstellen* a_ν (*wo:* $0 < |a_\nu| \leqq |a_{\nu+1}|$) *besitzt:*

(a) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha} \leqq \gamma \cdot (e+1)^{\alpha}.$$

Beweis. Da $G(x)$ die Nullstellen a_ν besitzen soll, überdies noch die Stelle $x = 0$ zur k-fachen Nullstelle haben kann, so muß $G(x)$ jedenfalls in der Form (3) des vorigen Paragraphen enthalten sein***). Man hat also, wenn n eine beliebige natürliche Zahl bedeutet:

---

*) Modifikation eines bekannten Satzes von E. Schou (Par. C. R., T. 125 [1897], p. 763) und elementarere Darstellung der von jenem benützten Beweismethode.

**) Man bemerke die *vollständige* Übereinstimmung dieser Voraussetzung mit der Voraussetzung (F) des Satzes § 2, p. 266.

***) Über die Beschaffenheit der m_ν wird hierbei *keinerlei Voraussetzung* gemacht: dieselben *könnten* immerhin mit ν ins Unendliche wachsen. Daß dies lediglich auf Grund der Voraussetzung (A) tatsächlich *nicht* der Fall ist, ergibt sich schließlich als eine *Folgerung* aus dem vorliegenden Satze.

$$(1)\quad G(x) = C \cdot x^k \cdot \prod_1^n {}^{\nu}\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{g(x) + \sum_1^n {}^{\nu} g_\nu(x, m_\nu)} \cdot \prod_{n+1}^{\infty} {}^{\nu}\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{g_\nu(x, m_\nu)}$$

$$= \frac{C \cdot x^k}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \cdot \prod_1^n {}^{\nu}(a_\nu - x) \cdot G_1(x), \qquad (k \geqq 0)$$

wo $G_1(x)$ eine ganze transcendente Funktion, die wegen: $G_1(0) = 1$ durch eine beständig konvergierende Reihe von der Form:

$$G_1(x) = 1 + \sum_1^{\infty} {}^{\nu} c_\nu x^\nu$$

darstellbar sein muß. Hiernach ergibt sich:

$$(2)\qquad \frac{G(x)}{C \cdot x^k \cdot \prod_1^n {}^{\nu}(a_\nu - x)} = \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \cdot \left(1 + \sum_1^{\infty} {}^{\nu} c_\nu x^\nu\right),$$

somit, auf Grund des Cauchyschen Koeffizientensatzes, für jedes $r > 0$:

$$(3)\qquad \left|\frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}\right| \leqq \operatorname*{Max.}_{|x| = r} \left|\frac{G(x)}{C \cdot x^k \cdot \prod_1^n {}^{\nu}(a_\nu - x)}\right|$$

und für $r > R > 1$, mit Berücksichtigung von $|a_\nu| \leqq a_{\nu+1}$ und Ungl. (A), *a fortiori:*

$$(4)\qquad \left|\frac{1}{a_n}\right|^n \leqq \frac{1}{|C| \cdot \prod_1^n {}^{\nu}\big|r - |a_\nu|\big|} \cdot \operatorname*{Max.}_{|x| = r} G(x) \leqq \frac{A}{|C|} \cdot \frac{1}{\prod_1^n {}^{\nu}\big|r - |a_\nu|\big|} \cdot e^{\gamma \cdot r^\alpha}.$$

Wird jetzt noch $\varepsilon > 0$ beliebig klein angenommen und sodann $R_\varepsilon > R$ so fixiert, daß:

$$(5)\qquad \frac{A}{|C|} < e^{\varepsilon \cdot r^\alpha} \quad \text{für} \quad r > R_\varepsilon,$$

so folgt weiter:

$$(6)\qquad \left|\frac{1}{a_n}\right|^n < \frac{1}{\prod_1^n {}^{\nu}\big|r - |a_\nu|\big|} \cdot e^{(\gamma + \varepsilon) \cdot r^\alpha} \quad \text{für} \quad r > R_\varepsilon.$$

Setzt man ferner:

$$(7)\qquad r = (e + 1) \cdot |a_n|,$$

also:

$$\left[\prod_1^n {}^{\nu}\big|r - |a_\nu|\big|\right]^{-1} \leqq \left[\prod_1^n {}^{\nu}\big((e+1)|a_n| - |a_\nu|\big)\right]^{-1} = \left[e^n \cdot |a_n|^n\right]^{-1},$$

und nimmt n groß genug, daß:

(8) $$(e+1)\cdot|a_n| > R_\varepsilon, \quad \text{d. h.} \quad |a_n| > \frac{1}{e+1}\cdot R_\varepsilon,$$

so geht aus Ungl. (6) die folgende hervor:

(9) $$\left|\frac{1}{a_n}\right|^n < \frac{1}{e^n\cdot|a_n|^n}\cdot e^{(\gamma+\varepsilon)\cdot(e+1)^\alpha\cdot|a_n|^\alpha}$$

oder auch:

$$e^n < e^{(\gamma+\varepsilon)\cdot(e+1)^\alpha\cdot|a_n|^\alpha},$$

also:

(10) $$n\cdot\left|\frac{1}{a_n}\right|^\alpha < (\gamma+\varepsilon)\cdot(e+1)^\alpha \quad \text{für} \quad |a_n| > \frac{1}{e+1}\cdot R_\varepsilon.$$

Man hat somit zunächst:

(11) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu\cdot\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\alpha < (\gamma+\varepsilon)\cdot(e+1)^\alpha,$$

und schließlich, da ja ε unbegrenzt verkleinert werden kann, wie behauptet:

(a) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu\cdot\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\alpha \leqq \gamma\cdot(e+1)^\alpha.$$

2. Tritt an die Stelle der Voraussetzung (A) die folgende:

(B) $$|G(x)| < e^{|x|^{\alpha+\delta}} \quad \text{für jedes} \quad \delta > 0 \quad \text{und} \quad |x| > R_\delta,$$

so findet man nach Analogie von Ungl. (10) zunächst:

(12) $$n\cdot\left|\frac{1}{a_n}\right|^{\alpha+\delta} < (e+1)^{\alpha+\delta}.$$

Schreibt man hier $\frac{\delta}{2}$ statt δ und multipliziert die betreffende Ungleichung mit $\left|\frac{1}{a_n}\right|^{\frac{\delta}{2}}$, so folgt durch Übergang zur Grenze:

(b) $$\lim_{\nu=\infty} \nu\cdot\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha+\delta} = 0 \quad \text{für jedes} \quad \delta > 0.$$

Ersetzt man andererseits die Voraussetzung (A) durch die folgende:

(C) $$|G(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^\alpha} \quad \text{für jedes} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{und} \quad |x| > R_\varepsilon,$$

so gewinnt man nach Analogie von Ungl. (10) zunächst die Beziehung:

(13) $$n\cdot\left|\frac{1}{a_n}\right|^\alpha < \varepsilon\cdot|e+1|^\alpha,$$

und hieraus durch Übergang zur Grenze:

(c) $$\lim_{\nu=\infty} \nu\cdot\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\alpha = 0.$$

Schreibt man in Gl. (b) nochmals $\frac{\delta}{2}$ statt δ und erhebt in die Potenz $\frac{\alpha+\delta}{\alpha+\frac{\delta}{2}} \equiv 1 + \frac{\delta}{2\alpha+\delta} = 1 + \delta'$ so folgt:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu^{1+\delta'} \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha+\delta} = 0,$$

woraus die *Konvergenz* von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha+\delta}$ für *jedes* $\delta > 0$ hervorgeht. Das *gleiche* Resultat (aber auch *kein weiter gehendes*) ergibt sich aus den Grenzbeziehungen (a) und (c).

Im übrigen kann man das Hauptergebnis dieser Untersuchung zunächst generell folgendermaßen aussprechen:

Jede ganze Funktion von endlicher Ordnung ist auch von endlichem Range.

3. Eine speziellere Formulierung der in den Beziehungen (B), (A), (C) und (b), (a), (c) enthaltenen Ergebnisse führt zu den folgenden Aussagen:

Besitzt eine ganze Funktion $G(x)$ von der Ordnung α unendlich viele Nullstellen a_ν, so hat man zum mindesten:

$$\text{(b)} \quad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha+\delta} = 0 \quad \textit{für jedes} \quad \delta > 0.$$

Gehört insbesondere $G(x)$ dem Normal- bezw. dem Minimaltypus an, so ist schon:

$$\text{(a)} \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha} \leqq g \ (\textit{wo } g \textit{ endlich}) \quad \textit{bezw.} \quad \text{(c)} \quad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha} = 0.$$

Anders ausgesprochen:

Die Relation:

$$\text{(b)} \quad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha+\delta} = 0, \quad \textit{bezw.} \quad \text{(a)} \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha} \leqq g,$$

$$\textit{bezw.} \quad \text{(c)} \quad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha} = 0$$

bildet eine notwendige Bedingung dafür, daß für alle hinlänglich großen x eine Ungleichung von der Form besteht:

$$\text{(B)} \quad |G(x)| < e^{|x|^{\alpha+\delta}}, \quad \textit{bezw.} \quad \text{(A)} \quad |G(x)| < e^{\gamma \cdot |x|^{\alpha}},$$

$$\textit{bezw.} \quad \text{(C)} \quad G(x) < e^{\varepsilon \cdot |x|^{\alpha}}.$$

Auf Grund der erwiesenen *Konvergenz* von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha+\delta}$ ergibt sich schließlich noch:

Ist ϱ der Grenzexponent einer ganzen Funktion von der Ordnung α, so kann nur:

$$\varrho \leqq \alpha$$

sein.

Umgekehrt ist also die Ordnungszahl α einer ganzen Funktion **mindestens** *gleich dem Grenzexponenten.*

Wir gehen nunmehr darauf aus zu zeigen, daß die *Ordnung* einer *primitiven* ganzen Funktion auch nur *höchstens* gleich dem Grenzexponenten sein kann, sodaß sich also schließlich für primitive ganze Funktionen die Beziehung $\varrho = \alpha$ ergeben wird.

§ 10.

Eine vorläufige obere Schranke für das Anwachsen einer primitiven Funktion.

1. Hilfssatz I. *Ist:*

(1) $$E_p(u) = (1-u)\cdot e^{\sum\limits_1^p \frac{1}{\varkappa}\cdot u^\varkappa} \qquad (p \geqq 1),$$

so hat man für **jedes** *von Null verschiedene u und für $0 \leqq \alpha \leqq 1$:*

(2) $$|E_p(u)| < e^{c_{p,\alpha}\cdot|u|^{p+\alpha}},$$

wo $c_{p,\alpha}$ eine lediglich von p und α abhängige positive Zahl bedeutet.

Beweis. Für $|u| < 1$ ergibt sich zunächst:

$$E_p(u) = e^{-\sum\limits_1^\infty \frac{1}{\varkappa}\cdot u^\varkappa + \sum\limits_1^p \frac{1}{\varkappa}\cdot u^\varkappa} = e^{-\sum\limits_{p+1}^\infty \frac{1}{\varkappa}\cdot u^\varkappa},$$

also für $0 < |u| < 1$:

$$|E_p(u)| < e^{\sum\limits_{p+1}^\infty \frac{1}{\varkappa}\cdot |u|^\varkappa} < e^{\frac{1}{p+1}\sum\limits_{p+1}^\infty |u|^\varkappa} = e^{\frac{1}{p+1}\cdot\frac{|u|^{p+1}}{1-|u|}}.$$

Ist jetzt $|u| \leqq \frac{p}{p+1}$, also $1-|u| \geqq \frac{1}{p+1}$, so wird:

$$|E_p(u)| < e^{|u|^{p+1}}$$

und, wegen $|u| < 1$, *a fortiori:*

(3) $$|E_p(u)| < e^{|u|^{p+\alpha}} \quad \text{für:} \quad 0 \leqq \alpha \leqq 1.$$

Andererseits hat man für *jedes* u:

$$|E_p(u)| < (1+|u|)\cdot e^{\sum\limits_1^p \frac{1}{\varkappa}\cdot|u|^\varkappa} < e^{|u| + \sum\limits_1^p \frac{1}{\varkappa}\cdot|u|^\varkappa}$$
$$= e^{\left\{\left|\frac{1}{u}\right|^{p+\alpha-1} + \sum\limits_1^p \frac{1}{\varkappa}\cdot\left|\frac{1}{u}\right|^{p+\alpha-\varkappa}\right\}\cdot|u|^{p+\alpha}}.$$

Ist jetzt $|u| > \frac{p}{p+1}$, also $\left|\frac{1}{u}\right| < \frac{p+1}{p}$, so wird:

(4) $$|E_p(u)| < e^{c_{p,\alpha} \cdot |u|^{p+\alpha}},$$

wenn gesetzt wird:

(4a) $$c_{p,\alpha} = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+\alpha-1} + \sum_1^p {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+\alpha-\varkappa}.$$

Da hiernach stets $c_{p,\alpha} > 1$, so ergibt sich mit Rücksicht auf die für $u \leqq \frac{p}{p+1}$ geltende Ungleichung (3) *a fortiori* die Gültigkeit von Ungl. (4) für *jedes* von Null verschiedene u.

Zusatz. Eine Ungleichung von der Form (2) gilt, wie man sich leicht überzeugt, auch noch für den Fall $p = 0$, d. h. für:

(5) $$E_0(u) = 1 - u,$$

jedoch *mit Ausschluß* des Wertes $\alpha = 0$ (in der Tat wird ja Ungl. (2) für $p = 0$, $\alpha = 0$ hinfällig). Man operiert indessen in diesem Falle einfacher mit den ohne weiteres evidenten Ungleichungen:

(6) $$\begin{cases} \text{(a)} \quad |E_0(u)| \leqq (1+|u|) = e^{\lg(1+|u|)} \\ \text{(b)} \qquad\qquad\qquad\qquad < e^{|u|} = e^{c_{0,1} \cdot |u|} \quad (\text{d. h. } c_{0,1} = 1). \end{cases}$$

2. Hilfssatz II. *Ist:*

(7) $$\mathfrak{L}_m(x) = \prod_1^m {}_\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right), \quad \text{wo:} \begin{cases} E_0\left(\frac{x}{a_\nu}\right) = 1 - \frac{x}{a_\nu} \\ E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) = \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{\sum_1^p {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa} \quad \textit{für } p \geqq 1, \end{cases}$$

und $0 < \beta \leqq 1$, *so hat man bei beliebig klein vorgeschriebenem* $\delta > 0$:

(8) $$|\mathfrak{L}_m(x)| < e^{\delta \cdot |x|^{p+\beta}} \quad \textit{für} \quad |x| > R_\delta.$$

Beweis. Man hat zunächst im Falle $p = 0$:

$$|\mathfrak{L}_m(x)| \leqq e^{\sum_1^m {}_\nu \lg\left(1+\left|\frac{x}{a_\nu}\right|\right)} \leqq e^{m \cdot \lg\left(1+\left|\frac{x}{a_1}\right|\right)},$$

und im Falle $p \geqq 1$:

$$|\mathfrak{L}_m(x)| < e^{c_{p,0} \sum_1^m {}_\nu \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^p} \leqq e^{c_{p,0} \cdot \frac{m}{|a_1|} \cdot |x|^p}.$$

Wird also R_δ in der Weise fixiert, daß für $|x| > R_\delta$:

$$m \cdot \lg\left(1+\left|\frac{x}{a_1}\right|\right) \cdot |x|^{-\beta} < \delta \quad \text{bezw.} \quad c_{p,0} \cdot \frac{m}{|a_1|} \cdot |x|^{-\beta} < \delta,$$

so ergibt sich (wenn man die Fälle $p=0$ und $p \geqq 1$ wieder zusammenfaßt):

$$|\mathfrak{L}_m(x)| < e^{\delta \cdot |x|^{p+\beta}} \quad \text{für} \quad |x| > R_\delta.$$

3. Die beiden eben bewiesenen Hilfssätze liefern zunächst unmittelbar den folgenden, zuerst von Poincaré*) (in etwas anderer Form) ausgesprochenen Satz:

Ist:

$$\mathfrak{L}(x) = \prod_1^\infty {}_\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \tag{9}$$

eine ganze Funktion vom Range $p \geqq 0$, so hat man für jedes $\varepsilon > 0$ und $|x| > R_\varepsilon$:

$$|\mathfrak{L}(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{p+1}}.\text{**)} \tag{10}$$

Beweis. Ist $\mathfrak{L}(x)$ vom Range p, also $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1}$ *konvergent*, so läßt sich zu beliebig vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ ein m so fixieren, daß:

$$\sum_{m+1}^\infty {}_\nu \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1} < \frac{\varepsilon}{2c_{p,1}},$$

wo $c_{p,1}$ für $p \geqq 1$ durch Gl. (4a) definiert ist, während (s. Ungl. (6b)) $c_{0,1} = 1$ sein soll. Man hat alsdann mit Benützung von Ungl. (2) bezw. (6b):

$$\left|\prod_{m+1}^\infty {}_\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)\right| < e^{c_{p,1} \cdot \sum_{m+1}^\infty {}_\nu \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{p+1}} < e^{\frac{\varepsilon}{2} \cdot |x|^{p+1}} \tag{11}$$

für jedes von Null verschiedene x. Andererseits kann man nach Hilfssatz II ein R_ε so fixieren, daß:

$$\left|\prod_1^m {}_\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)\right| < e^{\frac{\varepsilon}{2} \cdot |x|^{p+1}} \quad \text{für:} \quad |x| > R_\varepsilon. \tag{12}$$

Aus der Zusammenfassung der Ungleichungen (10) und (11) resultiert dann unmittelbar die behauptete Beziehung (9).

---

*) A. a. O. p. 142. Der Beweis ist dort nur für die Fälle $p=0$ und $p=1$ durchgeführt.

**) Man erkennt leicht, daß dieser Satz, sowie auch die Ergebnisse der beiden folgenden Paragraphen unverändert gültig bleiben, wenn zu $\mathfrak{L}(x)$ noch ein Faktor von der Form x^k ($k \geqq 1$) hinzutritt (wegen $|x|^k < e^{|x|^\delta}$ für jedes noch so kleine $\delta > 0$ und alle hinlänglich großen x).

§ 11.

Bestimmung einer exakteren oberen Schranke für das Anwachsen einer primitiven Funktion.

1. Um eine Herabminderung der zunächst durch Ungl. (10) des vorigen Paragraphen statuierten oberen Schranke für $|\mathfrak{L}(x)|$ zu erzielen, beweisen wir zunächst den folgenden Satz*):

Ist

$$\mathfrak{L}(x) = \prod_1^\infty {}_\nu\, E_p(x), \qquad (p \geqq 0) \tag{13}$$

vom Range p, und hat man für irgend eine dem Intervalle $p < \sigma < p+1$ angehörige Zahl σ:

$$|a_\nu|^\sigma \geqq \nu, \quad \textit{zum mindesten für } \nu > m, \tag{14}$$

so ist für alle hinlänglich großen x:

$$|\mathfrak{L}(x)| < e^{C_\sigma \cdot |x|^\sigma}, \tag{15}$$

wo C_σ eine lediglich von σ abhängige positive Zahl bedeutet.

Beweis. Zerlegt man $\mathfrak{L}(x)$ in die beiden Teilprodukte:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(x) &= \prod_1^m {}_\nu\, E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{m+1}^\infty {}_\nu\, E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right),\\ &= \mathfrak{L}_m(x) \cdot \mathfrak{R}_m(x),\end{aligned} \tag{16}$$

so läßt sich zunächst nach Hilfssatz II des vorigen Paragraphen zu beliebig klein vorgeschriebenem $\delta > 0$ eine positive Zahl fixieren, die wir, um ihre Abhängigkeit von m kenntlich zu machen, mit r_m bezeichnen wollen**), derart, daß:

$$|\mathfrak{L}_m(x)| < e^{\delta |x|^\sigma}, \quad \text{für } |x| > r_m. \tag{17}$$

Es möge nun n zu beliebig angenommenem x diejenige ganze positive Zahl bedeuten, welche eindeutig durch die Bedingung bestimmt ist:

$$n - 1 < |x|^\sigma \leqq n, \tag{18}$$

und es werde $|x|$ bezw. die soeben mit r_m bezeichnete untere Schranke

---

*) Bez. der Literatur dieses Satzes s. Münch. Ber. 33 (1903), p. 102 ff. Der Satz erscheint hier in noch etwas allgemeinerer Fassung, als ich ihn a. a. O. p. 111, 117 formuliert habe.

**) r_m hängt natürlich auch von δ und σ ab, doch erscheint es nicht notwendig, dies ausdrücklich in die Bezeichnung aufzunehmen.

der $|x|$ von vornherein so groß angenommen, daß $n > m$*). Setzt man sodann:

$$\mathfrak{R}_m(x) = \prod_{m+1}^{n}{}_{\nu} E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{n+1}^{\infty}{}_{\nu} E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right),$$

$$(19) \qquad = \mathfrak{R}_{m,n}(x) \cdot \mathfrak{R}_n(x),$$

so folgt zunächst für $p \geqq 1$:

$$|\mathfrak{R}_{m,n}(x)| \leqq \prod_{m+1}^{n}{}_{\nu} \left(1 + \left|\frac{x}{a_\nu}\right|\right) \cdot e^{\sum_1^p {}_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{\varkappa}}$$

$$= e^{\sum_1^p {}_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot |x|^{\varkappa} \cdot \sum_{m+1}^{n} {}_{\nu} \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varkappa}} \cdot \prod_{m+1}^{n}{}_{\nu} \left(1 + \left|\frac{x}{a_\nu}\right|\right),$$

während im Falle $p = 0$ der gesamte Exponentialfaktor durch die Einheit zu ersetzen ist. Da sodann nach Voraussetzung (14) und Ungl. (18):

$$\left|\frac{1}{a_\nu}\right| \leqq \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}, \quad (\text{für } \nu > m), \quad |x| \leqq n^{\frac{1}{\sigma}},$$

so folgt weiter:

$$|\mathfrak{R}_{m,n}(x)| \leqq e^{\sum_1^p {}_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot n^{\frac{\varkappa}{\sigma}} \cdot \sum_{m+1}^{n} {}_{\nu} \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}}} \cdot \prod_{m+1}^{n}{}_{\nu} \left(1 + \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right),$$

$$(20) \qquad \leqq e^{S_p^{(\sigma)}} \cdot \prod_{1}^{n} \left(1 + \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right),$$

wo:

$$(21) \qquad S_p^{(\sigma)} = \sum_1^p {}_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot n^{\frac{\varkappa}{\sigma}} \cdot \sum_1^n {}_{\nu} \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}}, \quad (p \geqq 1), \quad \text{speziell: } S_0^{(\sigma)} = 0.$$

---

*) Diese Annahme ist durchaus unwesentlich und wurde nur gemacht, um Weitläufigkeiten zu vermeiden. Wären nämlich unter den x, welche der Bedingung $|x| > r_m$ genügen, auch solche, für welche $n \leqq m$ ausfällt, so würde für diese das in Gl. (19) mit $\mathfrak{R}_{m,n}(x)$ bezeichnete Teilprodukt einfach wegfallen, während $\mathfrak{R}_n(x)$ zunächst in $\prod_{m+1}^{\infty}{}_{\nu} E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)$ übergehen würde und in der Folge *a fortiori* durch $\prod_{n+1}^{\infty}{}_{\nu} E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)$ ersetzt werden könnte.

Nun ist für $0 < \varkappa \leqq p < \sigma$:

$$\sum_1^n {}_\nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}} < \frac{1}{1-\frac{\varkappa}{\sigma}} \cdot n^{1-\frac{\varkappa}{\sigma}} \text{ *}),$$

also:

$$S_p^{(\sigma)} < \sum_1^p {}_\varkappa \frac{\sigma}{\varkappa \cdot (\sigma - \varkappa)} \cdot n = s_p^{(\sigma)} \cdot n \qquad (p \geqq 1), \tag{22}$$

wo:

$$s_p^{(\sigma)} = \sum_1^p {}_\varkappa \frac{\sigma}{\varkappa \cdot (\sigma - \varkappa)}, \quad (p \geqq 1)\text{**}), \quad \text{speziell: } s_0^{(\sigma)} = 0. \tag{22a}$$

Für das in (20) auftretende Produkt ergibt sich:

$$\prod_1^n {}_\nu \left(1 + \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right) < \prod_1^n {}_\nu \frac{2 n^{\frac{1}{\sigma}}}{\nu^{\frac{1}{\sigma}}} = \left(\frac{(2^\sigma \cdot n)^n}{n!}\right)^{\frac{1}{\sigma}} < e^{\frac{1}{\sigma} \cdot 2^\sigma \cdot n}, \tag{23}$$

sodaß mit Benutzung von (22), (23) die Ungleichung (20) in die folgende übergeht:

$$|\mathfrak{R}_{m,n}(x)| < e^{\left(s_p^{(\sigma)} + \frac{1}{\sigma} \cdot 2^\sigma\right) \cdot n}. \tag{24}$$

---

*) Man hat bekanntlich:

$$\sum_1^n {}_\nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1-\lambda} < \frac{1}{\lambda} \cdot n^\lambda, \qquad (0 < \lambda < 1),$$

wie gewöhnlich mit Hilfe der evidenten Integralbeziehung:

$$\sum_1^n {}_\nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1-\lambda} < \int_0^n \frac{dx}{x^{1-\lambda}}$$

gezeigt wird, aber auch leicht rein elementar erkannt werden kann. Man hat nämlich (s. Münch. Sitz.-Ber. 32 [1902], p. 177):

$$b^\lambda - a^\lambda > \lambda \cdot b^{\lambda-1}(b-a) \qquad (0 < \lambda < 1),$$

und daher:

$$\nu^\lambda - (\nu - 1)^\lambda > \lambda \cdot \nu^{\lambda - 1} = \lambda \cdot \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1-\lambda},$$

woraus durch Substitution von $\nu = 1, 2, \cdots n$ und Summation die fragliche Beziehung hervorgeht.

**) Man hat übrigens:

$$s_p^{(\sigma)} = \sum_1^p {}_\varkappa \left(\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\sigma - \varkappa}\right) < \frac{1}{\sigma - p} + \frac{1}{p} + 2 \sum_1^{p-1} {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} < \frac{\sigma}{p(\sigma - p)} + 2 \lg p.$$

Da aber nach Ungl. (18): $n < |x|^\sigma + 1$, so folgt:

$$\left(s_p^{(\sigma)} + \frac{1}{\sigma}\cdot 2^\sigma\right)\cdot n < \left(s_p^{(\sigma)} + \frac{1}{\sigma}\cdot 2^\sigma\right)\cdot\left(1+\frac{1}{|x|^\sigma}\right)\cdot|x|^\sigma$$

$$(25)\qquad < \left(s_p^{(\sigma)} + \frac{1}{\sigma}\cdot 2^\sigma + \delta\right)\cdot|x|^\sigma \quad \text{für } |x| > R,$$

wenn R so bestimmt wird, daß:

$$(25\text{a})\qquad \left(s_p^{(\sigma)} + \frac{1}{\sigma}\cdot 2^\sigma\right)\cdot\frac{1}{R^\sigma} \leqq \delta \quad \text{d. h.} \quad R \geqq \left(\frac{s_p^{(\sigma)} + \frac{1}{\sigma}\cdot 2^\sigma}{\delta}\right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Somit findet man:

$$(26)\qquad |\mathfrak{R}_{m,n}(x)| < e^{\left(s_p^{(\sigma)} + \frac{1}{\sigma}\cdot 2^\sigma + \delta\right)\cdot|x|^\sigma} \quad \text{für } |x| > R.$$

Zur Abschätzung des in Gl. (19) mit $\mathfrak{R}_n(x)$ bezeichneten Restproduktes hat man (mit Benützung von Ungl. (2), p. 299 und (6b) p. 300:

$$|\mathfrak{R}_n(x)| < e^{c_{p,1}\sum_{n+1}^{\infty}{}_\nu \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{p+1}}$$

$$(27)\qquad < e^{c_{p,1}\cdot|x|^{p+1}\cdot\sum_{n+1}^{\infty}{}_\nu\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{p+1}{\sigma}}} \qquad \text{(nach Ungl. (14)).}$$

Nun ist aber wegen $\sigma < p+1$:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}_\nu\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{p+1}{\sigma}} < \frac{1}{\frac{p+1}{\sigma}-1}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p+1}{\sigma}-1},^{*)}$$

---

*) Man hat nämlich für $\lambda > 0$:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}_\nu\left(\frac{1}{\nu}\right)^{1+\lambda} < \frac{1}{\lambda}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{\lambda},$$

wie wiederum mit Hilfe der Integralbeziehung:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}_\nu\left(\frac{1}{\nu}\right)^{1+\lambda} < \int_n^\infty \frac{dx}{x^{1+\lambda}}$$

oder auch rein elementar in folgender Weise sich ergibt. Man hat (vgl. Fußn. 1 der vorigen Seite):

$$b^\lambda - a^\lambda \begin{cases} > \lambda\cdot b^{\lambda-1}\cdot(b-a) & (0<\lambda<1) \\ > \lambda\cdot a^{\lambda-1}\cdot(b-a) & (\lambda>1), \end{cases}$$

und daher:

$$\left(\frac{1}{\nu}\right)^\lambda - \left(\frac{1}{\nu+1}\right)^\lambda \begin{cases} > \dfrac{\lambda}{\nu^\lambda\cdot(\nu+1)} & (0<\lambda<1) \\ > \dfrac{\lambda}{\nu\cdot(\nu+1)^\lambda} & (\lambda>1), \end{cases}$$

also:

$$|x|^{p+1} \cdot \sum_{n+1}^{\infty} \nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{p+1}{\sigma}} < \frac{\sigma}{p+1-\sigma} \cdot \left(\frac{|x|^\sigma}{n}\right)^{\frac{p+1}{\sigma}-1} \cdot |x|^\sigma$$

$$< \frac{\sigma}{p+1-\sigma} \cdot |x|^\sigma \quad \left(\text{wegen: } \frac{|x|^\sigma}{n} \leqq 1 \text{ nach Ungl. (18)}\right),$$

und daher:

(28) $$|\mathfrak{R}_n(x)| < e^{\frac{\sigma}{p+1-\sigma} \cdot c_{p,1} \cdot |x|^\sigma} \quad (\text{für jedes } x).$$

Durch Zusammenfassung der Beziehungen (16), (17), (19), (26), (28) ergibt sich, wenn man noch mit R_m die größere der beiden Zahlen r_m und R bezeichnet, die gesuchte Ungleichung:

(29) $$|\mathfrak{L}(x)| < e^{\left(s_p^{(\sigma)} + \frac{1}{\sigma} \cdot 2^\sigma + \frac{\sigma}{p+1-\sigma} \cdot c_{p,1} + 2\delta\right) \cdot |x|^\sigma}$$
$$= e^{C_\sigma \cdot |x|^\sigma} \qquad \text{für } |x| > R_m.$$

2. Das eben gewonnene Resultat in Verbindung mit dem Satze in Nr. 3 des vorigen Paragraphen (Ungl. (10)) führt nunmehr zu dem folgenden

Hauptsatz: *Ist*

$$\mathfrak{L}(x) = \prod_1^\infty {}_\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \qquad (p \geqq 0)$$

vom Range p, und besteht für irgend ein σ des Intervalls $p < \sigma \leqq p+1$) die Beziehung:*

(30) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma \leqq g, \quad wo\ g \geqq 0,^{**})$$

---

also schließlich für *jedes* $\lambda > 0$:

$$\left(\frac{1}{\nu}\right)^\lambda - \left(\frac{1}{\nu+1}\right)^\lambda > \lambda \cdot \left(\frac{1}{\nu+1}\right)^{1+\lambda},$$

woraus durch Substitution von $\nu = n, (n+1), \cdots$ und Summation die fragliche Beziehung resultiert.

*) Man bemerke, daß hier der Wert $\sigma = p+1$, welcher bei dem zuvor geführten Beweise ausgeschlossen wurde, als zulässig auftritt.

**) In dem Falle $g = 0$ lautet die Voraussetzung (30) zunächst:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma = 0,$$

d. h. schließlich:

(30a) $$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma = 0,$$

während die Behauptung (31) dann die Form annimmt:

(31a) $$|\mathfrak{L}(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma}.$$

so hat man für jedes $\varepsilon > 0$ *und* $|x| > R_\varepsilon$:

(31) $$|\mathfrak{L}(x)| < e^{(C_\sigma \cdot g + \varepsilon) \cdot |x|^\sigma},$$

wo C_σ *eine nur von* σ *abhängige positive Zahl bedeutet.*

Beweis. Ist zunächst $\sigma = p + 1$, so fällt der vorliegende Satz mit demjenigen von Nr. 3 des vorigen Paragraphen zusammen. Aus der Konvergenz von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1}$ und der Monotonie der $|a_\nu|$ folgt nämlich allemal:

$$\lim_{\nu = \infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1} = 0, \quad \text{also:} \quad g = 0,$$

und die Beziehung (31) wird dann identisch mit Ungl. (10), nämlich:

$$|\mathfrak{L}(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma} \quad \text{für} \quad |x| > R_\varepsilon.$$

Es sei jetzt: $p < \sigma < p + 1$. Wird dann $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so läßt sich auf Grund der Voraussetzung (30) eine natürliche Zahl m_ε so fixieren, daß:

$$\nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma < g + \frac{\varepsilon}{C_\sigma} = g + \delta \quad \text{für} \quad \nu > m_\varepsilon,$$

anders geschrieben:

(32) $$\left((g + \delta)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot |a_\nu|\right)^\sigma > \nu \quad \text{für} \quad \nu > m_\varepsilon.$$

Macht man die Substitution:

$$x = \frac{y}{(g + \delta)^{\frac{1}{\sigma}}},$$

so besitzt $\mathfrak{L}\left(\frac{y}{(g+\delta)^{\frac{1}{\sigma}}}\right)$ als Funktion von y aufgefaßt die Nullstellen $y = (g + \delta)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot |a_\nu|$. Da aber diese letzteren der Beziehung (32) genügen, so folgt aus dem zuvor bewiesenen Satze, daß:

$$\left|\mathfrak{L}\left(\frac{y}{(g+\delta)^{\frac{1}{\sigma}}}\right)\right| < e^{C_\sigma \cdot |y|^\sigma} \quad \text{für} \quad |y| > R_{m_\varepsilon},$$

sodaß sich durch Rücksubstitution von $y = (g + \delta)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot x = \left(g + \frac{\varepsilon}{C_\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot x$ die oben behauptete Relation ergibt:

(31) $$|\mathfrak{L}(x)| < e^{(C_\sigma \cdot g + \varepsilon) \cdot |x|^\sigma} \quad \text{für} \quad |x| > \frac{R_{m_\varepsilon}}{(g+\delta)^{\frac{1}{\sigma}}} = R_\varepsilon.$$

3. In dem Falle $\sigma = p$, welcher bisher ausgeschlossen wurde, verlieren die Sätze von Nr. 1 und Nr. 2 *im allgemeinen* ihre Gültigkeit. Dies

findet offenbar *bedingungslos* statt, wenn $\sigma = p = 0$, da in diesem Falle die Aussage (15) bezw. (31) sinnlos wird. Ist jedoch $\sigma = p \geqq 1$, so läßt sich eine *hinreichende* Zusatzbedingung angeben, unter welcher jene Sätze noch gültig bleiben. Es besteht hier zunächst der Satz von Nr. 1 in der folgenden Form:

Ist $\mathfrak{L}(x)$ vom Range $p \geqq 1$ und:

(33) $$|a_\nu|^p \geqq \nu \quad \textit{für} \quad \nu > m,$$

außerdem:

(34) $$\frac{1}{p} \cdot \overline{\lim_{n=\infty}} \left| \sum_1^n {}_\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p \right| = A, \qquad (A \geqq 0)^{*}),$$

so ist für alle hinlänglich großen x:

(35) $$|\mathfrak{L}(x)| < e^{(A+C_p)\cdot |x|^p},$$

wo C_p eine lediglich von p abhängige positive Zahl bedeutet.

Beweis. Infolge der Voraussetzung (34) läßt sich zu beliebig kleinem $\delta > 0$ ein n' so fixieren, daß für $n \geqq n'$:

(36) $$\frac{1}{p} \cdot \left| \sum_1^n {}_\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p \right| < A + \delta.$$

Bedeutet jetzt wiederum n diejenige ganze Zahl, welche durch die Bedingung bestimmt wird (cf. Ungl. (18)):

(37) $$n - 1 < |x|^p \leqq n,$$

wobei von vornherein $|x|$ so groß angenommen werden mag, daß $n \geqq n'$ und zugleich auch $n > m$**), und zerlegt man $\mathfrak{L}(x)$ in die drei Teilprodukte:

$$\mathfrak{L}(x) = \prod_1^m {}_\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{m+1}^n {}_\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{n+1}^\infty {}_\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right),$$

anders geschrieben:

(38) $$\mathfrak{L}(x) = e^{\sum_1^n {}_\nu \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^p} \cdot \prod_1^m {}_\nu E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{m+1}^n {}_\nu E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{n+1}^\infty {}_\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right),$$

wo:

(38a) $$E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) = \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{\sum_1^{p-1} {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa} \; (p > 1) \text{ bezw. } E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) = 1 - \frac{x}{a_\nu} \; (p = 1),$$

---

*) Da $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|$ auf Grund der Voraussetzung, daß $\mathfrak{L}(x)$ vom Range p sein soll, *divergieren* muß, so besagt die Bedingung (34), daß $\sum \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p$ noch *bedingt konvergiert* oder zum mindesten innerhalb *endlicher* Grenzen *oszilliert*.

**) Vg. Fußn. p. 303.

so folgt zunächst mit Berücksichtigung von Ungl. (36):

$$\left| e^{\sum_1^n \nu \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^p} \right| \leqq e^{\frac{1}{p} \cdot \left|\sum_1^n \nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p\right| \cdot |x|^p} < e^{(A+\delta) \cdot |x|^p}. \tag{39}$$

Für das *erste* der in Gl. (38) auftretenden Teilprodukte ergibt sich wiederum nach dem Hilfssatz II des vorigen Paragraphen (Ungl. (8), p. 300: man bemerke, daß *jetzt* $p-1$ an Stelle von p steht):

$$\left| \prod_1^m \nu E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \right| < e^{\delta \cdot |x|^p} \quad \text{für} \quad |x| > r_m \qquad \text{(cf. Ungl. (17), p. 302).} \tag{40}$$

Für das *zweite* Teilprodukt hat man zunächst mit Benützung von Ungl. (33), (37):

$$\left| \prod_{m+1}^n \nu E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \right| < \prod_1^n \nu \left(1 + \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{p}}\right) \cdot e^{\sum_1^{p-1} \varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{p}}}, \tag{41}$$

wobei im Falle $p = 1$ der Exponentialfaktor wegfällt. Man findet nun genau wie früher (s. Ungl. (23), p. 304):

$$\prod_1^n \nu \left(1 + \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{p}}\right) < e^{\frac{1}{p} \cdot 2^p \cdot n}, \tag{42}$$

und andererseits:

$$\prod_1^n \nu \cdot e^{\sum_1^{p-1} \varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{p}}} = e^{\sum_1^{p-1} \varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot n^{\frac{\varkappa}{p}} \cdot \sum_1^n \nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{p}}} \qquad (p > 1). \tag{43}$$

Nun ist für $\varkappa < p$ (s. p. 304, Fußn. 1):

$$\sum_1^n \nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{p}} < \frac{p}{p-\varkappa} \cdot n^{1-\frac{\varkappa}{p}},$$

also:

$$\sum_1^{p-1} \nu \frac{1}{\varkappa} \cdot n^{\frac{\varkappa}{p}} \cdot \sum_1^n \nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{p}} < \left(\sum_1^{p-1} \nu \frac{p}{\varkappa \cdot (p-\varkappa)}\right) \cdot n \tag{44}$$

$$= \left(\sum_1^{p-1} \varkappa \left(\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{p-\varkappa}\right)\right) \cdot n < 2 \lg p \cdot n,$$

sodaß die Ungleichung (41) mit Benützung von (42)—(44) in die folgende übergeht:

$$\left| \prod_{m+1}^n \nu E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \right| < e^{\left(2 \lg p + \frac{1}{p} \cdot 2^p\right) \cdot n}, \tag{45}$$

und zwar gilt diese zunächst unter der Voraussetzung $p > 1$ abgeleitete Beziehung auch noch für $p = 1$, da in diesem Falle $\lg p = 0$ wird, was genau dem Wegfallen des Exponentialfaktors in (41) entspricht.

Wegen $n < |x|^p + 1$ (Ungl. (37)) hat man sodann:

$$(46)\qquad \left(2\lg p + \frac{1}{p}\cdot 2^p\right)\cdot n < \left(2\lg p + \frac{1}{p}\cdot 2^p\right)\cdot(1+|x|^{-p})\cdot|x|^p$$
$$< \left(2\lg p + \frac{1}{p}\cdot 2^p + \delta\right)\cdot|x|^p \qquad \text{für } |x| > R,$$

wenn R so bestimmt wird, daß:

$$(46\text{a})\qquad \frac{2p\cdot\lg p + 2^p}{p\cdot R^p} \leqq \delta, \quad \text{d. h.} \quad R \geqq \left(\frac{2p\cdot\lg p + 2^p}{p\delta}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Somit findet sich schließlich:

$$(47)\qquad \left|\prod_{m+1}^{n}{}_{\nu} E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)\right| < e^{\left(2\lg p + \frac{1}{p}\cdot 2^p + \delta\right)\cdot|x|^p}.$$

Auf das *letzte* der in Gleichung (38) auftretenden Teilprodukte, welches kein anderes ist, als das in Nr. 1, Gl. (19), p. 303 mit $\mathfrak{R}_n(x)$ bezeichnete, läßt sich ohne weiteres die zur Abschätzung des letzteren entwickelte Ungleichung (28) anwenden (welche, wie unmittelbar zu sehen, noch für $\sigma = p$ gültig bleibt) sodaß sich also ergibt:

$$(48)\qquad \left|\prod_{n+1}^{\infty}{}_{\nu} E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)\right| < e^{p\cdot c_{p,1}\cdot|x|^p}.$$

Durch Einsetzen der Beziehungen (39), (40), (47), (48) geht dann aus Gl. (38) die behauptete Ungleichung hervor:

$$(49)\qquad |\mathfrak{L}(x)| < e^{(A+C_p)\cdot|x|^p} \quad \text{für } |x| > R_m,$$

wenn gesetzt wird:

$$(49\text{a})\qquad C_p = 2\lg p + \frac{1}{p}\cdot 2^p + p\cdot c_{p,1} + 3\delta$$

und R_m die größere der beiden Zahlen r_m und R (s. Ungl. (40), (46)) bedeutet.

4. Mit Hilfe der Substitution

$$x = \frac{y}{(g + C_p^{-1}\cdot\varepsilon)^{\frac{1}{p}}}$$

gewinnt man (analog wie den Satz Nr. 2 aus Nr. 1) aus dem eben bewiesenen Satze den folgenden:

Ist $\mathfrak{L}(x)$ vom Range p und besteht außer der Beziehung:

(50) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p \leqq g \quad (\text{wo } g \geqq 0)$$

noch die folgende:

(51) $$\frac{1}{p} \cdot \overline{\lim_{n=\infty}} \left| \sum_1^n{}_\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p \right| = A \quad (\text{wo } A \geqq 0),$$

so hat man für jedes $\varepsilon > 0$ *und* $|x| > R_\varepsilon$:

(52) $$|\mathfrak{L}(x)| < e^{(A + C_p \cdot g + \varepsilon)|x|^p}.{}^{*)}$$

5. Faßt man den Inhalt der Sätze von Nr. 2 und Nr. 4 mit den Resultaten von § 9, Nr. 3 p. 298 zusammen, so ergibt sich, daß die Bedingung:

$$\text{(a)}\ \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma \leqq g \ (\text{d. h. } \textit{nicht unendlich}), \quad \text{bezw. (c)} \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma = 0,$$

welche dort als *notwendig* für die Existenz einer Beziehung von der Form:

$$\text{(A)} \quad |\mathfrak{L}(x)| < e^{\gamma \cdot |x|^\sigma}, \quad \text{bezw.} \quad \text{(C)} \quad |\mathfrak{L}(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma}$$

erkannt wurde, *im allgemeinen*, d. h. allemal, wenn $p < \sigma \leqq p + 1$, sich auch als *hinreichend* erweist. Die im Falle $\sigma = p \geqq 1$ noch *hinzutretende* Bedingung (s. Ungl. (51) und Fußn.), nämlich:

$$\text{(a')} \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left| \sum_1^n{}_\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p \right| = G \ (\text{d. h. } \textit{nicht unendlich}), \ \text{bezw. (c')} \ \sum_1^\infty{}_\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0,$$

ist zwar in Verbindung mit (a) bezw. (c) gleichfalls *hinreichend* für das Zustandekommen der Beziehung (A) bezw. (C): ihre *Notwendigkeit* bleibt indessen zweifelhaft. Immerhin wird man sagen dürfen, daß sie sicherlich *nahezu* den Charakter einer *notwendigen* Bedingung besitzt oder, etwas genauer ausgedrückt, daß zum mindesten eine Bedingung *von ganz ähnlicher Art* zu der jedenfalls *notwendigen* (a) bezw. (c) hinzukommen müsse, wenn Ungl. (A) bezw. (C) für $\sigma = p$ möglich sein soll. Da nämlich

---

*) Man findet also speziell:

$$|\mathfrak{L}(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^p},$$

wenn:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p = 0$$

und:

$$\sum_1^\infty{}_\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0.$$

Vgl. P. Boutroux, Comptes rendus, T. 134 (1902), p. 83.

schon jeder einzelne Primfaktor $E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)$ einen Beitrag von der Form $e^{\frac{1}{p}\cdot\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^p}$ liefert, so *kann* die Beziehung:

$$(\mathrm{A}') \qquad |\mathfrak{L}(x)| < e^{\gamma\cdot|x|^p}, \text{ bezw. } \quad (\mathrm{C}') \quad |\mathfrak{L}(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^p}$$

nur dadurch zu Stande kommen, daß jene unendlich vielen Beiträge sich entweder *gegenseitig* hinlänglich kompensieren, oder daß sie *durch die Gesamtheit der Faktoren* $E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)$ in entsprechendem Maße kompensiert werden. Das *erstere* wird, da $\sum\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p$ *divergiert, ausschließlich* durch die Bedingung (a′) bezw. (c′) ermöglicht; ob die *zweite* Eventualität *überhaupt* eintreten kann, ist fraglich, wenn auch kaum wahrscheinlich. Aber auch wenn irgendwelche Bedingungen das Eintreten jener zweiten Eventualität nach sich ziehen könnten, so viel ist klar, daß dieselben, wegen der *Divergenz* von $\sum\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p$, *geradeso wie die Bedingung* (a′) bezw. (c′) *ganz wesentlich* von den *Argumenten* der a_ν (nicht bloß, wie die im allgemeinen Falle $\sigma > p$ geltenden Bedingungen von den *absoluten Beträgen*) abhängen müßten.

Fassen wir noch insbesondere den Fall der Ungleichung (C′) näher ins Auge. Hier muß eine *vollständige* Kompensation der von den einzelnen Primfaktoren herrührende Beträge $e^{\frac{1}{p}\cdot\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^p}$ stattfinden. Eine solche wird, wie ja unmittelbar ersichtlich, in der Tat erzielt, wenn $\sum_1^\infty{}_\nu\left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0$ (Ungl. (a′)), ob noch durch irgendwelche andere Bedingungen, bleibe wiederum dahingestellt. Jedenfalls aber müßten derartige Bedingungen, geradeso wie die Bedingung $\sum_1^\infty{}_\nu\left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0$, außer durch die bereits konstatierte Abhängigkeit von den *Argumenten* der a_ν noch durch eine *zweite spezielle Eigenschaft* sich von den gewöhnlichen Bedingungen (a) bezw. (c) unterscheiden. Während diese letzteren nämlich lediglich *infinitärer* Natur sind, also einer beliebig großen *endlichen* Anzahl der a_ν keinerlei Beschränkung auferlegen, so müßten die fraglichen Bedingungen (wie eben die Beziehung $\sum_1^\infty{}_\nu\left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0$) in geeigneter Weise *auf die Gesamtheit aller* a_ν sich erstrecken. Denn offenbar wird hier (im Gegensatze zu dem allgemeinen Fall $\sigma > p$) *jeder einzelne* Primfaktor $E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)$ auf das Zustandekommen der Beziehung $|\mathfrak{L}(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^p}$ einen derartigen Einfluß ausüben, daß schon durch Weglassung oder Abänderung eines einzelnen Primfaktors jene Beziehung *zerstört* werden muß.

6. Wir wollen schließlich das Auftreten der Beziehung $|\mathfrak{L}(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^p}$ für den Fall, daß $\mathfrak{L}(x)$ vom Range p, durch einige Beispiele illustrieren.

Es sei $\sum \left|\frac{1}{b_\nu}\right|^{p+1}$ *konvergent*, $\sum \left|\frac{1}{b_\nu}\right|^p$ *divergent*, immerhin

$$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{b_\nu}\right|^p = 0^{*)}$$

$\left(\text{z. B. } b_\nu = (\nu \cdot \lg \nu)^{\frac{1}{p}} \text{ für } \nu \geqq 2,\ b_1 \text{ beliebig, etwa } = 1\right)$, sodaß also p als *Grenz*exponent (natürlich *Divergenz*exponent) erscheint. Setzt man sodann:

$$a_{2\nu-1} = b_\nu, \quad a_{2\nu} = e^{\frac{\pi i}{p}} \cdot b_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots) \tag{53}$$

oder auch im Falle eines *ungeraden* p:

$$a_{2\nu-1} = b_\nu, \qquad a_{2\nu} = -b_\nu, \tag{54}$$

so ist offenbar $\mathfrak{L}(x) = \prod_1^\infty{}_\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)$ eine ganze Funktion p^{ten} Ranges, deren Nullstellen den Bedingungen genügen:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p = 0, \qquad \sum_1^\infty{}_\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0,$$

sodaß also in der Tat für alle hinlänglich großen $|x|$: $|\mathfrak{L}(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^p}$ ausfallen muß.

Ebendasselbe gilt, wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= b_1 \ a_2 = \eta^{-1} \cdot b_1 \cdots a_{p+1} = \eta^{-p} \cdot b_1 \\ a_{p+2} &= b_2 \ a_{p+3} = \eta^{-1} \cdot b_2 \cdots a_{2p+2} = \eta^{-p} \cdot b_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{wo: } \eta = e^{\frac{2\pi i}{p+1}},$$

allgemein:

$$a_{(p+1)\nu+\lambda+1} = \eta^{-\lambda} \cdot b_{\nu+1} \quad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, 2, \cdots in\ inf. \\ \lambda = 0, 1, \cdots, p \end{pmatrix}, \tag{55}$$

sodaß also $\left(\text{wegen: } \sum_0^p \eta^{\pm \varkappa \lambda} = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq \varkappa \leqq p\right)$:

$$\sum_1^\infty{}_\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^\varkappa = 0 \quad \text{für} \quad \varkappa = 1, 2, \cdots, p,$$

---

*) Nimmt man in den folgenden Beispielen die b_ν *so* an, daß $\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{b_\nu}\right|^p = g > 0$ $\left(\text{z. B. } b_\nu = \nu^{\frac{1}{p}}\right)$, so genügen die betreffenden $\mathfrak{L}(x)$ nach Ungl. (52) nur der Beziehung:

$$|\mathfrak{L}(x)| < e^{(C_p \cdot g + \varepsilon) \cdot |x|^p}.$$

und sodann:

$$(56)\qquad \mathfrak{L}(x) = \prod_1^\infty{}_\nu \prod_0^p{}_\lambda \left(1 - \frac{\eta^\lambda x}{b_\nu}\right) \cdot e^{\sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{\eta^\lambda x}{a_\nu}\right)^\varkappa}$$

$$= \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x^{p+1}}{b_\nu^{p+1}}\right) \cdot e^{\sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa \cdot \sum_0^p{}_\lambda \eta^{\varkappa\lambda}}$$

$$= \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x^{p+1}}{b_\nu^{p+1}}\right).$$

Ein derartiges $\mathfrak{L}(x)$ p^{ten} Ranges mit dem *Divergenz*exponenten p genügt dann *genau derselben* charakteristischen Relation*):

$$(\mathrm{C}')\qquad |\mathfrak{L}(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^p},$$

wie ein $\mathfrak{L}(x)$ $(p-1)^{\text{ten}}$ Ranges mit dem *Konvergenz*exponenten p: in der Tat ist ja auch in dem letzteren Falle p die *kleinste* Zahl, für welche die zur Existenz von Ungl. (C′) *notwendige* (und hier auch hinreichende) Bedingung $\lim\limits_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p = 0$ erfüllt ist (s. p. 295, Gl. (10)), sodaß also jede weitere Erniedrigung des in Ungl. (C′) auftretenden Exponenten p ausgeschlossen erscheint.

Im übrigen läßt gerade das Beispiel (56) deutlich erkennen, wie hier *jede einzelne* Nullstelle für das Zustandekommen der Beziehung (C′) wesentlich ist. Man setze z. B. $p = 2$, also $\eta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ und somit:

$$(57)\qquad \mathfrak{L}(x) = \prod_1^\infty{}_\nu \prod_0^2{}_\lambda \left(1 - \frac{\eta^\lambda x}{b_\nu}\right) \cdot e^{\frac{\eta^\lambda x}{b_\nu} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\eta^\lambda x}{b_\nu}\right)^2} = \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x^3}{b_\nu{}^3}\right).$$

Entfernt man jetzt aus $\mathfrak{L}(x)$ lediglich die zwei von den Nullstellen $\eta^{-1} \cdot b_1$, $\eta^{-2} \cdot b_1$ herrührenden Faktoren, so entsteht:

---

*) Das erste schon von Poincaré (a. a. O. p. 139) bemerkte und durch direkte Vergleichung mit:

$$\sin i\varepsilon x = i\varepsilon x \cdot \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 + \frac{\varepsilon^2 x^2}{\nu^2 \pi^2}\right)$$

konstatierte Beispiel dieser Art, nämlich:

$$\mathfrak{L}(x) = \prod_2^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x^2}{(\nu \lg \nu)^2}\right)$$

gehört offenbar den *drei* durch Gl. (53)—(55) charakterisierten Typen *gleichzeitig* an, da die definierenden Bedingungen für $p = 1$ zusammenfallen.

$$(58)\qquad \mathfrak{P}_1(x) = \left(1 - \frac{x}{b_1}\right) \cdot e^{\frac{x}{b_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{b_1}\right)^2} \cdot \prod_{2}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{x^3}{b_\nu^{\,3}}\right),$$

und es ergibt sich, falls man $x = -r$ (wo $r > 0$) setzt und die b_ν *reell und positiv* annimmt:

$$\mathfrak{P}_1(-r) = \left(1 + \frac{r}{b_1}\right) \cdot e^{-\frac{r}{b_1} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r}{b_1}\right)^2} \cdot \prod_{2}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 + \frac{r^3}{b_\nu^{\,3}}\right),$$

$$(59)\qquad \begin{aligned} &> e^{\left(\frac{1}{2b_1} - \frac{1}{r}\right)\cdot\frac{1}{b_1}\cdot r^2}, && \text{für } \textit{jedes } r > 0, \\ &> e^{\left(\frac{1}{2b_1^2} - \varepsilon\right)\cdot r^2}, && \text{für } r > \frac{b_1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

§ 12.

Zusammenhang zwischen Ordnung, Rang und Grenzexponent einer primitiven Funktion.

1. Bedeutet wiederum $\varrho \geqq 0$ den *Grenzexponenten* von $\mathfrak{P}(x)$*), sodaß also zum mindesten für jedes noch so kleine $\delta > 0$ die Beziehung besteht:

$$(60)\qquad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a}\right|^{\varrho+\delta} = 0, \quad \text{(s. p. 294, Gl. (8))},$$

so folgt aus dem Hauptsatze § 11, Nr. 2 (p. 306), daß *für alle hinlänglich großen x:*

$$(61)\qquad \begin{aligned} |\mathfrak{P}(x)| &< e^{\varepsilon\cdot|x|^{\varrho+\delta}}, \\ &< e^{|x|^{\varrho+\delta}} \text{**)}. \end{aligned}$$

---

*) Dabei mag jetzt unter $\mathfrak{P}(x)$ eine Funktion verstanden werden, die sich von der bisher so bezeichneten eventuell noch um einen Faktor x^k (k eine natürliche Zahl) unterscheidet (vgl. p. 301, Fußn. 2), also allgemein:

$$\mathfrak{P}(x) = x^k \cdot \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} E_\nu\left(\frac{x}{a_\nu}\right), \qquad (k \geqq 0).$$

**) Man bemerke, daß die *zweite* dieser Ungleichungen *nicht mehr und nicht weniger* aussagt, als die *erste*. Das erstere ist ohne weiteres klar, denn die *zweite* Ungleichung besteht *a fortiori*, wenn die *erste* erfüllt ist. Aber auch *umgekehrt:* besteht Ungl. (61) für jedes $\delta > 0$, so hat man für hinlänglich große x auch:

$$|\mathfrak{P}(x)| < e^{|x|^{\varrho+\frac{1}{2}\delta}} = e^{\left|\frac{1}{x}\right|^{\frac{\delta}{2}}\cdot|x|^{\varrho+\delta}},$$

und kann sodann bei beliebig klein vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ durch eventuelle Vergrößerung von $|x|$ stets erzielen, daß:

$$\left|\frac{1}{x}\right|^{\frac{\delta}{2}} \leqq \varepsilon, \quad \text{also schließlich:} \quad |\mathfrak{P}(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^{\varrho+\delta}}.$$

Hieraus ergibt sich aber, daß für die *Ordnung* α von $\mathfrak{L}(x)$ die Beziehung besteht:

(62) $$\alpha \leqq \varrho,$$

wie bereits am Schlusse von § 9 (p. 298) angekündigt wurde. Durch Kombination dieses Resultates mit dem dort abgeleiteten findet man also, daß geradezu:

(63) $$\varrho = \alpha$$

sein muß, in Worten:

Eine primitive Funktion von der Ordnung α ist auch vom Grenzexponenten $\varrho = \alpha$ und umgekehrt).*

Gehört $\mathfrak{L}(x)$ dem *Normal-* bezw. dem *Minimal*typus der Ordnung α an**), so genügen die Nullstellen a_ν nicht nur der Beziehung (60), sondern der engeren (s. p. 298, Gl. (a) und (c)):

(64) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\alpha \leqq g, \quad (\text{wo } g \textit{ endlich}),$$

(65) $$\text{bezw.} \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\alpha = 0.$$

Ist α *keine ganze Zahl*, so läßt sich die Beziehung (64) durch die etwas präzisere:

(64a) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\alpha = g > 0$$

ersetzen. Denn unter Voraussetzung eines nicht-ganzzahligen α würde aus $g = 0$, d. h. aus der Existenz der Beziehung (65) nach dem Hauptsatze § 11, Nr. 2 (p. 306), allemal folgen, daß $\mathfrak{L}(x)$ dem *Minimal*typus angehört. Man kann dieses Resultat auch folgendermaßen aussprechen:

Ist $\alpha > 0$ keine ganze Zahl, so bildet die Gleichung (64a) *bezw.* (65) *die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\mathfrak{L}(x)$ dem Normal- bezw. Minimaltypus angehört***).*

---

*) Dies gilt offenbar auch noch für $\alpha = 0$ (vgl. die Bemerkung p. 263, Absatz 1 am Ende). Man gewinnt also Funktionen *nullter* Ordnung, wenn man die a_ν so wählt, daß 0 als Grenzexponent erscheint, d. h. daß $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ *konvergiert*, z. B. $\frac{1}{a_\nu} = q^\nu$, wo $|q| < 1$. (Über das Vorkommen derartiger Produkte bei Euler, Jacobi, Cauchy vgl. Encyklop. d. math. Wiss. I, p. 116, 117).

**) Hier ist unter α *stets* eine Zahl > 0 zu verstehen.

***) Daraus folgt noch, daß die Bedingung:

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\alpha = \infty$$

als *notwendig und hinreichend* erscheint für die Zugehörigkeit von $\mathfrak{L}(x)$ zum *Maximal*typus.

Ist dagegen α *eine ganze Zahl* und $\mathfrak{L}(x)$ gehört dem *Normal*typus an, so hat es bei Ungl. (64) sein Bewenden, d. h. es kann hier der betreffende Grenzwert eventuell auch *verschwinden*, sodaß also schließlich Gl. (65) besteht. Anders ausgesprochen: Ist α *eine ganze Zahl*, so ist die Bedingung (65) noch *keine hinreichende* für die Zugehörigkeit von $\mathfrak{L}(x)$ zum *Minimal*typus. Die letztere findet allemal dann statt, wenn α *Konvergenz*exponent ist (nach § 11, Nr. 2, Hauptsatz); dagegen nur mit der Zusatzbedingung $\sum_1^\infty \nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^\alpha = 0$ (§ 11, Nr. 4, p. 311), möglicher-, wenn auch nicht wahrscheinlicherweise noch unter anderen geeigneten Spezialbedingungen (vgl. § 11, Nr. 5 am Ende), wenn α *Divergenz*exponent ist.

Ebensowenig bildet Gl. (64a) oder sogar (65) im Falle eines *ganzzahligen* α eine *hinreichende* Bedingung für die Zugehörigkeit von $\mathfrak{L}(x)$ zum *Normal*typus: hier muß noch die Zusatzbedingung $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \left| \sum_1^n \nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^\alpha \right| = G$ (und zwar $G \geqq 0$, falls (64a) besteht; $G > 0$, falls (65) besteht) hinzukommen (§ 11, Nr. 4, 5)*).

2. Da zwischen dem *Range* p und dem *Grenzexponenten* ϱ von $\mathfrak{L}(x)$ bezw. der damit nunmehr als identisch erkannten *Ordnung* α die Beziehung besteht:

$$p \leqq \alpha \leqq p + 1, \quad \text{(p. 293, Fußn. 2)},$$

so ergibt sich, falls α weder *Null*, noch *ganzzahlig*, daß:

$$p = [\alpha], \tag{66a}$$

wo $[\alpha]$ die *größte* in α enthaltene *ganze Zahl*, bezw. im Falle $\alpha < 1$ die *Null* bezeichnet. Ist α eine *ganze Zahl* und gehört $\mathfrak{L}(x)$ *nicht* dem *Minimal*typus an, so erscheint die *Konvergenz* von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\alpha$ definitiv *ausgeschlossen*, sodaß also auch noch in diesem Falle:

$$p = \alpha \equiv [\alpha]. \tag{66b}$$

Gehört dagegen (bei *ganzzahligem* α) $\mathfrak{L}(x)$ dem *Minimal*typus an, so wird, nach dem in § 11, Nr. 5 gesagten, *in der Regel* α *Konvergenz*exponent und daher

$$p = [\alpha] - 1 \tag{66c}$$

sein. Nur in *besonderen Fällen*, nämlich bei *ganz spezieller Verteilung* der

---

*) Hieraus erklärt sich z. B., warum $\sin\frac{\pi x}{2}$, $\cos\frac{\pi x}{2}$ dem *Normal*typus der Ordnung 1 angehören, dagegen $(\Gamma(x))^{-1}$ dem *Maximal*typus, obschon für alle drei Funktionen: $\lim\limits_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right| = 1$.

a_ν, ins besondere, wenn $\sum_1^\infty \nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^\alpha = 0$, ist die betreffende Voraussetzung mit der *Divergenz* von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\alpha$ vereinbar, sodaß dann also wiederum p durch Gl. (66b) sich bestimmt.

Will man umgekehrt vom *Range* p auf die *Ordnung* bezw. den *Ordnungstypus* von $\mathfrak{P}(x)$ schließen, so läßt sich auf Grund der obigen Resultate folgendes aussagen: Eine primitive Funktion $\mathfrak{P}(x)$ vom *Range* p ist *höchstens* vom *Minimal*typus $(p+1)$, *mindestens* vom *Minimal*typus (p). Dabei gehören dem *Minimal*typus $(p+1)$ tatsächlich *alle* diejenigen $\mathfrak{P}(x)$ an, für welche $p+1$ *Konvergenz*exponent ist; dagegen dem *Minimal*typus (p) überhaupt nur solche $\mathfrak{P}(x)$, für welche p *Divergenz*exponent ist und zugleich die a_ν der *infinitären* Relation $\lim\limits_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p = 0$ (anders geschrieben: $|a_\nu| \succ \nu^{\frac{1}{p}}$), sowie *ganz speziellen, auf jedes einzelne a_ν sich erstreckenden Bedingungen* $\left(\text{ins besondere: } \sum_1^\infty \nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0\right)$ genügen.

IV. Ganze Funktionen von endlicher Höhe.

§ 13.

Definition der ganzen Funktion von endlicher Höhe. — Endlichkeit ihrer Ordnung.

1. Ist:

(1) $g(x)$ $$G(x) = e^{g(x)} \cdot \mathfrak{P}(x),$$

wo $\cancel{G(x)}$ eine ganze rationale Funktion vom *Grade* q*), $\mathfrak{P}(x)$ eine primitive Funktion vom *Range* p, und bedeutet h die *größere* der beiden Zahlen p und q, bezw. *jede* der beiden Zahlen p und q, falls $p=q$, so soll h die *Höhe***) von $G(x)$, $G(x)$ selbst eine ganze Funktion von *end-*

---

*) Zur Abkürzung werde ich gelegentlich diese Zahl q schlechthin als den „*Grad*" von $G(x)$ bezeichnen.

**) Die Bezeichnung „*Höhe*" zur Verdeutschung des von E. Laguerre (Oeuvres compl. 1, p. 167) eingeführten Begriffes „*genre*" wurde von H. von Schaper (a. a. O. p. 24) vorgeschlagen, da die wörtliche Übersetzung „*Geschlecht*" seit Clebsch und Riemann bereits eine andere typische Bedeutung in der Funktionenlehre gewonnen hat. Manche Autoren (z. B. O. Biermann, Theorie der analyt. Funktionen, p. 320) bedienen sich dafür des (von mir in etwas anderem Sinne gebrauchten) Ausdruckes „*Rang*" (analog auch „*rango*" bei G. Vivanti, Teoria delle funzioni analitiche, p. 179).

licher Höhe h heißen. Reduziert sich $g(x)$ auf eine Konstante, bezw. $\mathfrak{P}(x)$ auf die Einheit oder eine rationale ganze Funktion, so fällt also der Begriff der *Höhe* mit demjenigen des *Ranges* p von $\mathfrak{P}(x)$ bezw. des *Grades* q von $g(x)$ zusammen.

Man erkennt leicht, daß jede ganze Funktion von *endlicher Höhe* auch von *endlicher Ordnung* sein muß. Es gilt nämlich offenbar der allgemeine Satz:

Ist $G_1(x)$ von der Ordnung α_1, $G_2(x)$ von der Ordnung $\alpha_2 \geqq \alpha_1$, so ist $G(x) \equiv G_1(x) \cdot G_2(x)$ höchstens von der Ordnung α_2).*

Denn aus der Voraussetzung folgt, daß für jedes $\delta > 0$ und $|x| > R_\delta$:

$$(2) \qquad |G_1(x)| < e^{|x|^{\alpha_1 + \frac{1}{2}\delta}}, \quad |G_2(x)| < e^{|x|^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\delta}},$$

und daher, wegen $\alpha_1 < \alpha_2$:

$$(3) \qquad |G(x)| < e^{2 \cdot |x|^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\delta}} < e^{|x|^{\alpha_2 + \delta}},$$

woraus die Richtigkeit der fraglichen Behauptung unmittelbar hervorgeht.

2. Der eben ausgesprochene Satz läßt sich aber noch weiter dahin präzisieren, daß $G_1(x) \cdot G_2(x)$ mit Ausnahme eines *einzigen* ganz speziellen Falles *genau* von der Ordnung α_2 sein muß.

Angenommen, man habe zunächst:

$$(4) \qquad G(x) = e^{g_1(x)} \cdot e^{g_2(x)} = e^{g_1(x) + g_2(x)},$$

wo $g_1(x) = \sum_0^{q_1} a_\nu x^\nu$, $g_2(x) = \sum_0^{q_2} b_\nu x^\nu$ und $q_2 \geqq q_1$, so ist offenbar $g_1(x) + g_2(x)$ allemal vom *Grade* q_2, also $G(x)$ von der *Ordnung* q_2 (s. § 5), *außer wenn: $q_2 = q_1$ und zugleich: $b_{q_2} = -a_{q_1}$*. Alsdann findet in der Tat eine *Erniedrigung* der *Ordnung* von $G(x)$ statt, und zwar ist, wie sich zeigen wird, dieser Fall auch der *einzige* dieser Art.

Hat man ferner:

$$(5) \qquad G(x) = \mathfrak{P}_1(x) \cdot \mathfrak{P}_2(x),$$

wo $\mathfrak{P}_1(x)$, $\mathfrak{P}_2(x)$ primitive Funktionen mit den Grenzexponenten ϱ_1 und $\varrho_2 \geqq \varrho_1$, so hat offenbar $G(x)$ unter allen Umständen den Grenzexponenten ϱ_2, also auch die Ordnungszahl ϱ_2.

---

*) Der analoge Satz gilt offenbar für $G(x) = G_1(x) \pm G_2(x)$ mit dem Zusatze, daß im Falle $\alpha_2 > \alpha_1$ $G(x)$ nicht nur *höchstens*, sondern *genau* von der Ordnung α_2 ist.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten:

(6) $$G(x) = e^{g(x)} \cdot \mathfrak{L}(x),$$

wo $g(x)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade q, $\mathfrak{L}(x)$ eine primitive Funktion vom Grenzexponenten ϱ. Ist hierbei $q \geqq \varrho$, so hat man nach Nr. 1, wenn α die Ordnung von $G(x)$ bezeichnet:

$$\alpha \leqq \varrho.$$

Andererseits hat man nach dem letzten Satze von § 9, Nr. 3 (p. 298):

$$\alpha \geqq \varrho,$$

sodaß sich also schließlich

(7) $$\alpha = \varrho$$

ergibt.

Diese Schlußweise versagt jedoch im Falle $q > \varrho$. Hier folgt aus Nr. 1 nur soviel, daß:

$$\alpha \leqq q$$

sein muß. Um aber zu erschließen, daß geradezu:

$$\alpha = q,$$

müßte erst feststehen, daß der Faktor $\mathfrak{L}(x)$ nicht etwa eine *Erniedrigung* der von dem Faktor $e^{g(x)}$ herrührenden Ordnungszahl q herbeiführen kann. Hierzu bedarf man aber einer für $|\mathfrak{L}(x)|$ in geeignetem Umfange gültigen *unteren* Schranke bezw. einer *oberen* Schranke für $|\mathfrak{L}(x)^{-1}|$, deren Existenz nunmehr zunächst festgestellt werden soll.

§ 14.

Existenz einer auf beliebig großen Kreisen gültigen oberen Schranke für den reziproken Wert einer primitiven Funktion.

Satz. *Konvergiert* $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma$ *für irgend ein* $\sigma \leqq 1$, *sodaß also*

(1) $$\mathfrak{L}(x) \equiv \prod_1^\infty {}_\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)$$

eine primitive Funktion vom Range 0 *darstellt, so gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *unendlich viele beliebig große* r, *derart, daß*

(2) $$|\mathfrak{L}(x)^{-1}| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma}$$

für alle x *mit den absoluten Beträgen* x *(also, geometrisch gesprochen, auf unendlich vielen Kreisen mit beliebig großem Radius* r*).*

Beweis. Infolge der Konvergenz von $\sum\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma$ hat man zunächst:

(3a) $$\lim_{\nu=\infty}\frac{\nu}{|a_\nu|^\sigma}=0,\qquad \text{(3b)}\quad \varlimsup_{\nu=\infty}\frac{\nu\cdot\lg\nu}{|a_\nu|^\sigma}=0^{*}).$$

Nun besteht die Identität:

$$\frac{\nu\cdot\lg|a_\nu|}{|a_\nu|^\sigma}=\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\nu\cdot\lg\left(\frac{|a_\nu|^\sigma}{\nu}\cdot\nu\right)}{|a_\nu|^\sigma},$$

$$=\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\lg\frac{|a_\nu|^\sigma}{\nu}}{\frac{|a_\nu^\sigma|}{\nu}}+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\nu\cdot\lg\nu}{|a_\nu|^\sigma},$$

sodaß sich mit Berücksichtigung von (3a), (3b) ergibt:

(4) $$\varlimsup_{\nu=\infty}\frac{\nu\cdot\lg|a_\nu|}{|a_\nu|^\sigma}=0.$$

Wird also $\delta>0$ beliebig klein vorgeschrieben, so gibt es eine unbegrenzte Folge natürlicher Zahlen $n_\lambda\,(\lambda=1,2,3,\cdots)$ von *der* Beschaffenheit, daß:

(5) $$\frac{n_\lambda\cdot\lg|a_{n_\lambda}|}{|a_{n_\lambda}|^\sigma}<\delta.$$

Ferner folgt aus (3a), daß (wegen: $\sigma\leqq 1$) in jedem Falle:

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{1}{\nu}\cdot|a_\nu|=\infty.$$

Es läßt sich also eine positive ganze Zahl m_1 so fixieren, daß:

$$|a_\mu|>8\mu,\quad \text{für } \mu\geqq m_1,$$

und daher:

(6) $$\frac{1}{2}\cdot|a_\mu|-\frac{1}{4}\cdot|a_\mu|>2\mu,\quad \text{für } \mu\geqq m_1.$$

Da $|a_{\mu+1}|\geqq|a_\mu|>\frac{1}{2}\cdot|a_\mu|$, so können *höchstens* $|a_1|, |a_2|, \cdots |a_{\mu-1}|$ *unterhalb* $\frac{1}{2}\cdot|a_\mu|$ liegen, und um so mehr können *höchstens* diese $\mu-1$ Zahlen

---

*) Aus

$$\varlimsup_{\nu=\infty}\frac{\nu\cdot\lg\nu}{|a_\nu|^\sigma}=c>0$$

würde nämlich folgen, daß für beliebig kleines $\varepsilon>0$ und alle hinlänglich großen ν:

$$\frac{\nu\cdot\lg\nu}{|a_\nu|^\sigma}>c-\varepsilon,$$

sodaß also $\sum\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma$ *divergieren* müßte.

in das Innere des Zahlintervalls $\left(\frac{1}{4}\,|a_\mu|,\ \frac{1}{2}\,|a_\mu|\right)$ fallen, sodaß also dieses Intervall auf solche Weise in *höchstens* μ *Teilintervalle* zerlegt wird. Da die *Summe* dieser letzteren nach Ungl. (6) *größer als* 2μ ist, so muß also *mindestens ein* Teilintervall *größer als* 2 sein. Bedeutet daher r die *in der Mitte* oder auch nur eine *in hinlänglicher Nachbarschaft* der Mitte jenes Teilintervalls liegende Zahl, so enthält das Intervall $(r-1,\ r+1)$, einschließlich seiner Grenzen, *keine einzige* der Zahlen $|a_\nu|$, sodaß also:

$$(7)\qquad \frac{1}{4}\,|a_\mu| < r < \frac{1}{2}\,|a_\mu| \quad \textit{und zugleich:} \quad \big|\,|a_\nu| - r\,\big| > 1 \ \textit{für jedes}\ \nu.$$

Da hierbei μ nach Ungl. (6) lediglich an die Bedingung $\mu \geqq m_1$ geknüpft ist, so erkennt man, daß es *unendlich viele* und insbesondere auch *beliebig große* Zahlen r der bezeichneten Art gibt.

Schließlich läßt sich wegen der Konvergenz von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma$ eine natürliche Zahl m_2 so annehmen, daß:

$$(8)\qquad \sum_{m_2+1}^{\infty}{}_{\nu} \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma < \delta.$$

Bedeutet jetzt n irgend eine *der Reihe der Zahlen* n_λ *angehörige* Zahl, die zugleich den Bedingungen genügt:

$$n \begin{cases} \geqq m_1, \\ \geqq m_2, \end{cases}$$

so bestehen die Beziehungen (5), (7), (8) *gleichzeitig*, wenn man die daselbst mit n_λ, μ, m_2 bezeichneten Zahlen durch n ersetzt. Dabei steht es offenbar frei, ein auf obige Weise ausgewähltes n auch durch *jede größere* der Reihe der n_λ angehörige Zahl zu ersetzen und damit auch r *unbegrenzt zu vergrößern*. Man hat also für *unendlich viele* n bezw. *beliebig große* r:

$$(9)\quad \begin{cases} \text{(a)} \qquad n \cdot \lg|a_n| < \delta \cdot |a_n|^\sigma, \\ \text{(b)}\ \frac{1}{4}\,|a_n| < r < \frac{1}{2}\,|a_n| \ \text{und zugleich:}\ \text{(c)}\ \big|\,|a_\nu| - r\,\big| > 1 \ \text{für } \textit{jedes}\ \nu. \\ \text{(d)} \qquad \sum_{n+1}^{\infty}{}_{\nu} \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma < \delta. \end{cases}$$

Wir zerlegen nun $\mathfrak{L}(x)^{-1}$ in die beiden Teilprodukte:

$$(10)\qquad \mathfrak{L}(x)^{-1} = \prod_{1}^{n}{}_{\nu} \frac{a_\nu}{a_\nu - x} \cdot \prod_{n+1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{a_\nu}{a_\nu - x}.$$

Für das *erste* derselben ergibt sich alsdann, wenn $|x| = r$ gesetzt wird:

$$\left|\prod_1^n{}_\nu \frac{a_\nu}{a_\nu - x}\right| \leqq \prod_1^n{}_\nu \frac{|a_\nu|}{\big||a_\nu| - r\big|} < \prod_1^n{}_\nu |a_\nu|, \quad \text{(nach Ungl. (9c))},$$

$$\leqq |a_n|^n = e^{n \cdot \lg |a_n|},$$

$$< e^{\delta \cdot |a_n|^\sigma}, \quad \text{(nach Ungl. (9a))},$$

$$\text{(11)} \qquad < e^{4^\sigma \delta \cdot r^\sigma}, \quad \text{(nach Ungl. (9b))}.$$

Zur Abschätzung des *zweiten* Teilprodukts hat man zunächst:

$$\left|\prod_{n+1}^\infty{}_\nu \frac{a_\nu}{a_\nu - x}\right| = \left|\prod_{n+1}^\infty{}_\nu \left(1 + \frac{x}{a_\nu - x}\right)\right| \leqq \prod_{n+1}^\infty{}_\nu \left(1 + \frac{r}{\big||a_\nu| - r\big|}\right).$$

Da hier, wegen $\nu > n$, auf Grund von Ungl. (10b) durchweg $|a_\nu| > 2r$, so folgt weiter:

$$\frac{r}{\big||a_\nu| - r\big|} = \frac{r}{|a_\nu| - r} = \frac{1}{1 - \frac{r}{|a_\nu|}} \cdot \frac{r}{|a_\nu|},$$

$$< 2 \cdot \frac{r}{|a_\nu|}, \quad \left(\text{wegen: } \frac{r}{|a_\nu|} < \frac{1}{2},\ 1 - \frac{r}{|a_\nu|} > \frac{1}{2}\right),$$

$$\leqq 2 \cdot \left(\frac{r}{|a_\nu|}\right)^\sigma, \quad \left(\text{wegen: } \frac{r}{|a_\nu|} < 1,\ \sigma \leqq 1\right),$$

und daher:

$$\left|\prod_{n+1}^\infty{}_\nu \frac{a_\nu}{a_\nu - x}\right| < \prod_{n+1}^\infty{}_\nu \left(1 + 2 \cdot \left(\frac{r}{|a_\nu|}\right)^\sigma\right) < e^{2 r^\sigma \cdot \sum_{n+1}^\infty{}_\nu \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma},$$

$$\text{(12)} \qquad < e^{2\delta \cdot r^\sigma}, \quad \text{(nach Ungl. (10d))}.$$

Durch Zusammenfassung der Resultate (11) und (12) ergibst sich somit:

$$\text{(13)} \qquad |\mathfrak{L}(x)^{-1}| < e^{(4^\sigma + 2)\delta \cdot r^\sigma}, \quad \text{für } |x| = r.$$

Wird also δ zu beliebig klein vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ so fixiert, daß:

$$(4^\sigma + 2) \cdot \delta \leqq \varepsilon,$$

so findet man schließlich, wie unter (2) behauptet:

$$|\mathfrak{L}(x)^{-1}| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma}, \quad \text{für } |x| = r.$$

2. Der eben bewiesene Satz gestattet sofort die folgende Übertragung auf primitive Funktionen von beliebigem Range p:

Konvergiert $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma$ *für irgend ein* σ *des Intervalls* $p < \sigma \leqq p + 1$, *sodaß also:*

$$\text{(14)} \qquad \mathfrak{L}(x) \equiv \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{\sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa}$$

eine primitive Funktion vom Range p darstellt, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele beliebig große r, derart, daß:

(15) $$|\mathfrak{L}(x)^{-1}| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma}$$

für alle x mit den absoluten Beträgen r).*

Beweis. Bezeichnet man mit η eine primitive $(p+1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel, etwa:

$$\eta = e^{\frac{2\pi i}{p+1}},$$

so ergibt sich (vgl. p. 314, Gl. (56)):

$$\prod_0^p{}_\lambda\, \mathfrak{L}(\eta^\lambda x) = \prod_1^\infty{}_\nu \left(\prod_0^p{}_\lambda \left(1 - \frac{\eta^\lambda x}{a_\nu}\right) \cdot e^{\sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa \cdot \sum_0^p{}_\lambda \eta^{\varkappa\lambda}} \right)$$

(16) $$= \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x^{p+1}}{a_\nu^{p+1}}\right).$$

Setzt man sodann:

(17) $$\prod_0^p{}_\lambda\, \mathfrak{L}(\eta^\lambda x) = \Pi(x), \quad \prod_1^p{}_\lambda\, \mathfrak{L}(\eta^\lambda x) = \Pi_1 x),$$

so wird zunächst:

(18) $$\mathfrak{L}(x)^{-1} = \Pi(x)^{-1} \cdot \Pi_1(x).$$

Transformiert man ferner $\Pi(x)$ durch die Substitution:

(19) $$x^{p+1} = y, \qquad a_\nu^{p+1} = b_\nu$$

in eine Funktion von y:

(20) $$\Pi(x) = \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{y}{b_\nu}\right),$$

also eine primitive Funktion vom Range 0, und berücksichtigt, daß $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma = \sum \left|\frac{1}{b_\nu}\right|^{\frac{\sigma}{p+1}}$ auf Grund der Voraussetzung *konvergiert*, so folgt

---

*) Der Satz rührt im wesentlichen von Hadamard her (a. a. O. p. 204). Doch beweist H. nur, daß unter den gemachten Voraussetzungen:

$$|\mathfrak{L}(x)^{-1}| < e^{|x|^{\sigma+\delta}}.$$

Die hier gegebene schärfere Fassung stammt von Lindelöf (a. a. O. p. 11). Die Verwertung der schon von Laguerre bemerkten und zu analogen Zwecken benützten Relation (16), um den Beweis in der Hauptsache auf den Fall $p = 0$ zu reduzieren, findet sich bei Borel a. a. O. p. 76 (vgl. auch ebendas. p. 27).

aus dem eben bewiesenen Satze, daß für jedes $\varepsilon > 0$ und *unendlich viele*, auch *beliebig große* R eine Beziehung von der Form besteht:

(21) $$|\Pi(x)^{-1}| < e^{\frac{\varepsilon}{2}\cdot|y|^{\frac{\sigma}{p+1}}}, \text{ für } alle\ y \text{ mit dem absoluten Betrage } |y| = R.$$

Führt man wieder x^{p+1} an Stelle von y ein und setzt $R^{\frac{1}{p+1}} = r$, so findet man also:

(22) $$|\Pi(x)^{-1}| < e^{\frac{\varepsilon}{2}\cdot|x|^{\sigma}}, \text{ für } alle\ x \text{ mit dem absoluten Betrage } |x| = r.$$

Andererseits hat man, wegen $\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\sigma} = 0$, nach dem Hauptsatze von § 11, Nr. 2 (s. p. 306, Fußnote), wenn man die dort mit ε bezeichnete Zahl durch $\frac{\varepsilon}{2p}$ ersetzt:

$$|\mathfrak{L}(\eta^{\lambda}x)| < e^{\frac{\varepsilon}{2p}\cdot|x|^{\sigma}}, \text{ für } alle\ |x| > R_\varepsilon,$$

also:

(23) $$|\Pi_1(x)| < e^{\frac{\varepsilon}{2}\cdot|x|^{\sigma}}, \text{ für } alle\ |x| > R_\varepsilon,$$

und schließlich durch Zusammenfassung von (18), (22), (23):

(24) $$|\mathfrak{L}(x)^{-1}| < e^{\varepsilon\cdot|x|^{\sigma}}, \text{ für } alle\ |x| = r \text{ und } r > R_\varepsilon.$$

3. Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, daß das vorstehende Resultat wiederum keine Änderung erleidet, wenn $\mathfrak{L}(x)$ noch einen Faktor von der Form $x^k (k \geqq 1)$ enthält: in diesem Falle muß nämlich, sobald nur $|x| > 1$ ist, die Ungleichung (24) *a fortiori* bestehen, sobald sie *ohne* Hinzunahme jenes Faktors richtig war.

Ist ϱ *Grenzexponent* von $\mathfrak{L}(x)$, so besteht offenbar die Beziehung:

(25) $$|\mathfrak{L}(x)^{-1}| < e^{\varepsilon\cdot|x|^{\varrho}}$$

in dem angegebenen Umfange, sofern ϱ *Konvergenz*exponent ist. Wenn dies jedoch *nicht der Fall* oder zum mindesten *nicht festgestellt* ist, so erscheint nur soviel sicher, daß $\sum\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho+\delta}$ für jedes $\delta = 0$ *konvergiert* und daher für die Ungleichung (25) die folgende eintritt:

(26) $$|\mathfrak{L}(x)^{-1}| < e^{\varepsilon\cdot|x|^{\varrho+\delta}},$$

welche schließlich wegen der Möglichkeit, $\delta > 0$ unbegrenzt zu verkleinern, nicht mehr und nicht weniger aussagt*), also die folgende:

(27) $$|\mathfrak{L}(x)^{-1}| < e^{|x|^{\varrho+\delta}}$$

(für alle x auf unendlich vielen, auch *beliebig großen* Kreisen).

---

*) Vgl. die analoge Bemerkung p. 315, Fußn. 2.

§ 15.

Allgemeinste ganze Funktion von endlicher Ordnung: Zusammenhang zwischen Ordnung, Grad, Grenzexponent und Höhe. Vervollständigung des Picardschen Satzes.

1. Es sei jetzt $G(x)$ eine im übrigen beliebige ganze Funktion, von der nur soviel feststeht, daß sie von der Ordnung α (eine Voraussetzung, die ja lediglich gewisse infinitäre Eigenschaften der Taylorschen Reihenkoeffizienten erfordert, nämlich [s. p. 276, (Ia), (Ib)]:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = 0, \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \infty).$$

Bringt man $G(x)$ auf die jedenfalls mögliche Form:

$$G(x) = e^{g(x)} \cdot \mathfrak{L}(x) \tag{1}$$

(wobei sich $g(x)$ eventuell auf eine *Konstante*, $\mathfrak{L}(x)$ auf die *Einheit* oder eine *rationale ganze Funktion* reduzieren kann), so entsteht die Frage: Welche Aussagen lassen sich auf Grund der Voraussetzung, daß $G(x)$ von der Ordnung α, über den *Grad* von $g(x)$ und den *Grenzexponenten* von $\mathfrak{L}(x)$ machen?

Bezeichnet man den letzteren wiederum mit ϱ, so besteht nach dem Schlußergebnis von § 9 (p. 298) die Beziehung:

$$\varrho \leqq \alpha. \tag{2}$$

Dieses Resultat in Verbindung mit der Voraussetzung gestattet aber auch unmittelbar, einen Schluß auf den *rationalen* Charakter, bezw. den *Maximalgrad* von $g(x)$ zu ziehen. Aus (1) folgt nämlich:

$$|e^{g(x)}| = |G(x)| \cdot |\mathfrak{L}(x)^{-1}|, \tag{3}$$

und da:

$$\begin{cases} |G(x)| < e^{|x|^{\alpha+\delta}} & \text{für } alle\ |x| > R_\delta, \\ |\mathfrak{L}(x)^{-1}| < e^{|x|^{\varrho+\delta}} \leqq e^{|x|^{\alpha+\delta}} & \text{für alle } |x| = r \text{ und un-} \end{cases} \tag{4}$$

endlich viele, auch *beliebig große* r, so ergibt sich:

$$|e^{g(x)}| < e^{2\cdot|x|^{\alpha+\delta}} \qquad \text{für alle } |x| = r > R_\delta \tag{5}$$

also:

$$\Re(g(x)) < 2 \cdot |x|^{\alpha+\delta} \qquad \text{,, ,, ,, ,, ,,}, \tag{6}$$

woraus nach dem Satze von § 6, Nr. 2 (s. p. 284, Ungl. (10)) resultiert, daß $g(x)$ eine *rationale* ganze Funktion, deren Grad q zunächst der Beziehung genügt:

$$q \leqq \alpha + \delta.$$

Da aber δ unbegrenzt verkleinert werden darf, so folgt schließlich, daß, in voller Analogie mit Ungl. (2), auch:

(7) $$q \leqq \alpha.$$

Der Inhalt der Ungleichungen (2) und (7) kann mit Berücksichtigung der Beziehung $p \leqq \varrho$ zunächst generell folgendermaßen ausgesprochen werden:

Jede ganze Funktion von endlicher Ordnung α ist auch von endlicher Höhe $h \leqq \alpha$.

2. Aus dem Satze von § 13, Nr. 1 (p. 319) folgt, daß α *höchstens* gleich der größeren der beiden Zahlen q und ϱ sein kann, mit anderen Worten: Es können *keinesfalls gleichzeitig* die beiden Ungleichungen:

$$q < \alpha, \qquad \varrho < \alpha$$

bestehen. Kombiniert man dieses Resultat mit der erwiesenen Existenz der Relationen (2) und (7), so folgt:

Ist $G(x) = e^{g(x)} \cdot \mathfrak{P}(x)$ von der Ordnung α, so bestehen für den Grad q von $g(x)$ und den Grenzexponenten ϱ von $\mathfrak{P}(x)$ die Beziehungen:

(8) $$q \leqq \alpha, \qquad \varrho \leqq \alpha$$

in dem Sinne, daß mindestens in einer derselben das Gleichheitszeichen gilt.

Hieraus erkennt man, daß umgekehrt die Ordnung α von

$$G(x) = e^{g(x)} \cdot \mathfrak{P}(x)$$

stets *genau* gleich der *größeren* der beiden Zahlen q und ϱ bezw. $\alpha = q = \varrho$ sein muß: das am Schlusse von § 13 (p. 320) zunächst für den Fall $q \leqq \varrho$ konstatierte Resultat gilt somit *allgemein*. Zugleich ergibt sich damit die Richtigkeit des ebendaselbst am Anfange von Nr. 2 ausgesprochenen Satzes, wonach die Ordnung von $G_1(x) \cdot G_2(x) \equiv e^{g_1(x)} \cdot \mathfrak{P}_1(x) \cdot e^{g_2(x)} \cdot \mathfrak{P}_2(x)$ mit Ausnahme eines *einzigen*, dort näher spezifizierten Falles, allemal *genau* gleich α_2 sein muß, wenn $\alpha_2 \geqq \alpha_1$ und α_1, α_2 die Ordnungszahlen von $G_1(x)$, $G_2(x)$ bedeuten.

3. Ist α *keine ganze* Zahl, so folgt, da q nur eine *ganze Zahl* oder *Null* sein kann, aus (8), daß:

(9) $$q < \alpha \quad \text{und somit:} \quad \varrho = \alpha.$$

Zugleich ist dann $p < \varrho < p + 1$ (mit *Ausschluß* jeder Gleichheit), also: $p = [\varrho] \equiv [\alpha]$. Da andererseits $q \leqq [\alpha]$, so ergibt sich für die Höhe h die unzweideutige Bestimmung:

(10) $$h = [\alpha].$$

Im übrigen läßt sich der wesentliche Inhalt der aus der bloßen Voraussetzung einer *nicht-ganzzahligen* Ordnung α gewonnenen Beziehung $\varrho = \alpha$ ausführlicher folgendermaßen formulieren:

Eine ganze Funktion von nicht-ganzzahliger Ordnung α *besitzt stets unendlich viele Nullstellen, deren Dichtigkeit bezw. infinitäres Anwachsen durch die Relation:* $\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\alpha+\delta} = 0$ *charakterisiert wird.**)

Besonderes Interesse verdient noch der Fall $\alpha < 1$. Hier muß nach Ungl. (9) geradezu $q = 0$, außerdem $\varrho = \alpha < 1$, also auch $p = 0$ sein, d. h. $G(x)$ reduziert sich auf eine mit einem *konstanten Faktor* multiplizierte *primitive Funktion vom Range* 0, also:

Ist $G(x)$ *von einer Ordnung* $\alpha < 1$**), *so hat man:*

$$(11)\qquad G(x) = C \cdot x^k \cdot \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \quad \textit{und:} \quad a_\nu > \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}}.$$

Durch Substitution von x^2 an Stelle von x und eventuelle Multiplikation mit x ergibt sich hieraus noch der folgende Satz:

Ist $G(x)$ *eine gerade oder ungerade Funktion von niedrigerer als der* 2^{ten} *Ordnung, so ist* $G(x)$, *abgesehen von einem konstanten Faktor, eine primitive Funktion.*

Darnach erkennt man z. B. ohne jede Rechnung, daß die Produktentwickelungen von $\sin \pi x$, $\cos \pi x$ die Form haben müssen:

$$\sin \pi x = C \cdot x \cdot \prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right), \qquad \cos \pi x = C' \cdot \prod \left(1 - \frac{4x^2}{(2\nu+1)^2}\right).^{***})$$

4. Weniger einfach sind die Ergebnisse für den Fall, daß α *eine ganze Zahl.*†)

Einen brauchbaren Anhaltspunkt zur Beurteilung von q und ϱ gibt hier der Satz von § 6, Nr. 3, wonach $e^{g(x)}$ allemal dem *Normaltypus* (q, γ) angehört; d. h. es gibt eine bestimmte Zahl $\gamma > 0$, derart daß (s. p. 286, Ungl. (21)):

$$(12)\qquad |e^{g(x)}| \begin{cases} < e^{(1+\varepsilon)\cdot\gamma\cdot|x|^q} & \text{für } \textit{alle } |x| > R_\varepsilon, \\ > e^{(1-\varepsilon)\cdot\gamma\cdot|x|^q} & \text{für } \textit{gewisse beliebig große } x \text{ und zwar für} \end{cases}$$

*) Der *erste* Teil des Satzes ergab sich schon § 6, Nr. 3 am Schlusse (p. 286). Das wesentlich neue liegt in dem *zweiten* Teile.

**) Der Satz gilt insbesondere auch noch für $\alpha = 0$.

***) Hadamard, a. a. O. p. 209.

†) Im Falle $\alpha = 0$ hat man offenbar $q = 0$, $\varrho = 0$, d. h. $G(x)$ ist bis auf einen konstanten Faktor eine *primitive* Funktion vom *Grenzexponenten* 0 (nicht bloß vom *Range* 0).

alle x, welche gewisse *Strahlen* $x = |x| \cdot e^{\vartheta i}$, von $|x| > R_\varepsilon$ anfangend, vollständig erfüllen (s. p. 282, Ungl. (11)).

Kombiniert man diese Ungleichungen mit den beiden folgenden*):

$$(13) \quad |\mathfrak{L}(x)| \begin{cases} < e^{|x|^{\varrho+\delta}} & \text{für } \textit{alle } |x| > R_\delta, \\ > e^{-|x|^{\varrho+\delta}} & \text{für } \textit{alle } x \text{ auf } \textit{gewissen, beliebig großen } \text{Kreisen,} \end{cases}$$

so folgt zunächst:

$$(14) \qquad |G(x)| \begin{cases} < e^{(1+\varepsilon)\cdot\gamma\cdot|x|^q + |x|^{\varrho+\delta}} & \text{für } \textit{alle hinlänglich großen } x, \\ > e^{(1-\varepsilon)\cdot\gamma\cdot|x|^q - |x|^{\varrho+\delta}} & \text{für } \textit{gewisse beliebig große } x \end{cases}$$

(nämlich diejenigen x, welche den Schnittpunkten der ad (12) und (13) genannten *Strahlen* und *Kreise* entsprechen). *Ist jetzt:* $\varrho < \alpha$, also zugleich nach (8): $q = \alpha$, so ergibt sich aus (14):

$$(15) \qquad |G(x)| \begin{cases} < e^{(1+\varepsilon')\cdot\gamma\cdot|x|^\alpha} & \text{für } \textit{alle hinlänglich großen } x, \\ > e^{(1-\varepsilon')\cdot\gamma\cdot|x|^\alpha} & \text{für } \textit{gewisse beliebig große } x, \end{cases}$$

d. h. $G(x)$ gehört in diesem Falle dem *Normaltypus* (α, γ) an, sodaß also die Koeffizienten der Potenzreihe: $G(x) = \sum_0^\infty c_\nu x^\nu$ der Relation genügen (s. p. 277, Gl. III):

$$(16) \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = (\alpha\gamma e)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{(d. h. } \textit{endlich und von Null verschieden}\text{).}$$

Hieraus gewinnt man aber sofort das folgende Resultat:

> *Ist $G(x)$ von ganzzahliger Ordnung α, ohne dem Normaltypus anzugehören, d. h. ohne einer Koeffizientenrelation von der Form* (16) *zu genügen, so ist allemal $\varrho = \alpha$ (während für q noch der Spielraum $0 \leqq q \leqq \alpha$ bleibt).*

5. *Gehört also $G(x)$ dem Minimal- oder Maximaltypus der ganzzahligen Ordnung α an,* so besteht für den *Grenzexponenten* ϱ die Beziehung $\varrho = \alpha$ geradeso, wie im Falle eines *nicht-ganzzahligen* α. Auch

---

*) Kombiniert man die *zweite* der Ungleichungen (13) mit der folgenden (welche sich aus der ersten Ungl. (11), p. 282 ergibt, wenn man $g(x)$ durch $-g(x)$ ersetzt und zum reziproken Werte übergeht):

$$|e^{g(x)}| > e^{-(1+\varepsilon)\cdot\gamma\cdot|x|^q} \quad \text{für } \textit{alle } |x| > R_\varepsilon,$$

so folgt zunächst:

$$|G(x)| > e^{-(1+\varepsilon)\cdot\gamma\cdot|x|^q - |x|^{\varrho+\delta}}$$

und, wegen $q \leqq \alpha$, $\varrho \leqq \alpha$, schließlich:

$$|G(x)| > e^{-|x|^{\alpha+\delta'}}$$

für *alle* x auf *gewissen, beliebig großen* Kreisen. (Vgl. v. Schaper, a. a. O. p. 53).

wird hier noch $p = \alpha$ und somit $h = \alpha$, wenn ϱ *Divergenz*exponent ist, was offenbar mit Sicherheit dann eintritt, wenn $G(x)$ dem *Maximal*typus angehört (da in diesem Falle offenbar $\mathfrak{L}(x)$ diesem letzteren angehören muß). Ist dagegen ϱ *Konvergenz*exponent, so wird allemal $p = \varrho - 1 = \alpha - 1$ und daher auch $h = \alpha - 1$ *dann und nur dann*, wenn $q < \alpha$. Da in diesem Falle $\mathfrak{L}(x)$ dem *Minimal*typus (α) angehören muß (s. § 12, Nr. 1, p. 317) und, wegen $q < \alpha$, das gleiche für $G(x)$ gilt, so folgt zunächst:

Die Zugehörigkeit von $G(x)$ zum Minimaltypus (α), also die Existenz der Koeffizientenrelation (p. 277, Gl. (IIa)):

$$\lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = 0 \tag{17}$$

ist eine notwendige Bedingung dafür, daß $G(x)$ von der Höhe $h = \alpha - 1$.

Wir zeigen:

*Diese Bedingung ist auch hinreichend, sofern nur $\varrho = \alpha$ Konvergenzexponent ist.**)

Mit anderen Worten: Wenn die eben genannten Voraussetzungen erfüllt sind, so wird allemal schon von selbst $q < \alpha$. Man hat nämlich:

$$|G(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\alpha} \quad \text{für } alle\ |x| > R_\varepsilon \text{ (nach Voraussetzung)}$$

$$|\mathfrak{L}(x)^{-1}| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\alpha} \quad \text{für } alle\ |x| = r \text{ und } gewisse\ beliebig\ große\ r$$

(nach p. 324, Ungl. (15))

und daher:

$$|e^{g(x)}| \equiv |G(x)| \cdot |\mathfrak{L}(x)^{-1}| < e^{2\varepsilon \cdot |x|^\alpha} \quad \text{für } alle\ |x| = r > R_\varepsilon, \tag{18}$$

---

*) Diese Bemerkung rührt von E. Lindelöf her, welcher zugleich auch *hinreichende* Koeffizientenbedingungen dafür angibt, daß $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\alpha$ mit Sicherheit *konvergiert* (a. a. O p. 47), z. B.:

$$\lim_{\nu=\infty} \left(\nu \cdot (\lg \nu)^{1+\sigma}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = 0,$$

allgemein:

$$\lim_{\nu=\infty} \left(\nu \cdot \lg \nu \cdot \lg_2 \nu \cdots (\lg_\varkappa \nu)^{1+\sigma}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = 0,$$

d. h. die Zahlen $\sqrt[\nu]{|c_\nu|}$ müssen einem der bekannten logarithmischen („*Bertrandschen*“) Kriterien genügen, welches die *Konvergenz* von $\sum\left(\sqrt[\nu]{|c_\nu|}\right)^\alpha$ nach sich zieht. Die hiernach scheinbar nahe liegende Vermutung, daß überhaupt die *Konvergenz* von $\sum\left(\sqrt[\nu]{|c_\nu|}\right)$ sich als *hinreichend* oder gar als *notwendig und hinreichend* für die *Konvergenz* von $\sum\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\alpha$ erweisen dürfte, ist *nicht* stichhaltig, wie schon Lindelöf in hohem Grade wahrscheinlich gemacht (a. a. O. p. 79), E. Fabry (Bull. Soc. math. de Fr. 30 [1902], p. 165) wirklich bewiesen hat.

sodaß also:

$$(19) \qquad \Re(g(x)) < 2\varepsilon \cdot |x|^{\alpha} \qquad \text{für } \textit{alle } |x| = r > R_{\varepsilon}$$

und somit nach dem Satze von § 6, Nr. 2 (s. p. 286, Ungl. (20)), wie behauptet:

$$q < \alpha.$$

Nimmt man hierzu noch die in § 12, Nr. 2 (p. 317) gemachte Bemerkung, daß, bei ganzzahligem α und Zugehörigkeit von $\mathfrak{P}(x)$ zum *Minimal*typus, α *„in der Regel“* (in einem a. a. O. näher präzisierten Sinne) *Konvergenz*exponent sein muß, so wird man das vorliegende Resultat geradezu in folgender Weise aussprechen können:

Ist $G(x)$ von der ganzzahligen Ordnung α, so ist die Zugehörigkeit zum Minimaltypus eine notwendige und „im allgemeinen“ auch hinreichende Bedingung dafür, daß $G(x)$ die Höhe $h = \alpha - 1$ besitzt.

Gehört schließlich $G(x)$ bei ganzzahligem α dem Normaltypus an, so läßt sich *zunächst* über den Wert von ϱ *überhaupt keine definitive Aussage machen.* Natürlich muß nach dem Satze von Nr. 2 auch hier $\varrho = \alpha$ werden, falls $q < \alpha$ ist: man besitzt aber keinerlei Kriterium dafür, um eventuell diese letztere Tatsache aus der Darstellung $G(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, c_{\nu} x^{\nu}$ erschließen zu können. Ist nun aber $q = \alpha$, und setzt man wiederum $G(x) = e^{g(x)} \cdot \mathfrak{P}(x)$, so kann offenbar $\mathfrak{P}(x)$ *jeden beliebigen Grenzexponenten* $\varrho \leqq \alpha$ besitzen, eventuell sich auch auf eine *rationale ganze Funktion* oder eine *Konstante* reduzieren. Nichtsdestoweniger läßt sich zeigen, daß auch hier *„im allgemeinen“* (in einem sogleich genauer zu präzisierenden Sinne): $\varrho = \alpha$ sein muß. Um die Richtigkeit dieser scheinbar *paradoxen* Behauptung einzusehen, ist es notwendig, den Begriff des *Grenzexponenten* unter einem etwas allgemeineren Gesichtspunkte, als bisher, ins Auge zu fassen.

6. Wir betrachten hierbei zunächst nochmals die bereits zuvor erledigten Fälle eines $G(x)$ von *nicht-ganzzahliger* Ordnung α, bezw. vom *Minimal-* oder *Maximal*typus einer *ganzzahligen* Ordnung α. Bedeutet dann b eine ganz beliebige komplexe Zahl, so ist $(G(x) - b)$ eine ganze Funktion von derselben *Ordnung* und auch vom nämlichen *Spezialtypus* wie $G(x)$*): daraus folgt aber, daß auch $(G(x) - b)$ *unendlich viele Null-*

*) Dies kann unmittelbar mit Hilfe der (Ordnung bezw. Spezialtypus) definierenden Ungleichungen oder noch einfacher aus dem Umstande erkannt werden, daß ja Ordnung und Spezialtypus lediglich von *infinitären* Eigenschaften der Potenzreihenkoeffizienten abhängen: vgl. § 4, Nr. 4 (p. 277).

stellen b_ν *mit dem Grenzexponenten* α besitzt, d. h. man hat (s. p. 294, Gl. (8), (9)) für jedes $\varepsilon > 0$:

$$(20) \qquad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{b_\nu}\right|^{\alpha+\varepsilon} = 0, \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{b_\nu}\right|^{\alpha-\varepsilon} = \infty,$$

anders geschrieben:

$$(21) \qquad \begin{cases} |b_\nu| > \nu^{\frac{1}{\alpha+\varepsilon}} = \nu^{\frac{1}{\alpha}-\delta} & \text{für } \textit{alle hinlänglich großen } \nu, \\ |b_\nu| < \nu^{\frac{1}{\alpha-\varepsilon}} = \nu^{\frac{1}{\alpha}+\delta} & \text{für } \textit{unendlich viele } \nu. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen besagen, daß die $|b_\nu|$ mit wachsendem Index ν *um so langsamer* zunehmen, die b_ν selbst also *um so dichter* liegen, je *größer* α ist, sodaß also die durchschnittliche *Häufigkeit* der b_ν in bestimmter Weise mit dem Werte von α zusammenhängt, insbesondere *gleichzeitig* mit α *zunimmt*. Wir wollen hiernach die Bezeichnung einführen, den Termen b_ν $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ einer Zahlenfolge mit niemals abnehmenden, schließlich ins Unendliche wachsenden absoluten Beträgen, komme die *Häufigkeit* $H(\alpha)$ zu, wenn jene Folge den *Grenzexponenten* α besitzt, sodaß also $H(\alpha)$ als mit α in gewisser Weise *zunehmend* anzusehen ist. Mit Benützung dieser Ausdrucksweise läßt sich die oben bezüglich der Nullstellen von $G(x) - b$ gemachte Bemerkung jetzt folgendermaßen formulieren:

Eine ganze Funktion von nicht-ganzzahliger Ordnung α, *bezw. vom Minimal- oder Maximaltypus einer ganzzahligen Ordnung* α *nimmt geradeso, wie den Wert* 0, *auch jeden beliebigen endlichen Wert mit der Häufigkeit* $H(\alpha)$ *an: sie nimmt also jeden bestimmten Wert nicht nur unendlich oft, sondern in dem näher bezeichneten Sinne gleich oft an.*

7. Wenden wir nun die nämliche Betrachtungsweise auf eine Funktion $G(x)$ vom *Normal*typus einer *ganzzahligen* Ordnung α an, so folgt zunächst wieder, daß $(G(x) - b)$ (wo b jede beliebige Zahl einschließlich der Null bezeichnen soll) gleichfalls dem *Normal*typus der Ordnung α angehört, sodaß also über die Verteilung der Nullstellen bezw. den *Grenzexponenten* von $(G(x) - b)$ *a priori* keinerlei Aussage gemacht werden kann. Es gilt nun aber der folgende merkwürdige Satz:

Die Funktion $(G(x) - b)$ *besitzt für alle möglichen Werte von* b, *höchstens mit Ausnahme eines einzigen den Grenzexponenten* α.

---

*) Dabei bestehen wegen der Konstanz des Ordnungs*typus* für die b_ν nicht bloß die Beziehungen (20), sondern auch die für die a_ν bestehenden spezielleren Relationen, welche den betreffenden Spezialtypus charakterisieren (s. p. 298, p. 316).

Beweis. Angenommen, es sei b_0 eine solche Zahl, daß $(G(x) - b_0)$ *nicht* den Grenzexponenten α besitzt, so muß, wenn gesetzt wird:

$$G(x) - b_0 = e^{g_0(x)} \cdot \mathfrak{L}_0(x), \tag{22}$$

$\mathfrak{L}_0(x)$ von *niedrigerer* Ordnung $\alpha_0 < \alpha$ (eventuell auch eine ganze rationale Funktion oder eine von Null verschiedene Konstante) sein, während dann mit Sicherheit $e^{g_0(x)}$ von der *Ordnung* α, also $g_0(x)$ vom *Grade* α ist.

Bedeutet jetzt b *irgend eine* von b_0 verschiedene Zahl, und setzt man:

$$G(x) - b = e^{g(x)} \cdot \mathfrak{L}(x), \tag{23}$$

so ist zu zeigen, daß $\mathfrak{L}(x)$ allemal den *Grenzexponenten* α, d. h. schließlich die *Ordnungszahl* α besitzt. Das letztere ist aber sicher der Fall, wenn der *Grad* von $g(x)$ die Zahl α nicht erreicht. Somit braucht der fragliche Nachweis überhaupt nur unter der Voraussetzung geführt zu werden, daß $g(x)$ *vom Grade* α.

Aus (22), (23) folgt zunächst:

$$e^{g(x)} \cdot \mathfrak{L}(x) = e^{g_0(x)} \cdot \mathfrak{L}_0(x) + (b_0 - b). \tag{24}$$

Bringt man diese Gleichung auf die Form:

$$\mathfrak{L}(x) = e^{g_0(x) - g(x)} \cdot \mathfrak{L}_0(x) + (b_0 - b) \cdot e^{-g(x)}, \tag{25}$$

so erkennt man unmittelbar, daß der rechts stehende Ausdruck und somit auch $\mathfrak{L}(x)$ von der Ordnung α sein muß, wenn $g_0(x) - g(x)$ vom *niedrigerem* Grade, als α (Nach dem Satze über die Ordnung der *Summe* zweier Funktionen, p. 319, Fußn.).

Ist dagegen $g_0(x) - g(x)$ vom Grade α, so bilde man durch Derivation von Gl. (24):

$$e^{g(x)}(g'(x) \cdot \mathfrak{L}(x) + \mathfrak{L}'(x)) = e^{g_0(x)}(g_0'(x) \cdot \mathfrak{L}_0(x) + \mathfrak{L}_0'(x))$$

und sodann durch Multiplikation mit $e^{-g(x)}$:

$$g'(x) \cdot \mathfrak{L}(x) + \mathfrak{L}'(x) = e^{g_0(x) - g(x)}(g_0'(x) \cdot \mathfrak{L}_0(x) + \mathfrak{L}_0'(x)). \tag{26}$$

Da die Ableitung einer ganzen Funktion von der nämlichen Ordnung ist, wie diese selbst (s. § 4 am Ende, p. 280), so folgt wieder mit Benützung des Satzes über die Ordnung einer Summe, daß die rechte Seite dieser Gleichung, also auch die linke und schließlich $\mathfrak{L}(x)$ von der Ordnung α sein muß.

Somit ist, wie auch $b \neq b_0$ gewählt werden möge, $(G(x) - b)$ vom *Grenzexponenten* α.

8. Aus dem eben bewiesenen Satze folgt, daß auch eine dem *Normaltypus* der *ganzzahligen* Ordnung α angehörige ganze Funktion $G(x)$ *jeden* bestimmten Wert b mit der *Häufigkeit* $H(\alpha)$ annimmt, mit *eventueller* Ausnahme eines *einzigen* Wertes b_0, welcher dann mit *unternormaler Häufigkeit* (also mit einer *Häufigkeit* $H(\alpha')$, wo $\alpha' < \alpha$ bezw. nur *n mal* oder auch *garnicht*) angenommen wird. *Nur*, wenn gerade der *spezielle*

Fall $b_0 = 0$ eintritt (mit anderen Worten, nur, wenn das *konstante* Glied der Entwickelung $G(x) = \sum_0^\infty c_\nu x^\nu$ einen ganz *speziellen* Wert hat), wird also $G(x)$ *nicht* den Grenzexponenten α besitzen. Damit gewinnt aber schon die am Schlusse von Nr. 5 gemachte Aussage, daß auch in dem vorliegenden Falle der *Grenzexponent* von $G(x)$ *„im allgemeinen"* den Wert α habe, *einen wohldefinierten Sinn.*

Die Bedeutung jener Aussage läßt sich indessen noch ganz erheblich durch den Nachweis verschärfen, daß jener *möglicherweise* vorhandene Ausnahmewert b_0 wiederum *„im allgemeinen" gar nicht existiert.* Es läßt sich nämlich mit denselben Hilfsmitteln, welche zum Beweise des Satzes von Nr. 7 dienten, der folgende allgemeinere Satz*) beweisen:

Es sei $G(x)$ eine ganze Funktion vom Normaltypus der ganzzahligen Ordnung α. Bedeuten ferner $\pi(x)$, $\gamma(x)$ willkürlich zu wählende ganze Funktionen von niedrigerer Ordnung, und zwar $\pi(x)$ eine primitive Funktion, die sich eventuell auch auf eine ganze rationale oder auf die Einheit reduzieren kann; $\gamma(x)$ eine im übrigen beliebige ganze Funktion, die mit $\pi(x)$ keinen Linearfaktor gemein hat, eventuell eine von Null verschiedene Konstante: dann gibt es unter allen möglichen Funktionen von der Form:

$$\mathfrak{G}(x) = \pi(x) \cdot G(x) + \gamma(x) \tag{27}$$

höchstens eine einzige, welche nicht den Grenzexponenten α besitzt.

Beweis. Man bemerke zunächst, daß offenbar $\pi(x) \cdot G(x)$, also auch $\mathfrak{G}(x)$ stets dem *Normal*typus der *Ordnung* α angehört**). Hiernach ist in der Tat die *Möglichkeit* vorhanden, daß zunächst irgend eine bestimmte unter den Funktionen $\mathfrak{G}(x)$, etwa:

---

*) Präzisere Fassung eines Borelschen Satzes: a. a. O. p. 95. Der dort gegebene Beweis enthält einen Rechenfehler, durch welchen ein Teil der Deduktion hinfällig wird. In den neuerdings von Borel publizierten *Leçons sur la théorie des fonctions méromorphes* (Paris 1903) p. 59 findet sich der Satz reproduziert: hier ist zwar jener Rechenfehler vermieden, doch sind Fassung und Beweis des Satzes unvollständig.

**) *Genauer:* Gehört $G(x)$ dem Normaltypus (γ, α) an, so gilt dasselbe auch für $\mathfrak{G}(x)$. Man hat, um dies zu erkennen, auf $\pi(x)$ außer der Ungleichung:

$$|\pi(x)| < e^{|x|^{\alpha'+\delta}} \quad \text{für} \quad |x| > R_\delta$$

(wo $\alpha' < \alpha$ die Ordnung von $\pi(x)$ bedeutet) noch die auf unendlich vielen, beliebig großen Kreisen gültige (s. p. 325, Ungl. (27)):

$$|\pi(x)| > e^{-|x|^{\alpha'+\delta}}$$

anzuwenden.

(28) $$\mathfrak{G}_0(x) = \pi_0(x) \cdot G(x) + \gamma_0(x)$$

nicht den Grenzexponenten α besitzt und daher in die Form gesetzt werden kann:

(29) $$\pi_0(x) \cdot G(x) + \gamma_0(x) = e^{g_0(x)} \cdot \mathfrak{L}_0(x),$$

wo $g_0(x)$ vom *Grade* α, $\mathfrak{L}_0(x)$ von einer *Ordnung*, die *kleiner* als α.

Versteht man jetzt unter $\pi(x)$, $\gamma(x)$ zwei beliebige der näher bezeichneten Funktionen, von denen *mindestens eine* von $\pi_0(x)$ bezw. $\gamma_0(x)$ *verschieden* ist, und setzt man:

(30) $$\pi(x) \cdot G(x) + \gamma(x) = e^{g(x)} \cdot \mathfrak{L}(x),$$

so kommt es wieder nur darauf an zu zeigen, daß $\mathfrak{L}(x)$ von der *Ordnung* α sein muß, auch wenn $g(x)$ vom *Grade* α (denn *andernfalls* ist das ja ohne weiteres ersichtlich).

Durch Elimination von $G(x)$ aus Gl. (29), (30) ergibt sich zunächst:

(31) $$e^{g(x)} \cdot \mathfrak{L}(x) \cdot \pi_0(x) = e^{g_0(x)} \cdot \mathfrak{L}_0(x) \cdot \pi(x) + \varphi(x),$$

wo:
$$\varphi(x) = \gamma_0(x) \cdot \pi(x) - \gamma(x) \cdot \pi_0(x),$$

sodaß also $\varphi(x)$ keinesfalls identisch verschwinden kann. Denn aus:

$$\gamma_0(x) \cdot \pi(x) - \gamma(x) \cdot \pi_0(x) \equiv 0$$

würde folgen, daß jeder Linearfaktor von $\pi(x)$ in $\gamma(x) \cdot \pi_0(x)$, also schließlich in $\pi_0(x)$ enthalten sein müßte und umgekehrt. Da aber die Natur dieser Linearfaktoren auch die Form der in $\pi(x)$ bezw. $\pi_0(x)$ etwa vorkommenden Exponentialfaktoren völlig eindeutig bestimmt, so hätte man hiernach geradezu: $\pi(x) \equiv \pi_0(x)$ und somit auch $\gamma(x) \equiv \gamma_0(x)$, was der Voraussetzung widerspricht.

Bringt man nun Gl. (31) auf die Form:

(32) $$\mathfrak{L}(x) \cdot \pi_0(x) = e^{g_0(x) - g(x)} \cdot \mathfrak{L}_0(x) + e^{-g(x)} \cdot \varphi(x),$$

so erkennt man zunächst wieder ohne weiteres, daß der rechts stehende Ausdruck, also schließlich auch $\mathfrak{L}(x)$, von der Ordnung α, wenn $g_0(x) - g(x)$ von *niedrigerem* Grade als α.

Es bleibt also nur noch der Fall zu behandeln, daß $g_0(x) - g(x)$ vom Grade α. Führt man die Abkürzungen ein:

(33) $$\mathfrak{L}(x) \cdot \pi_0(x) = \Pi(x), \qquad \mathfrak{L}_0(x) \cdot \pi(x) = \Pi_0(x),$$

sodaß also Gl. (31) in die folgende übergeht:

(34) $$e^{g(x)} \cdot \Pi(x) = e^{g_0(x)} \cdot \Pi_0(x) + \varphi(x),$$

so folgt durch Derivation:

(35) $$e^{g(x)}(g'(x) \cdot \Pi(x) + \Pi'(x)) = e^{g_0(x)}(g_0'(x) \cdot \Pi_0(x) + \Pi_0'(x)) + \varphi'(x).$$

Sollte hierbei $\varphi'(x) \equiv 0$ sein (was nicht ausgeschlossen erscheint), so findet man:

(36) $$g'(x) \cdot \Pi(x) + \Pi'(x) = e^{g_0(x) - g(x)} \cdot (g_0'(x) \cdot \Pi_0(x) + \Pi_0'(x))$$

und da der erste Faktor rechts von der Ordnung α, der zweite von niedrigerer Ordnung, so folgt zunächst, daß der links stehende Ausdruck, somit auch $\Pi(x)$ und schließlich (mit Rücksicht auf Gl. (33)) auch $\mathfrak{L}(x)$ von der Ordnung α.

Wenn dagegen $\varphi'(x)$ *nicht* identisch verschwindet, so multipliziere man Gl. (34) mit $\varphi'(x)$, Gl. (35) mit $\varphi(x)$ und bilde durch Subtraktion und Multiplikation mit $e^{-g(x)}$:

$$(37)\quad \begin{aligned} &g'(x)\cdot\varphi(x)\cdot\Pi(x)+\varphi(x)\cdot\Pi'(x)-\varphi'(x)\cdot\Pi(x)\\ &= e^{g_0(x)-g(x)}(g_0'(x)\cdot\varphi(x)\cdot\Pi_0(x)+\varphi(x)\cdot\Pi_0'(x)-\varphi'(x)\cdot\Pi_0(x)),\end{aligned}$$

woraus sofort wieder folgt, daß die linke Seite, also schließlich $\mathfrak{L}(x)$ von der Ordnung α, sofern nicht etwa die rechte Seite (und dann *eo ipso* auch die linke) identisch verschwindet. Hätte man nun aber:

$$g_0'(x)\cdot\varphi(x)\cdot\Pi_0(x)+\varphi(x)\cdot\Pi_0'(x)-\varphi'(x)\cdot\Pi_0(x)=0,$$

so würde sich ergeben:

$$\frac{\Pi_0'(x)}{\Pi_0(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=g'(x),$$

also:

$$\Pi_0(x)=\varphi(x)\cdot e^{g(x)+C},$$

was unmöglich ist, da die rechte Seite von der Ordnung α, wogegen $\Pi_0(x)$ von niedrigerer Ordnung.

Damit ist aber der ausgesprochene Satz bewiesen.

9. Bezeichnet man wiederum mit b eine beliebige komplexe Zahl (einschließlich der Null), so folgt aus dem eben bewiesenen Satze, daß überhaupt unter *allen möglichen* Funktionen $\pi(x)\cdot G(x)+\gamma(x)$ (wo also $G(x)$ eine beliebig gewählte, aber fest zu haltende Funktion vom *Normaltypus* der *ganzzahligen* Ordnung α bedeutet) *höchstens* für diejenigen von der *Spezialform* $\pi_0(x)\cdot G(x)+(\gamma_0(x)-b)$ ein mit *unternormaler Häufigkeit* angenommener Ausnahmswert b existiert. Faßt man dieses Ergebnis mit demjenigen von Nr. 6 zusammen, so gelangt man zu der folgenden Vervollständigung des Picardschen Satzes (vgl. den Schluß von § 7, p. 291):

Eine ganze Funktion $G(x)$ von der Ordnung α nimmt jeden bestimmten Wert mit der Häufigkeit $H(\alpha)$ an. Nur wenn α eine ganze Zahl und zugleich $G(x)$ dem Normaltypus angehört, kann ein einzelner Wert b existieren, welcher von $G(x)$ mit unternormaler Häufigkeit bezw. gar nicht angenommen wird. Aber selbst unter den über Ordnung und Typus von $G(x)$ gemachten beschränkenden Voraussetzungen ist die Existenz eines solchen Spezialwertes b als ein Ausnahmefall anzusehen.

München, April 1903.

Nachtrag.

Wir lassen noch die in Fußnote p. 273 bereits angekündigte Modifikation der Lindelöfschen Methode*) folgen, welche eine etwas kürzere und dabei wiederum vollkommen elementare Herleitung des in § 4, Nr. 4 (p. 276) formulierten *Hauptresultates* gestattet.

1. Dem *Hauptsatze* I (p. 266) stellen wir anstatt des *Hauptsatzes* II (p. 270) die folgende (nicht ganz vollkommene) *Umkehrung* gegenüber:

Ist:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{1}$$

so hat man bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

$$\left|\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu x^\nu\right| < e^{(\gamma+\varepsilon)|x|^\alpha} \quad \textit{für alle} \quad |x| > R_\varepsilon. \tag{2}$$

---

*) Herr Lindelöf geht von derjenigen Form der Voraussetzung aus, welche in der hier akzeptierten Schreibweise lauten würde:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Der Beweis des Satzes von Nr. 1 fordert alsdann die Bestimmung einer oberen Schranke für eine Reihe von der Form:

$$\sum \left(\frac{r}{\nu^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\nu$$

und damit die Bestimmung des *Maximums* von:

$$\left(\frac{r}{\nu^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\nu$$

als Funktion von ν — eine Aufgabe, welche die Heranziehung der *Differentialrechnung*, also eines nicht im Rahmen der „*elementaren*" Funktionentheorie liegenden Hilfsmittels erheischt. Dies wird, wie aus dem Texte ersichtlich ist, vermieden, wenn man, wie hier, von der Voraussetzung:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}$$

ausgeht, da die in diesem Falle lediglich erforderliche *Maximums*bestimmung von:

$$\frac{r^\nu}{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

sich ohne jede Rechnung vollzieht.

Beweis. Wird $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so hat man auf Grund der zweiten Form von Voraussetzung (1) für $\nu > n_\varepsilon$:

$$\sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} < \left(\alpha \cdot \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \text{also:} \quad |c_\nu| < \left(\frac{\alpha^\nu \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right)^\nu}{\nu!}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Setzt man also allgemein:

$$|c_\nu| = k_\nu \cdot \left(\frac{\alpha^\nu \cdot \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right)^\nu}{\nu!}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

und bezeichnet mit K die größte der Zahlen $k_0, k_1, \cdots, k_{n_\varepsilon}$ und 1, so hat man für *jedes* ν:

$$(3) \qquad |c_\nu| \leqq K \cdot \left(\frac{\alpha^\nu \cdot \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right)^\nu}{\nu!}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

(wobei das Zeichen $<$ zum mindesten für alle $\nu > n_\varepsilon$ gilt) und daher:

$$(4) \qquad \left|\sum_0^\infty {}^\nu c_\nu x^\nu\right| < K \cdot \sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\left(\alpha \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |x|\right]^\nu \equiv K \cdot \sum_0^\infty {}^\nu r_\nu.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(5) \qquad \left(\alpha \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |x| = \varrho^{\frac{1}{\alpha}} \quad \left(\text{also:} \quad \varrho = \alpha\left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot |x|^\alpha\right),$$

so wird:

$$r_\nu = \left(\frac{\varrho^\nu}{\nu!}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{\varrho}{1} \cdot \frac{\varrho}{2} \cdots \frac{\varrho}{\nu}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Die r_ν nehmen also *zu*, solange $\nu < \varrho$, sie nehmen *ab*, sobald $\nu > \varrho$. Das *Maximum* von r_ν tritt daher ein für $\nu = [\varrho]$, sodaß also:

$$\text{Max. } r_\nu = \left(\frac{\varrho^{[\varrho]}}{[\varrho]!}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Wegen: $\frac{1}{\nu!} < \left(\frac{e}{\nu}\right)^\nu$ (s. Ungl. (5), p. 267) ergibt sich dann:

$$\frac{\varrho^{[\varrho]}}{[\varrho]!} < \left(\frac{\varrho}{[\varrho]}\right)^{[\varrho]} \cdot e^{[\varrho]} = \left(1 + \frac{\varrho - [\varrho]}{[\varrho]}\right)^{[\varrho]} \cdot e^{[\varrho]}$$
$$< e^{\varrho - [\varrho]} \cdot e^{[\varrho]} = e^\varrho$$

und daher:

$$(6) \qquad \text{Max. } r_\nu < e^{\frac{1}{\alpha} \cdot \varrho}.$$

Ferner hat man:

$$\left(\frac{\varrho}{\nu}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqq \frac{1}{2}, \quad \text{wenn:} \quad \nu \geqq 2^\alpha \cdot \varrho,$$

und somit:

$$(7) \qquad \begin{aligned} \sum_0^\infty {}_\nu\, r_\nu &= \sum_0^{[2^\alpha \cdot \varrho]} {}_\nu\, r_\nu + \sum_{[2^\alpha \cdot \varrho]+1}^\infty {}_\nu\, r_\nu \\ &< \text{Max.}\, r_\nu \cdot \left([2^\alpha \cdot \varrho] + 1 + \sum_1^\infty {}_\nu \left(\frac{1}{2}\right)^\nu\right) \\ &< (2^\alpha \cdot \varrho + 2) \cdot e^{\frac{1}{\alpha} \cdot \varrho}. \end{aligned}$$

Hiernach geht also die Ungleichung (4), wenn man noch für ϱ seinen Wert aus Gl. (5) einsetzt, in die folgende über:

$$(8) \qquad \left|\sum_0^\infty {}_\nu\, c_\nu x^\nu\right| < K \cdot \left(\alpha\left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot |2x|^\alpha + 2\right) \cdot e^{\left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot |x|^\alpha}$$

und, wenn jetzt R_ε so fixiert wird, daß:

$$(9) \qquad K \cdot \left(\alpha\left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right) |2x|^\alpha + 2\right) < e^{\frac{\varepsilon}{2} \cdot |x|^\alpha} \quad \text{für} \quad |x| > R_\varepsilon,$$

schließlich, wie behauptet:

$$\left|\sum_0^\infty {}_\nu\, c_\nu x^\nu\right| < e^{(\gamma + \varepsilon) \cdot |x|^\alpha} \quad \text{für} \quad |x| > R_\varepsilon.$$

Zusatz. Man erkennt unmittelbar, daß der vorstehende Beweis und somit auch der oben ausgesprochene Satz noch gültig bleibt, wenn $\gamma = 0$; d. h.:

Ist:

$$(10) \qquad \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} = 0,$$

so hat man bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

$$(11) \qquad \left|\sum_0^\infty {}_\nu\, c_\nu x^\nu\right| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\alpha} \quad \textit{für alle } |x| > R_\varepsilon.$$

Daraus folgt weiter:

Ist für jedes $\delta > 0$:

$$(12) \qquad \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot |c_\nu|} = 0,$$

so hat man:

$$(13) \qquad \left|\sum_0^\infty {}_\nu\, c_\nu x^\nu\right| < e^{|x|^{\alpha+\delta}} \quad \textit{für alle } |x| > R_\delta.$$

2. Die Voraussetzung des Hauptsatzes I (p. 266) läßt sich nun wieder leicht so umformen, daß die genauen Umkehrungen der in Nr. 1 abgeleiteten Sätze zum Vorschein kommen.

Zunächst ergibt sich (s. p. 273, 274):

Ist bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

$$\left|\sum_0^\infty{}^{\nu} c_\nu x^\nu\right| < e^{(\gamma+\varepsilon)\cdot|x|^\alpha} \quad \textit{für alle } |x| > R_\varepsilon, \tag{14}$$

so hat man:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{15}$$

Und analog (s. p. 275):

Ist bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

$$\left|\sum_0^\infty{}^{\nu} c_\nu x^\nu\right| < e^{\varepsilon\cdot|x|^\alpha} \quad \textit{für alle } |x| > R_\varepsilon, \tag{16}$$

so hat man:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} = 0. \tag{17}$$

Schließlich (s. p. 275, 276):

Ist bei beliebig kleinem $\delta > 0$:

$$\left|\sum_0^\infty{}^{\nu} c_\nu x^\nu\right| < e^{|x|^{\alpha+\delta}} \quad \textit{für alle } |x| > R_\delta, \tag{18}$$

so hat man auch:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|e_\nu|} = \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot |c_\nu|} = 0. \tag{19}$$

3. Die Umkehrbarkeit des ersten Satzes von Nr. 2 bezw. Nr. 1 liefert sodann noch den folgenden Satz:

Ist bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

$$\left|\sum_0^\infty{}^{\nu} c_\nu x^\nu\right| > e^{(\gamma-\varepsilon)\cdot|x|^\alpha} \quad \textit{für gewisse beliebig große } x, \tag{20}$$

so hat man:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} \geqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{21}$$

und umgekehrt.

Beweis. Angenommen die Beziehung (21) folgte *nicht* aus der Voraussetzung (20), so hätte man:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} < (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}},$$

sodaß also gesetzt werden könnte:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = (\alpha(\gamma-\varepsilon'))^{\frac{1}{\alpha}},$$

wo ε' eine bestimmte positive Zahl bedeutet. Hieraus würde aber nach dem ersten Satze von Nr. 1, wenn man für die dort mit ε bezeichnete Zahl $\frac{\varepsilon'}{2}$ setzt, folgen, daß:

$$\left|\sum_0^\infty {}^\nu c_\nu x^\nu\right| < e^{\left(\gamma-\frac{\varepsilon'}{2}\right)\cdot|x|^\alpha} \quad \textit{für alle } |x| > R_{\frac{\varepsilon'}{2}},$$

was der Voraussetzung (20) widerspricht.

Umgekehrt: Besteht die Voraussetzung (21) und es wäre die Beziehung (20) *nicht* erfüllt, so müßte ein bestimmtes $\varepsilon' > 0$ existieren, derart, daß:

$$\left|\sum_0^\infty {}^\nu c_\nu x^\nu\right| < e^{(\gamma-\varepsilon')\cdot|x|^\alpha} \quad \textit{für alle } |x| > R_{\varepsilon'}.$$

Daraus würde aber nach dem Hauptsatze I (p. 266) unmittelbar folgen, daß:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} \leqq (\alpha(\gamma-\varepsilon'))^{\frac{1}{\alpha}},$$

was wiederum der Voraussetzung widerspricht.

Zusatz. Aus dem eben bewiesenen Satze erschließt man ohne weiteres den folgenden:

Ist bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

(22) $$\left|\sum_0^\infty {}^\nu c_\nu x^\nu\right| > e^{\frac{1}{\varepsilon}\cdot|x|^\alpha} \quad \textit{für gewisse beliebig große } x,$$

so hat man:

(23) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} = \infty,$$

und umgekehrt.

Daraus folgt weiter:

Ist bei beliebig kleinem $\delta > 0$:

$$\left|\sum_0^\infty{}_\nu c_\nu x^\nu\right| > e^{|x|^{\alpha-\delta}} \quad \textit{für gewisse beliebig große } x, \tag{24}$$

so hat man auch:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \cdot |c_\nu|} = \infty, \tag{25}$$

und umgekehrt.

Durch Zusammenfassung der in Nr. 1—3 ausgesprochenen Sätze ergibt sich dann schließlich wiederum das in § 4, Nr. 4 (p. 276) formulierte Hauptresultat.

München, Januar 1904.