

IX. *Entwicklung und Berechnung des Datolithes, als erläuterndes Beispiel zu der in Bd. XXXIV gegebenen Projectionsmethode; von A. Quenstedt.*

Schon oftmals kam der Satz über die rationalen Theile, unter welchen die Axen von den Krystallflächen geschnitten werden sollen, zur Sprache, und man nennt solche Flächen krystallonomische; glaubt auch wohl, daß Haüy diesen Satz schon längst bewiesen habe, und trägt so kein Bedenken, ihn als Haupttheorem allen Lehrbüchern voranzusetzen. Haüy hat ihn aber im Grunde nicht bewiesen, da seine Theorie der integrierenden Körperchen das voraussetzt, was bewiesen werden soll. Es mußte also für die Richtigkeit der Theorie erst selbst wieder ein Beweis gesucht werden, und diesen fand er in näherungsweise Messungen, in deren Wesen es liegt, nicht eben zu strengen Beweisen geeignet zu seyn. Wenn jedoch je ein Beweis gegeben ist, so ist er durch die Zonenlehre gegeben, wie sich der Hr. Prof. Weiss selbst ausdrückt. Er legte nämlich zuerst in seiner bekannten Feldspathabhandlung den Fundamentalsatz aller krystallographischen Betrachtungen dar:

daß man aus wenigen zum Grunde gelegten Flächen die Ausdrücke sämtlicher übrigen finden könne, oder mit anderen Worten, daß die übrigen in solche Zonen fallen, welche durch jene zum Grunde gelegten schon eingesetzt sind.

Nehmen wir zur Erläuterung das Projectionsbild des Feldspathes zur Hand, wie ich es in meiner ersten Arbeit, diese Annalen, Bd. XXXIV Taf. III Fig. I, gegeben habe, so zeigt ein bloßer Blick auf die Figur, daß wir sämtliche Sectionslinien ziehen können, sofern nur der

erste Kantenzonenpunkt, der im Durchschnitte der Sectionslinie der Säule T mit der der Schiefendfläche P liegt, nebst den beiden Diagonalzonenpunkten der Schiefendfläche P und der hinteren Gegenfläche x gegeben sind. Diese Zonenpunkte setzen aber weiter nichts voraus, als die eben genannten Flächen P , T und x . Legen wir sofort durch die Zonenpunkte, welche durch die ihnen zugehörigen Sectionslinien gebildet werden, die Sectionslinie der übrigen Flächen, so werden nach und nach eine Reihe von neuen Zonenpunkten eingesetzt, mit deren Hülfe wir sämmtliche Sectionslinien construiren können. Man sieht ferner leicht ein, daß die Wahl nicht bloß auf diese besagten Punkte zu fallen braucht, sondern daß auch noch viele andere so beschaffen sind, durch sie die Sectionslinien der übrigen Flächen zu bestimmen.

Hierdurch ist der strenge Beweis gegeben, daß die dem Feldspathe untergelegten Axen rational geschnitten werden müssen. Denn die Kantenzonenpunkte erhalten den Ausdruck $\left(\frac{a}{1} + \frac{b}{1}\right)$, die der Diagonalzonen von P und x die Ausdrücke $\left(\frac{a}{1} + \frac{b}{\infty}\right)$ und $\left(\frac{a'}{1} + \frac{b}{\infty}\right)$. Jede Fläche, deren Sectionslinie durch diese Punkte geht, erhält aber einen aus den Factoren 1 und ∞ zusammengesetzten Ausdruck, eben so auch die neuen eingesetzten Zonenpunkte, wie wir dieses in diesen Annalen, Bd. XXXIV S. 511 und 509, bewiesen haben, so daß hieraus einfach die rationalen Schnitte der Axen folgen.

Die Zonenlehre behält ganz allgemein ihre Realität, unabhängig von allen Richtungen, die Zonen sind vielmehr selbst das Bedingende. Die Ausdrücke für die Zonenpunkte können daher auch eine größere Allgemeinheit erhalten. Wir hatten nämlich früher nur den besonderen Fall im Auge, daß die Zonenpunkte auf rechtwinklige Axen a und b in der Sectionsebene bezogen wurden. Allein da die Formeln ganz unabhängig vom

rechten Winkel blieben, so gelten sie auch für solche Axen a und b , die einen beliebigen Winkel φ unter sich machen, wenn anders wir unter den Abständen $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{n}$ nicht die senkrechten verstehen, sondern diejenigen, welche uns die durch den Zonenpunkt mit den Axen parallel gelegten Linien angeben. Es werden jetzt demnach die Axenabstände Seiten eines beliebigen Parallelogramms, während es oben die eines Rechtecks waren. Da nun auch die Axe c schief auf der Sectionsebene stehen kann, so ist die Länge der Zonaxe die Entfernung der gegenüberstehenden Ecken eines schiefwinkligen Parallelepipeds, während es früher die eines rechtwinkligen waren. Die Seiten des Parallelepipeds sind die Axenebenen nebst ihren durch den jedes Mal in Rede stehenden Zonenpunkt gelegten Parallelen. Die Zonenpunkte behalten also dieselbe rationale Beziehung auf die Axe bei, nur daß die Axeneinheiten mit dem veränderten φ immer andere und andere werden.

Man kann nun allgemein jeder beliebigen Combination von vier Krystallflächen (ihre Parallelen jedes Mal mit einverstanden, so daß es also vier parallele Paare von Flächen sind), drei, wenn nicht rechtwinklige, so doch schiefwinklige Axen unterlegen. Denn nehmen wir irgend vier solcher Zonenpunkte heraus, durch deren Lage uns vier Flächen bedingt sind, und ziehen wir mit diesen Flächen vier andere parallel, aber ebenfalls durch Einen, wenn auch beliebigen Punkt außerhalb dieser Flächen: so bekommen wir nothwendig ein 1- und 1-gliedriges Octaëder, dessen je zwei gegenüberliegende Kanten parallel gehen. Da jedes Octaëder zwölf Kanten hat, so haben wir sechs Paare von parallelen Kanten. Sprechen wir im Sinne der Krystallographie von jedem solchen Paare als von Einer Kante, so bleiben uns im Octaëder nur sechs zu unterscheiden. Durch je zwei

dieser in einer Ecke gegenüberliegenden legen wir ein Parallelogramm, mithin verbinden drei Parallelogramme die Octaëderecken, die mit einander nur Einen Punkt gemein haben. Da ferner je zwei Parallelogramme sich in einer Diagonale schneiden, so haben wir auch nur drei Diagonalen, die sich nothwendig halbiren müssen, weil wieder je zwei von ihnen einem Parallelogramme zukommen, und diese Halbiring kann nur in dem gemeinschaftlichen Punkte geschehen, da er allein je zweien Diagonalen gemein ist. Die drei Diagonalen sind also die Axen des Octaëders. Der Gang des Beweises kann sehr leicht an jedem beliebigen Octaëder verfolgt werden, so dafs wir es für überflüssig halten, ihn mit einer Figur zu unterstützen. Die zwei Kanten eines solchen Parallelograms bilden in der Sprache des Hrn. Professor Weifs ein Paar, wir haben demnach in jedem Octaëder drei Paare, und denken wir uns diese Kanten durch die Flächen eines Granatoides abgestumpft, so bekommen wir drei zugehörige Paare von Flächen. Es ist leicht ersichtlich, dafs man auch das Octaëder als aus zweien solcher Paare entstanden denken kann. Wir können das Octaëder nun auch so stellen, dafs wir nur eine jener drei Axen beibehalten, und zu den andern beiden das Paar Kanten desjenigen Parallelogramms wählen, welches von der beibehaltenen Axe durchbohrt wird. Denn legen wir diese Kanten durch den Mittelpunkt, so werden sie hier ebenfalls halbirt, können folglich als Axeneinheiten angesehen werden. Da nun die Projection stets auf einer Axenebene ausgeführt gedacht werden kann, wobei die dritte sich aus der Ebene erhebende Axe als absolute Einheit angenommen ist, so werden alle zu deducirenden Flächen die beiden Axen der Ebene rational schneiden, weil der schon oben citirte Satz, diese Annalen, Bd. XXXIV S. 511, ganz allgemein gültig ist.

So viel zur Einleitung.

Es sind nun zwei Wege, auf welchen wir uns das

Projectionsbild verschaffen können. Den einen schlugen wir in unserer ersten Abhandlung ein, wo gegebene Flächen, deren Axenausdrücke schon anderweitig gefunden waren, in einem Gesamtbilde dargestellt wurden; diesen möchte ich den *synthetischen* nennen. Der andere aber hat die schwierigere Aufgabe zu lösen: einzig und allein aus der Beobachtung des Krystalls, ohne irgend eine andere Voraussetzung, sämtliche Flächen abzuleiten, ein Verfahren, das man *analytisch* nennen kann. Auch ein Beispiel dieser zweiten Art vorzulegen, mag uns der Datolith Gelegenheit geben, dessen neueres Vorkommen im Wäschgrunde bei Andreasberg ganz besonders dazu geeignet ist. Wir legen zu dem Ende die in Taf. III Fig. 3 und 4 gezeichneten Horizontal-Projectionen zum Grunde, die eine Menge von Zonen nachweisen, und beziehen uns außerdem auf Mohs Grundriß.

Die erste Schwierigkeit ist nun, von welchen Flächen sollen wir ausgehen? Im Allgemeinen werden wir solche wählen, die in stark entwickelte Zonen fallen. Häufig erleichtert die Natur selbst die Wahl, und deutet durch Vorherrschendwerden einer Zone die passendste Stellung an. So bei unserem Individuum durch die Säule *M*, Taf. III Fig. 4. Nehmen wir sie zum ersten Paare, und außerdem die auf ihre stumpfe Kante aufgesetzte Zuschärfungsfläche ν zum zweiten, so bilden diese zwei Paare *M* und ν (wobei man ihre Parallelen natürlich immer im Sinne hat) ein Octaëder, sofern man sie nur durch einen Punkt legt. Wir nehmen nun die Kante der Säule $\frac{M}{M}$ zur Axe *c*, die Kante $\frac{\nu}{\nu}$ zur Axe *a*, die Axe *b* verbindet zwei gegenüberliegende Ecken des Octaëders, und durchbohrt zugleich die Ebene, welche durch *a* und *c* gelegt gedacht ist, ihre Lage ist hierdurch bestimmt. Jetzt projeciren wir die Flächen auf eine Ebene, welche durch die Axen *a b* geht, legen aber alle durch die Einheit der Axe *c*, die sich aus der Ebene *ab* er-

hebt. Zu dem Ende ziehen wir uns in der Ebene des Papieres, Taf. III Fig. 5, zwei Axen a und b unter einem beliebigen Winkel, da wir jetzt noch von keiner Winkelgröße etwas wissen. Die Fläche v bekommt den Ausdruck $[b:c:\infty a]$, ∞a darum, weil sie in der Axe a liegt, wenn wir dieselbe parallel mit sich verrücken, ihre Sectionslinie wird also $v\dots v$ parallel der Axe a . Die Fläche M hat den Ausdruck $[a:b:\infty c]$, ∞c wieder darum, weil sie in der Axe c liegt. Legen wir sie durch den Punkt c , so ist ihr Ausdruck $\left[\frac{1}{\infty}a:\frac{1}{\infty}b:c\right]$, ihre Sectionslinie muß also von der $v\dots v$ ein Stück $tm = or =$ der Axeneinheit a abschneiden, eben so auf der hintere Seite $uq = os$, und was dem M der einen Seite wiederfährt, wiederfährt auch dem der andern, die Linie pm muß also auch der tu parallel werden. Da demzufolge $mr = to =$ Axeneinheit b , und $mt = ro =$ Axeneinheit a ist, so sind die Punkte m, n, p und q Kantenzonenpunkte. Wir beobachten jetzt an unserem Octaëder, Taf. III Fig. 7, eine Fläche a , welche die stumpfe Kante der Säule M dergestalt abstumpft, daß ihre Kante $\frac{M}{a} \mp \frac{M}{M}$, und ihre Kante $\frac{v}{a} \mp \frac{v}{v}$ ist, folglich muß ihre Sectionslinie mit der Axe a zusammenfallen, und ihr Ausdruck wird $[b:\infty a:\infty c]$. Ferner beobachten wir an dem Krystalle, Fig. 7 Taf. III, eine Schiefendfläche x , welche in die Kantenzonen p und m fällt, weil auf beiden Seiten die Kante $\frac{x}{v} \mp \frac{x}{M}$ ist, folglich erhält sie den Ausdruck $[a:c:\infty b]$. Wir sehen außerdem an unserem Krystalle noch zwei Flächen P und b , die zunächst beide mit x parallele Kanten machen; P liegt aber überdiß noch in der Axe a , da es mit v und v parallele Kanten macht, folglich muß P mit der Projectionsebene des Papieres zusammenfallen, erhält also den Ausdruck $[c:\infty a:\infty b]$. Hieraus folgt weiter, daß

die Zone, welche von b über x nach P geht, eine Verticalzone ist, und da b noch in der Axe c liegt, denn sie macht mit M und M parallele Kanten, so muß ihre Sectionslinie mit der $b \dots b$ zusammenfallen, erhält somit den Ausdruck $[a : \infty b : \infty c]$. Ihr Durchschnitt mit der Sectionslinie $v \dots v$ bestimmt uns den Diagonalzonenpunkt der Fläche v , und somit sind uns alle erforderlichen Punkte gegeben, aus denen wir sämtliche folgende Flächen entwickeln können. Legen wir uns zu dem Ende die grössere Figur 1 Taf. III an, und ziehen in ihr die schon in Fig. 5 gezeichneten Linien, wobei es auf die Neigung der Linien unter sich durchaus nicht ankommt, wenn nur die relative Gleichheit ihrer Dimensionen festgehalten wird: so beobachten wir ferner eine Fläche, welche in die Diagonalzone von v und in eine Verticalzone der Säule nach der Endfläche fällt, wie die parallelen Kanten zeigen, welche die neue Fläche ρ mit P und M macht. Ihre Sectionslinie geht also durch den Diagonalzonenpunkt $\left(\frac{b}{1} + \frac{a}{\infty}\right)$ mit der Sectionslinie der Säulenfläche M parallel, weil sie in eine Verticalzone von der Säule nach der Endfläche fällt, also erhält sie den Ausdruck $\rho = [a : b : c]$. Jetzt beobachten wir weiter, daß eine obere Octaëderfläche mit der Säule und Schiefendfläche in eine Zone, d. h. in die erste Kantenzone $(a + b)$ falle; wir dürfen also nur durch diesen Punkt eine Parallele mit der Sectionslinie der unteren Octaëderfläche ziehen, und ihr Zeichen ist scharf bestimmt als zweifach stumpfere in der Verticalzone, mithin $r = [a : b : \frac{1}{2}c]$. Da nun diese Octaëderfläche abermals in die Diagonalzone eines zugehörigen Paares fällt, welches auf die stumpfe Säulenkante aufgesetzt ist, so erweist sich auch dieses als zweifach stumpferes, und erhält somit den Ausdruck $n = [b : \frac{1}{2}c : \infty a]$. Außerdem ist an demselben Krystalle eine Fläche sehr schön ausgeprägt, welche in die Diagonalzone des unteren Paares fällt, also in $(b + \infty a)$,

und zu gleicher Zeit die stumpfe Kante abstumpft, welche das obere Paar mit der Säule macht. Diese Kante durchbohrt die Sectionsebene im Punkte $(2a' + 2b)$, wir dürfen also nur beide Zonenpunkte verbinden, um den Ausdruck der Fläche $\pi = [2a : b : c]$ zu erhalten. Alle diese Flächen waren auf der Vorderseite eines prächtigen Krystalles beobachtbar, dessen hintere außerdem nicht weniger schön ein Augitpaar zeigte, das in die Diagonalzone der Flächen n fiel, und außerdem eine Kante abstumpfte, welche die Endfläche mit einem Zuschärfungspaare der Säule machte, das sich als zweifach schärferes ergab, d. h. wenn die Säulenfläche $M = [a : b : \infty c]$ ist, so erhält sie den Ausdruck $g = [a : 2b : \infty c]$, weil sie mit ξ und ν in eine Zone fiel. Tragen wir diese Säulenfläche g in das Bild ein, so geht ihre Sectionslinie durch den Mittelpunkt und durch den Zonenpunkt $(a + 2b)$. Sodann ist auch die obige Fläche bestimmt, denn sie geht durch den Zonenpunkt $(2b + oa)$, und ihre Sectionslinie läuft mit der eben gezogenen g parallel, da sie mit ihr in eine Verticalzone fällt. Ihr Ausdruck wird also $s = [a' : 2b : c]$. Ein anderer Krystall zeigte noch recht schön ein unteres Augitpaar, welches ebenfalls in dieselbe Verticalzone fiel, außerdem aber in die Diagonalzone des unteren zugehörigen Paares ν ; wir dürfen also nur durch diesen Punkt eine dritte Parallele ziehen, um die Sectionslinie der Fläche $\sigma = [a' : 2b : 2c]$ zu erhalten. Oefter beobachtete ich auch recht schön die Abstumpfung der Kante des oberen Augitpaares, ihr Ausdruck ist damit gegeben, es ist die hintere Gegenfläche $x = [a' : c : \infty b]$. Eine untere Schiefendfläche ist fast bei allen Krystallen beobachtbar, und da sie häufig mit der Säule und der unteren Octaëderfläche in eine Kantenzone fällt, also in die Kantenzone $\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)$, so erweist sie sich als $\xi = [c : \frac{1}{2}a : \infty b]$. Häufig als feine Abstumpfung, mehrere Mal aber schön durch Zonen be-

stimmbar, zeigt sich eine Fläche, die in die Diagonalzone des unteren zugehörigen Paares ν fiel, und überdies noch die stumpfe Kante abstumpfte, welche die Zuschärfungsfläche der Säule g mit der oberen Octaëderfläche q ihrer Seite bildet. Diese Kante schneidet die Sectionsebene im Punkte $[2a' + 4b]$; also dürfen wir diesen Zonenpunkt nur mit dem von $(b + 0a)$ verbinden, und erhalten so die Fläche $\mu = [\frac{2}{3}a : b : c]$. Sie ist neu, läßt sich aber oft scharf beobachten. Ihr Gegenstück auf der hinteren Seite des Krystalls, welches zu beobachten ich ebenfalls öfters Gelegenheit hatte, ist entschieden physikalisch different, ganz drusiger Oberfläche, aber aus einer Krystalldruse, welche ebenfalls neuerlich bei Andreasberg vorkam, deutlich zu bestimmen. Hr. Prof. Mohs, dem wir die erste ausführliche Abhandlung über das Datolithsystem verdanken, führt sie auch schon an. Sie fällt in die Diagonalzone des unteren zugehörigen Paares ν , und in eine Zone, welche durch die Säule ihrer Seite mit den s ihrer Seite bestimmt wird; der Zonenpunkt dieser Zonenaxe liegt in $(2a' + 2b)$, folglich erhält die Fläche den Ausdruck $\mu' = [\frac{2}{3}a' : b : c]$. Flächen dieser Art geben dem Datolithsystem ein auffallendes 2- und 2-gliedriges Ansehen. Eben so sehen wir auf der hinteren Seite $r' = [a' : b : \frac{1}{2}c]$ häufig auftreten. Sie entspricht auf der vorderen Seite der oberen Octaëderfläche, fällt ebenfalls in die Diagonalzone des oberen zugehörigen Paares, und ist auf die Säule gerade aufgesetzt, d. h. sie fällt in eine Verticalzone von der Säulenfläche M nach der Gradendfläche P . Eine andere schön zu beobachtende Fläche fällt in die Diagonalzone des oberen zugehörigen Paares n , und in eine Zone, welche die Säulenfläche ihrer Seite mit der Octaëderfläche r' der anderen Seite macht; dieser Zonenpunkt schreibt sich $(a' + b)$, folglich bekommen wir die Fläche $l = [\frac{1}{3}a' : b : \frac{1}{2}c]$. Die eben genannte Druse zeigte uns noch eine sehr schön beobachtbare Fläche aus der Diagonalzone des oberen

zugehörigen Paares n , und aus einer Zone von der Grad-
endfläche nach der drusigen Fläche μ' ; hieraus ergab sich
ihr Ausdruck $m' = [\frac{1}{3}a' : \frac{1}{2}b : \frac{1}{4}c]$. Stellen wir nun alle
diese entwickelten Flächen nochmals übersichtlich zusam-
men, so erhalten wir folgende Reihe:

$$\begin{array}{ll}
 M = [a : b : \infty c] & r = [a : b : \frac{1}{2}c] \\
 P = [c : \infty a : \infty b] & r' = [\frac{1}{2}a' : b : \frac{1}{2}c] \\
 a = [b : \infty a : \infty c] & \sigma = [\frac{1}{2}a' : b : c] \\
 b = [a : \infty b : \infty c] & s = [a' : 2b : c] \\
 g = [a : 2b : \infty c] & \pi = [2a : b : c] \\
 v = [b : c : \infty a] & !p = [2a : b : \frac{1}{2}c] \\
 n = [b : \frac{1}{2}c : \infty a] & !\mu = [\frac{2}{3}a : b : c] \\
 !\xi = [c : \frac{1}{2}a : \infty b] & \mu' = [\frac{2}{3}a' : b : c] \\
 x = [a : c : \infty b] & !m' = [\frac{2}{3}a' : b : \frac{1}{2}c] \\
 !x' = [a' : c : \infty b] & l = [\frac{1}{3}a' : b : \frac{1}{2}c] \\
 !\rho = [a : b : c] &
 \end{array}$$

Die Abstumpfungsfäche der stumpfen Kante a ist sel-
tener zu beobachten. Die Fläche p ist durch ihre Zo-
nenverhältnisse allem Zweifel überhoben.

Vergleichen wir unsere beobachteten Flächen mit
den schon bekannten, so hat das Datolithsystem den nicht
unbedeutenden Zuwachs von sechs neuen Flächen erhal-
ten, als da sind: ρ , ξ , x' , μ , p und m' , die oben zur
Auszeichnung mit „!“ versehen sind, zum neuen Beweise,
wie reich die Ausbildung unseres Systemes ist. Die Ent-
wicklung seiner 2- und 1-gliedrigen Verhältnisse ist eben-
falls eigenthümlich genug, um alle Aufmerksamkeit auf
sich zu ziehen. Sie findet nur im Haytorit eine Analo-
gie. Auffallend ist zunächst das Vorherrschendwerden
der Endfläche P , nebst den Zuschärfungsflächen v und
 n , deren Diagonalzonen so stark entwickelt sind, daß
sie das ganze System beherrschen, und dem 2- und 2-glie-
drigen sehr nahe bringen, wie wir es etwa beim Topas
gewohnt sind. Wäre das System 2- und 2-gliedrig, so
müßten die Zonenpunkte diesseits der Axe b in Rück-

sicht auf Lage denen jenseits derselben identisch seyn. Ein Blick auf die Figur zeigt aber, daß dieses durchaus nicht der Fall ist, wenn hingegen die beiden Seiten der Axe a identisch sind. Zwar sehen wir auf der hinteren Seite Flächen auftreten, welche sie mit der vorderen Seite gemein hat, und wir haben auch dieses in der Wahl der Buchstaben geflissentlich hervorgehoben. Flächen dieser Beschaffenheit sind x und x' , r und r' , μ und μ' ; allein sie zeigen, so oft sie auch auftreten mögen, jedesmal physikalische Differenz, d. h. wenn x vorn glatt und glänzend ist, so ist x' hinten stets matt, μ' drusig, wenn μ vorn schön spiegelt. Wir sehen in dem Auftreten solcher Flächen nichts anderes als ein Bestreben, die im Innern des Krystalls eingesetzte Differenz der vorderen und hinteren Seite wieder aufzuheben, um so seine 2- und 1-gliedrige Bildung der 2- und 2-gliedrigen zu nähern. Die Entwicklung der Kantenzonen, die bei Systemen, wie Feldspath, Hornblende, Epidot etc., eine so wichtige Rolle spielt, tritt bei diesem durchaus zurück, und wir sehen die Sectionslinie der Säule in dieser Beziehung vor anderen durchaus nicht ausgezeichnet. Die Axe b scheint deren Rolle übernommen zu haben, die außer den beiden Diagonalzonenpunkten auffallend genug keinen anderen Durchschnitt zeigen. Das einfache Verhältniß, in welchem beide Zuschärfungsflächen n und r zu einander stehen, daß die eine die zweifach schärfere der anderen ist, giebt den Dimensionsverhältnissen eine erfreuliche Einfachheit, und macht, daß die Zahl 2 im ganzen System ziemlich durchgreifend auftritt. Geflissentlich habe ich für beider Diagonalzonenpunkte verschiedene Systeme von Buchstaben gewählt (so ungern ich auch von der einmal gegebenen Mohs'schen abwich), um ein Verhältniß deutlicher an's Licht zu ziehen, welches mir tief im Innern des Systemes begründet zu seyn scheint. Wie sich nämlich die beiden Zuschärfungsflächen n und r verhalten, daß n von $b: \frac{1}{2}c$, wenn

ν von $b:c$ geht, gerade so verhalten sich eine ganze Reihe von Flächen, welche in ihrer Diagonalzone liegen. Die mit griechischen Buchstaben gehören der ν , die mit lateinischen der n an. Wir dürfen in diesem Sinne nur folgende Flächen vergleichen: x und ξ , r und ρ , s und σ , p und π , m' und μ' , um das Gesetz auffallend bestätigt zu sehen. Wenn zu x' das Gegenstück ξ' fehlt, und ebenfalls von r' das ρ' , so nimmt uns dieses um so weniger Wunder, weil die Flächen x' und r' an sich schon so selten auftreten. Vielleicht finden sie sich später, so wie auch die Gegenstücke λ und m zu den vorhandenen l und μ , um das Bild des Datoliths ganz vollständig zu machen. Es werden alsdann von den Endigungsflächen die mit lateinischen Buchstaben bezeichnet einen oberen Kranz, die mit griechischen einen unteren bilden, so daß der untere von dem oberen der zweifach schärfere ist. Es würden auf diese Weise die vereinzelt einfachen Verhältnisse, wie sie in den Ausdrücken ausgesprochen sind, in Gruppen zusammengestellt, die uns leichter als jene den Weg zum Bildungsgesetze zeigen, welchen die Natur einschlug. So reich also auch die Entwicklung des Datolithsystemes seyn mag, so fehlen uns doch immer noch Glieder, die um so erfreulicher wären, wenn sie unser angedeutetes Gesetz bestätigten. Bemerkenswerth ist es immer, daß unsere Axe b nur in den Punkten b und $2b$ geschnitten ist. Wiewohl damit nicht anders schneidende Flächen ausgeschlossen bleiben, so sind sie doch selten. Herr Prof. Mohs giebt auch wirklich eine Fläche $\frac{3}{4}\bar{p}r+1$ an, welche die Kante zwischen n und ν abstumpfen würde, und nach unserer Bezeichnung den Ausdruck $[b:\frac{3}{4}c:\infty a]$ bekäme. Ich habe sie nie anders als in problematischen Abstumpfungen gesehen, kann daher ihren Ausdruck nicht bestätigen. Eine andere Fläche, die ich ebenfalls nicht beobachten konnte, hat den Ausdruck

$$-\frac{(\bar{P}r-1)^5}{2} = [\frac{1}{2}a' : \frac{1}{3}b : \frac{1}{4}c], \text{ sie liegt in der Diagonalzone der vorigen. Beide Flächen passen nicht in unsere Reihe, sie bilden nur Zwischenglieder, welche das ausgesprochene Gesetz weiter nicht aufheben können. Besser paßt eine andere von mir ebenfalls nicht beobachtete Mohsische Fläche } -\frac{(\bar{P}+1)^3}{2}; \text{ sie würde mit einer Fläche } [\frac{1}{3}a' : b : c] \text{ identisch seyn, folglich den Buchstaben } \lambda \text{ erhalten, also ein gesuchtes Glied, z. B. der schon vorhandenen } l \text{ bilden. Allein Hr. Prof. Mohs scheint, der Figur nach zu urtheilen, wirklich unsere Fläche } l \text{ gemeint zu haben. Sie ist nur fehlerhaft bezeichnet, wie dieses nicht selten bei den complicirten Ausdrücken der Fall seyn muß, die immer einer Rechnung bedürfen, um controllirt zu werden. Wenn Hr. Dr. Kaiser im Kataloge der Bergemann'schen Sammlung eine Schiefendfläche } [a : 5c : \infty b] \text{ oder nach unseren Axen } [a : \frac{5}{2}c : \infty] \text{ anführt, so ist dieses nur ein Rechnungsfehler, der sich gar zu oft einschleichen muß wenn man die Flächen nicht durch eine übersichtliche Projection, die uns sogleich die wesentlichsten Verhältnisse zeigt, sondern durch Rechnung zu ermitteln sucht. Uebrigens ist 5 eine Zahl, die ich, so gern sie auch bei anderen Systemen auftreten mag, beim Datolith wenigstens ausschließen möchte. Daher scheint mir die Mohsische Fläche } -\frac{(\bar{P})^5}{2} = [\frac{1}{3}a' : b : \frac{1}{2}c], \text{ die ich nirgends beobachten konnte, noch einer genaueren Kritik unterworfen werden zu müssen. Ich bin sehr geneigt, an ihrer Stelle die Fläche } [\frac{1}{4}a' : b : \frac{1}{4}c] \text{ zu supponiren. Eine seltene Fläche, die ich nur an einem einzigen Krystall zu beobachten Gelegenheit hatte, erhält den Ausdruck } [c : 2b : \frac{3}{4}a']; \text{ sie fiel sehr deutlich in eine Diagonalzone des oberen Paares } n, \text{ und in eine Zone, welche das dru-}$$

sige μ ihrer Seite mit dem s der andern Seite macht. Bei der drusigen Beschaffenheit der Fläche μ' könnte sie wohl leicht mit $[c : 2b : \frac{1}{2}a']$ identisch seyn, und dann wäre es die für die Mohsische $-\frac{(\check{P})^5}{2}$ supponirte Fläche. Es liegt in der Natur der Sache, daß solche Flächen nur mit einer gewissen Unbestimmtheit ausgesprochen werden können, bis erst bestimmtere Beobachtungen die Wahrheit bestätigen.

Diefs wäre die vollständigste Darstellung des Datoliths, wie man sie bis jetzt kennt. Wir haben sämtliche Flächen aus ihren Zonalverhältnissen entwickelt, ihre symmetrischen Verhältnisse unter einander begriffen, und in der Projection dargelegt. Die Axenschnitte, welche uns durch den Zonenconnexus gegeben sind, sind einfach unter sich. Wir faßten aus diesen Schnittverhältnissen eine beliebige Einheit heraus, und legten sie den Ausdrücken für die Flächen zum Grunde. Dieses thaten wir aber nicht in dem Sinne, als wenn wir der Meinung wären, gerade diese Einheit habe vor den übrigen etwas voraus, und die sie begränzenden Flächen bildeten eine sogenannte Grundform, in der alle basiren, sondern um irgend Bestimmtheit in unsere Ausdrücke zu bringen, mußten wir von einer bestimmten Form ausgehen, und willkürlich wählten wir gerade diese. Denn daß es gleichgültig war, wenn wir vielleicht Flächen aus der Diagonalzone des oberen Paares n genommen hätten, springt beim bloßen Anblick der Figur sogleich in die Augen. *Das Allgemeine und das Wesen der Sache ist vielmehr das Verhältniß der Flächen unter sich, welches stets dasselbe bleibt, unabhängig von allen andern Erscheinungen.* Und gerade dieses leuchtet aus unserer Figur auf's Deutlichste hervor, und wird durch die Zonenverhältnisse aufgedeckt. Deshalb ist dann auch nur der Weg der einzig richtige, der uns zur Erkennung die-

ses wesentlichen Verhältnisses im übersichtlichen Zusammenhange die besten Mittel bietet.

So hätte ich denn der oben gestellten Aufgabe, aus der Beobachtung der Zonalverhältnisse sämtliche Glieder zu bestimmen, nach Kräften genügt. Freilich zeigen nicht alle Systeme eine so günstige Entwicklung der Flächen, wie gerade der Datolith, und es möchte wohl schwer halten, ja unmöglich werden, Systeme, wie Quarz, Titanit etc., auf diese Weise darzustellen und zu entwickeln; dennoch betritt man, selbst in den ungünstigsten Fällen, diesen Weg nur mit Vortheil. Denn gewöhnlich kann man aus der größeren oder geringeren Neigung der Kanten, die eben so gut in der Figur, wie die Zonen, geschrieben steht, den ungefähren Ausdruck schon erschließen, und sind uns die Flächen im Voraus schon bekannt, so wird man kaum einen Fehlgriff begehen können. Will man jedoch zur zuverlässigen Gewissheit kommen, so ist eine strenge Messung die letzte Zuflucht.

Mit Fleiß habe ich bis jetzt nichts von Winkelgrößen erwähnt, um die Allgemeinheit der Zonenlehre in's klarste Licht zu setzen. Wir können uns jetzt noch in unsere Figur alle beliebigen Winkel hineindenken, und diese verschiedenen gedachten Winkel können zwar andere Neigungen der Axen unter sich und andere absolute Längen herbeiführen, aber die relativen Verhältnisse nicht im Geringsten ändern. In dieser Hinsicht sind also Winkel bedeutungslos, und man kann kleine Differenzen vernachlässigen, ohne dem Totalverständniß Eintracht zu thun. Wohl aber werden selbst kleine Winkeldifferenzen ihr volles Gewicht erhalten, wenn uns das Band erst mehr aufgeklärt ist, welches den Stoff mit der Form verbindet. Optik, Chemie und überhaupt mechanische Naturlehre werden uns hier hülffreiche Hand bieten. Der Krystallograph muß alsdann auch seinerseits die strengsten Messungen seinen Systemen unterlegen. Da der

Datolith nach den schärfsten jetzt bekannten einen Säulenwinkel von $77^{\circ} 30'$ zeigt, auf dessen Kante die Endfläche P unter einem wenig schiefen Winkel von $91^{\circ} 41'$ gerade aufgesetzt ist, so daß sie sich auf beiden Seiten zur Säule unter einem Winkel von $90^{\circ} 50'$ neigt, so kann man hieraus sich die Axenlängen berechnen. Um nun die Berechnung der Winkel weiter auszuführen, ist es bequem, sich die Elemente ein für alle Mal folgendermaßen zusammenzustellen:

$$\begin{aligned} \lg a &= 9,9963519 & \lg a^2 &= 9,9927037 & a &= 0,99164 & a^2 &= 0,98334 \\ \lg b &= 9,9008222 & \lg b^2 &= 9,8016444 & b &= 0,79583 & b^2 &= 0,63335 \\ \lg k &= 8,4645245 & \lg k^2 &= 6,9290490 & k &= 0,02914 & k^2 &= 0,0008492 \end{aligned}$$

Es ist hierbei die Axe $c=1$ gesetzt. Es war nun die allgemeine Formel für die Neigungswinkel der Kanten:

$$\sin : \cos = ab \sqrt{n^2(m \pm k)^2 + m^2 b^2 + n^2 a^2 : b^2(\mu \pm k)m - a^2 \nu}.$$

In Rücksicht auf die Wahl des positiven und negativen Zeichens bedarf es einiger Vorsicht. Wie wir aus dem Beweise der Formel ersehen, gilt stets auf derjenigen Seite das Zeichen $m+k$, wo die gegen c rechtwinklig substituirte Sectionsebene *über* der gegen c schiefwinklig liegt. Diefß ist bei unserem Datolith auf der Vorderseite der Fall. Es gilt demnach das Zeichen $m+k$ für die beiden vorderen Quadranten, und das Zeichen $m-k$ für die beiden hinteren. Das Zeichen $\mu \pm k$ bezieht sich auf die Sectionslinie, welche $\mu+k$ bekommt, wenn sie die a , und $\mu-k$, wenn sie die a' schneidet. Nehmen wir nun z. B. einen der hinteren Quadranten, so gilt hier das Zeichen $m-k$. Die den Quadranten einschließenden Axen a' und b sind als absolute Größen zu betrachten. Schneidet also die Sectionslinie diese, so sind die Factoren μ und ν in dem allgemeinen Ausdrucke $\left[\frac{a'}{\mu} : \frac{b}{\nu} \right]$ positiv. Schneidet die Linie

die Theile der Axen, welche jenseits des Centrums liegen und den Quadranten nicht einschließen, so werden

hier die Factoren negativ. Beide können jedoch nie zugleich negativ werden, weil sonst die Linie keinen Zonenpunkt aus dem Quadranten gemein haben kann. Das Zeichen $\mu \pm k$, welches für die Sectionslinie gilt, wird $\mu - k$, wenn die Linie a' schneidet, und zwar in unserem angenommenen Quadranten positiv, also $+(\mu - k)$; hingegen $\mu + k$, wenn sie die Axe a schneidet, und zwar negativ, also $-(\mu + k)$, weil dieser Theil der Axe den Quadranten nicht einschließt. Es bleibt jedoch dasselbe, wenn man sich zur Regel macht, vorn gleichmäfsig mit $m + k$ auch $\mu + k$, so wie hinten mit $m - k$ auch $\mu - k$ zu setzen. Man hat dann weiter nichts zu berücksichtigen, als die Vorzeichen von μ und ν . Im Verlaufe der Rechnung wollen wir auf ein Beispiel aufmerksam machen.

Wollen wir jetzt die Neigungen der Flächen aus dem ersten Kantenzonenpunkte $\left(\frac{a}{1} + \frac{b}{1}\right)$ berechnen, so dürfen wir in der allgemeinen Formel nur $m = n = 1$ setzen, um für diesen Punkt folgende specielle Formel zu bekommen:

$$\sin : \cos = ab\sqrt{(1+k)^2 + a^2 + b^2} : (\mu + k)b^2 - \nu a^2.$$

Da der \sin von den Veränderlichen μ und ν unabhängig ist, so ist er constant und allen Neigungen dieser Zone gemein. Es ist aber:

$$\begin{array}{rcl} a^2 + b^2 & = & 1,61669 \\ (1+k)^2 = 1 + k^2 + 2k & = & 2,05905 \\ \hline . . . & = & 2,67574 \\ \lg \sqrt{. . .} & = & 0,2137187 \\ \lg ab & = & 9,8971741 \\ \hline * \lg \sin & = & 10,1108928. \end{array}$$

Für die Neigung der Säulenfläche $x = [a : \infty b]$ ist $\mu = 1$, $\nu = 0$, folglich der $\cos = (1+k)b^2$, oder:

$$\begin{array}{r}
 \lg(1+k) = 0,0124576 \\
 \lg b^2 = 9,8016444 \\
 \hline
 \lg \cos = 9,8141020, \text{ also:} \\
 \lg \tg = 10,2967908
 \end{array}$$

dies gibt einen Winkel von $63^\circ 12'$ als Neigungswinkel der Fläche x gegen die Säule M . Für die Fläche $v = [b : \infty a]$ ist $\mu = 0$, $\nu = 1$, folglich $\cos = b^2 k - a^2$

$$\begin{array}{r}
 \lg b^2 k = 8,2661689 \text{ gibt die Zahl} \\
 \quad \quad \quad 0,018457 \\
 a^2 = 0,98334 \\
 \hline
 \cos = 0,964883
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \lg \cos = 9,9844733 \\
 \hline
 \lg \tg = 10,1264195
 \end{array}$$

gibt als Neigung von v zu M den Winkel $55^\circ 13'$. Für die Fläche $r = [2a : 2b]$ erhalten wir $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu = \frac{1}{2}$, folglich:

$$\begin{array}{r}
 \lg(\frac{1}{2} + k) = 9,7235706 \\
 \lg b^2 = 9,8016444 \\
 \hline
 \dots = 9,5252150 \\
 \quad \quad \quad \text{num} = 0,33513 \\
 \quad \quad \quad \frac{a^2}{2} = 0,49167 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \cos = 0,15654 \\
 \hline
 \lg \cos = 9,1946253 \\
 \hline
 \lg \tg = 10,9162675
 \end{array}$$

gibt als Neigungswinkel der Fläche r gegen M $85^\circ 5'$.

Für den Zonenpunkt $(2a' + 2b)$ aus dem hinteren Quadranten ist in der allgemeinen Formel $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$, und da hier das negative Zeichen der Formel, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \sin : \cos &= ab \sqrt{\frac{1}{4}(\frac{1}{2} - k)^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2} : b^2(\mu - k)\frac{1}{2} - a^2 \cdot \nu \cdot \frac{1}{2} \\
 &= ab \sqrt{(\frac{1}{2} - k)^2 + a^2 + b^2} : b^2(\mu - k) - a^2 \nu
 \end{aligned}$$

| | |
|---|--------------------------------|
| $(\frac{1}{2}-k)^2 = 0,22171$ | |
| $a^2 + b^2 = 1,61669$ | |
| $\dots = 1,83840$ | |
| $lg \sqrt{\dots} = 10,1322200$ | |
| $lg ab = 9,8971741$ | |
| $* lg sin = 10,0293941$ | |
| | $(1-k)b^2 = 0,61490$ |
| $fl.s \dots \mu = 1, \nu = -\frac{1}{2}$ | $\frac{a^2}{2} = 0,49667$ |
| $lg cos = 10,0459485$ | $cos = 1,11157$ |
| $lg tg = 9,9834456 \dots 43.54$ | |
| | $(\frac{3}{2}-k)b^2 = 0,93153$ |
| $fl.\mu' \dots \mu = \frac{3}{2}, \nu = -1$ | $a^2 = 0,98334$ |
| $lg cos = 10,2821461$ | $cos = 1,91487$ |
| $lg tg = 9,7472480 \dots 29.12,$ | |
| | $(\frac{1}{2}+k)b^2 = 0,33513$ |
| $fl.\pi \dots \mu = -\frac{1}{2}, \nu = 1$ | $a^2 = 0,98334$ |
| $lg cos = 10,1200801$ | $cos = 1,31847$ |
| $lg tg = 9,9093140 \dots 39.4$ | |
| | $kb^2 = 0,018457$ |
| $fl.n \dots \mu = 0, \nu = \frac{1}{2}$ | $\frac{a^2}{2} = 0,491667$ |
| $lg cos = 9,7076724$ | $cos = 0,510124$ |
| $lg tg = 10,3217217 \dots 64.31.$ | |

Wir können hier an einem Beispiel das über $\mu \pm k$ Gesagte erläutern. Für die Fläche π , welche die Axe vorn schneidet in 2 und die Axe b in 1, erhalten wir eigentlich den $cos = b^2 \cdot -(\frac{1}{2}+k) - a^2 = -(b^2(\frac{1}{2}+k) + a^2)$. Wir haben aber bei unserer Rechnung das Zeichen $\mu - k$ beibehalten, und bloß $\mu = -\frac{1}{2}$ gesetzt, wir bekommen alsdann $cos = b^2(-\frac{1}{2}-k) - a^2 = -(b^2(\frac{1}{2}+k) + a^2)$, was dasselbe ist.

Hat der Zonenpunkt das allgemeine Zeichen

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{\infty}\right),$$

d. h. liegt er in der Axe a , so wird die speciellere Formel folgende:

$$\sin : \cos = \frac{b}{a} \sqrt{(m+k)^2 + a^2} : -v.$$

Das negative Vorzeichen des \cos läßt man unberücksichtigt. Wir überheben uns hier der weiteren Rechnung, und verlegen den Zonenpunkt in die Axe b . Da hier das allgemeine Zeichen $\left(\frac{a}{\infty} + \frac{b}{n}\right)$ lautet, so bekommt die specielle Formel die Form:

$$\sin : \cos = \frac{a}{b} \sqrt{n^2 + b^2} : \mu \pm k.$$

Setzen wir in dieser $n=1$, d. h. haben wir den Zonenpunkt $(b+0a)$ im Auge, so ist $\sin = \frac{b}{a} \sqrt{1+b^2}$, und $\cos = \mu \pm k$, wo das positive Zeichen für die Schnitte der Axe a , das negative für die der Axe a' gilt.

$$\lg \sqrt{1+b^2} = 0,1065330$$

$$\lg \frac{a}{b} = 0,0955297$$

$$* \lg \sin = 10,2026627$$

$$fl v \dots \mu = 0 \dots \lg k = 8,4645245$$

$$\lg tg = 11,7375382 \dots 88.57$$

$$fl \pi \dots \mu = \frac{1}{2} \dots \lg \left(\frac{1}{2} + k\right) = 9,7235706$$

$$\lg tg = 10,4784921 \dots 71.34$$

$$fl \rho \dots \mu = 1 \dots \lg (1+k) = 0,0124576$$

$$\lg tg = 10,1896051 \dots 57.8$$

$$fl \mu \dots \mu = \frac{3}{2} \dots \lg \left(\frac{3}{2} + k\right) = 0,1844200$$

$$\lg tg = 10,0051851 \dots 45.20$$

$$fl \mu' \dots \mu = -\frac{3}{2} \dots \lg \left(\frac{3}{2} - k\right) = 0,1675536$$

$$\lg tg = 10,0345091 \dots 47.17$$

$$fl \sigma \dots \mu = 2 \dots \lg (2-k) = 0,2946646$$

$$\lg tg = 9,9073981 \dots 38.56$$

Für die Flächen der Verticalzone liegt der Zonenpunkt im Unendlichen, denn ihre Sectionslinien geben parallel. Es fallen aber bekanntlich solche Flächen in eine Verticalzone, deren Zeichen $\left[\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}\right]$ die Form $\left[\frac{a}{p \cdot m} : \frac{b}{p \cdot n}\right]$ annimmt. Alle diese Sectionslinien gehen derjenigen der Säulenfläche $\left[\frac{a}{m} : \frac{b}{n} : \infty c\right]$ parallel, mithin hat ihr Zonenpunkt, der im Unendlichen liegt, das Zeichen $\left(\frac{a \cdot \infty}{m} + \frac{b \cdot \infty}{n}\right)$. Wir setzen demnach in der allgemeinen Formel $m = \frac{m}{\infty}$ und $n = \frac{n}{\infty}$, und erhalten so die specielleren:

$$\sin : \cos = ab \sqrt{\frac{n^2 \left(\frac{m}{\infty} \pm k\right)^2 + \frac{m^2}{\infty^2} b^2 + \frac{n^2}{\infty^2} a^2}{b^2 (\mu \pm k) \frac{m}{\infty} - a^2 \nu \frac{n}{\infty}}}$$

$$= ab \sqrt{n^2 (a^2 + k^2) + m^2 b^2} : b^2 (\mu + k) m - a^2 \nu n.$$

Die Flächen P, ρ, r, r' fallen in eine Verticalzone, suchen wir ihre Neigung gegen die Säule M , so müssen wir $m = n = 1$ setzen, und erhalten dann:

$$\begin{array}{l} \sin : \cos = ab \sqrt{k^2 + a^2 + b^2} : b^2 (\mu + k) - a^2 \nu \\ k^2 + a^2 + b^2 = 1,61754 \\ \lg \sqrt{\quad} = 10,1044221 \\ \lg ab = 9,8971741 \\ \hline * \lg \sin = 10,0015962 \\ fl P \dots \mu = 0, \nu = 0 \\ \lg kb^2 = 8,2661689 \\ \hline \lg tg = 11,7354273 \dots 88.57 \\ (1+k)b^2 = 0,65180 \\ fl \rho \dots \mu = 1, \nu = -1 \\ a^2 = 0,98334 \\ \lg \cos = 10,2135443 \\ \hline \cos = 1,63514 \\ \hline \lg tg = 9,7880519 \dots 31.33 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{fir} \dots \mu = \frac{1}{2}, \nu = -\frac{1}{2} & (\frac{1}{2} + k)b^2 = 0,33513 & \\
 \lg \cos = 9,9174005 & \frac{1}{2}a^2 = 0,49167 & \\
 \hline & \cos = 0,82680 & \\
 \lg tg = 10,0841957 \dots 50.31 & & \\
 \text{fir}' \dots \mu = -\frac{1}{2}, \nu = \frac{1}{2} & (\frac{1}{2} - k)b^2 = 0,29822 & \\
 \lg \cos = 9,8975666 & \frac{1}{2}a^2 = 0,49167 & \\
 \hline & \cos = 0,78989 & \\
 \lg tg = 10,1040296 \dots 51.48 & &
 \end{array}$$

Da wir die Neigung der fünf Flächen unter sich kennen, so kann man durch einfache Addition und Subtraction die Neigungen der Flächen gegen P finden.

Was endlich die Neigung der Flächen gegen die Axe c betrifft, so kann man die Formel leicht finden, indem man vom Mittelpunkte auf die Sectionslinie in der gegen c rechtwinkligen Sectionsebene ein Perpendikel fällt, dieses ist dann der \sin , wenn die Axe c selbst der \cos ist. Jedoch wir können es ebenfalls aus unseren Formeln

entwickeln, denn die Neigung einer Fläche $\left[\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} \right]$ gegen c kommt mit der überein, welche sie gegen eine solche Säulenfläche hat, die mit ihr in der gegen c rechtwinkligen Sectionsebene parallele Sectionslinien macht. Da

besagte Fläche $\left[\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} \right]$ hier aber den Ausdruck

$$\left[\frac{a}{\mu \pm k} : \frac{b}{\nu} \right]$$

bekommt, so muß die Säulenfläche so beschaffen seyn,

dafs sie dem Ausdrucke $\left[\frac{a}{\mu \pm k} : \frac{b}{\nu} : \infty c \right]$ in der gegen c

rechtwinkligen Sectionsebene genügt. Die Sectionslinien gehen dann in dieser Ebene parallel, ihr Zonenpunkt erhält also das Zeichen

$\left(\frac{a \cdot \infty}{\mu \pm k} + \frac{b \cdot \infty}{\nu} \right)$, worin das eine

Glied negativ zu nehmen ist, wenn wir das andere po-

sitiv setzen, und umgekehrt. Substituiren wir also in die Formel der gegen c rechtwinkligen Sectionsebene

$$\sin : \cos = ab \sqrt{m^2 n^2 + m^2 b^2 + n^2 a^2} : b^2 \mu m - a^2 \nu n$$

$$m = \frac{\mu \pm k}{\infty}, \quad n = \frac{-\nu}{\infty}; \quad \text{ferner } \mu = \mu \pm k, \quad \nu = \nu, \text{ so erhalten wir die neue:}$$

$$\begin{aligned} \sin : \cos &= ab \sqrt{\frac{(\mu \pm k)^2}{\infty^2} \cdot \frac{\nu^2}{\infty^2} + \frac{(\mu \pm k)^2}{\infty^2} b^2 + \frac{\nu^2}{\infty^2} a^2} : \\ &\quad b^2 \frac{(\mu \pm k)^2}{\infty} + a^2 \frac{\nu^2}{\infty} \\ &= ab \sqrt{(\mu \pm k)^2 b^2 + \nu^2 a^2} : b^2 (\mu \pm k)^2 + a^2 \nu^2 \\ \sin \cos &= ab : \sqrt{b^2 (\mu \pm k)^2 + a^2 \nu^2}. \end{aligned}$$

Wir sind jetzt in den Stand gesetzt durch vorstehende Formeln, die sämmtlich aus der allgemeinen hervorgingen, jede nur mögliche Kantengröße zu finden.

Die Kenntniß der ebenen Winkel hat weniger Interesse, und ist von geringerer Wichtigkeit. Jedoch wollen wir ebenfalls ein Beispiel geben.

Wir haben in diesen Annalen, Bd. XXXIV S. 652, die beiden allgemeinen Formeln der ebenen Winkel für drei rechtwinklige Axen aufgestellt. Da es uns dort nur um eine Einsicht in die Rechnung zu thun war, so ließen wir das ν noch unbestimmt. Wollen wir die Formeln jedoch practisch anwenden, so müssen wir zunächst den Coëfficienten $\frac{1}{\nu}$ suchen. Die allgemeinen Formeln, welche auf einer Sectionslinie $\left[\frac{a}{m} : \frac{b}{n} \right]$ statt haben, waren:

$$\begin{aligned} 1) \sin : \cos &= n^2 a^2 \pm \frac{1}{\nu} (n^2 a^2 + m^2 b^2) : mn \sqrt{n^2 a^2 + m^2 b^2 + a^2 b^2}; \\ 2) \sin : \cos &= m^2 b^2 \pm \frac{1}{\nu} (n^2 a^2 + m^2 b^2) : mn \sqrt{n^2 a^2 + m^2 b^2 + a^2 b^2}, \end{aligned}$$

wo das $\frac{1}{\nu}$ in beiden Formeln noch verschiedene Werthe hat.

Nennen wir in Fig. 6 Taf. III das gesuchte Stück

$\frac{p}{v}$, $p = \sqrt{\frac{a^2}{m^2} + \frac{b^2}{n^2}}$, so verhält sich:

$$\frac{a}{m} : \frac{a}{\mu} = p : \frac{p}{v}, \quad \frac{p}{v} = \frac{m}{\mu} p,$$

der andere Theil von p ist dann $\frac{\mu - m}{\mu} p = \frac{n}{v} p$, wo $\frac{1}{\mu}$

und $\frac{1}{v}$ die gewohnten Bezeichnungen für die Abstände des Punktes von den Axen bedeuten. Die beiden Formeln bekommen also jetzt den Ausdruck:

$$\begin{aligned} 1) \sin : \cos &= n^2 a^2 \pm \frac{n}{v} (n^2 a^2 + m^2 b^2) : mn \sqrt{n^2 a^2 + m^2 b^2 + a^2 b^2} \\ &= n a^2 \pm \frac{1}{v} (n^2 a^2 + m^2 b^2) : m \sqrt{n^2 a^2 + m^2 b^2 + a^2 b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \sin : \cos &= m^2 b^2 \pm \frac{m}{\mu} (n^2 a^2 + m^2 b^2) : mn \sqrt{n^2 a^2 + m^2 b^2 + a^2 b^2} \\ &= m b^2 \pm \frac{1}{\mu} (n^2 a^2 + m^2 b^2) : n \sqrt{n^2 a^2 + m^2 b^2 + a^2 b^2} \end{aligned}$$

Den *cos* trifft die Sectionslinie im Punkte x ; von den zwei Gliedern des *sin* der Formel (2) bedeutet yx das erste Glied, wovon das zweite subtrahirt werden muß, so oft der Schenkel des ebenen Winkels zwischen xy fällt, hingegen dazu addirt, wenn er über y hinaus fällt. Eben so verhält es sich mit der Formel (1) auf der andern Seite des *cos*. Man bekommt nun aber immer noch dieselbe absolute Linie qx , mag man von xy das größere Stück qy abziehen, oder zu zx das Stück qz addiren. Wir können daher mit *Einer* Formel fort rechnen, wenn wir nur den *sin* in seiner absoluten Gröfse nehmen. Am bequemsten rechnet es sich vielleicht mit der zweiten. Wir legen also diese ein- für allemal der Rechnung zum Grunde, setzen in dieser statt des Zeichens „ \pm “ das einfachere „ $-$ “, müssen aber dann μ positiv oder negativ nehmen, je nachdem es durch die

Axe a derselben Seite, wo der \cos die Sectionslinie trifft, gemessen wird, oder durch die der entgegengesetzten. Wollen wir nun die Correctionsformel einführen, so setzen wir nur $m = m \pm k$, wo das Zeichen davon abhängt, ob der \cos einen vorderen oder einen hinteren Quadranten trifft, und $\mu = \mu \pm k$, abhängig davon, ob es durch die Axe a oder a' gemessen wird. Die allgemeine Formel lautet demnach:

$$\sin: \cos = (m \pm k) b^2$$

$$- \frac{1}{\mu \pm k} \left((m \pm k)^2 b^2 + n^2 a^2 \right) : n \sqrt{n^2 a^2 + (m \pm k)^2 b^2 + a^2 b^2} \quad *)$$

Wir können in dieser Formel wieder gleichmäÙig mit $m+k$ auch $\mu+k$ und mit $m-k$ ebenfalls $\mu-k$ setzen, müssen dann aber auf die Vorzeichen von μ achten, welche positiv sind, so oft der senkrechte Abstand in dem Quadranten liegt, wo der \cos die Sectionslinie schneidet, negativ im entgegengesetzten Falle.

Suchen wir nun z. B. die ebenen Winkel in der Fläche ϱ , so gilt hier, da der \cos einen vorderen Quadranten schneidet, das Zeichen $m+k$, und da $\varrho = [a:b]$, so ist $m=n=1$, folglich die specielle Formel:

$$\sin: \cos = (1+k) b^2$$

$$- \frac{1}{\mu+k} \left((1+k)^2 b^2 + a^2 \right) : \sqrt{a^2(1+b^2) + (1+k)^2 b^2}$$

$$\lg(1+k)^2 b^2 = 9,8265476 \dots \quad \text{num} \dots 0,67073$$

$$a^2(1+b^2) = 1,60613$$

$$* \lg \cos = \lg \sqrt{\dots} = 10,1786624 \quad 2,27686$$

$$\lg[(1+k)^2 b^2 + a^2] = 10,2185500 \dots \quad \text{num} \dots 1,65407 = \pi$$

$$\lg(1+k) b^2 = 9,8140900 \dots \quad \text{num} \dots 0,65177 = \tau$$

*) In unserer Correctionsformel, diese Annal. Bd. XXXIV S. 657, haben wir den Factor $\frac{1}{r}$ absolut genommen, und ihn weiter nicht näher bestimmt, wir mußten ihn also auch unverändert stehen lassen.

Gehen wir in der Sectionslinie q von dem Punkte $(b+2a)$ aus, so ist für ihn $\mu = \frac{1}{2}$, für die folgenden Punkte wird nun der Reihe nach $\mu = \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1, \frac{5}{3}, 2, 3, \infty$. Jetzt geht die Linie in den hinteren Quadranten über. Für diese Punkte wird also $\mu = -5, -4, -3, -1 \dots$; diese Zahlen haben wir einfach zu substituiren, um die einzelnen \sin zu bekommen. Es wird alsdann $\frac{1}{\mu+k}$,

$$= \frac{2}{1+2k}, \frac{3}{2+3k}, \frac{4}{3+4k}, \frac{1}{1+k}, \frac{4}{5+1k}, \frac{1}{2+k}, \frac{1}{3+k},$$

$$0; -\frac{1}{5-k}, -\frac{1}{4-k}, -\frac{1}{3-k}, -\frac{1}{1-k}, \dots$$

Um nicht zu weitläufig zu seyn, heben wir nur einige Punkte heraus, z. B. $\frac{3}{2+3k}$

$$\begin{array}{r} \lg 3 = 0,4771213 \\ \lg(2+3k) = 0,3196057 \\ \hline \dots = 10,1575156 \\ \lg \pi = 10,2185500 \\ \hline \dots = 10,3760626 \dots \text{num} \dots 2,3772 \\ (1+k)b^2 = 0,65177 \\ \hline \sin = 1,72543 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} * \lg \cos = 10,1786624 \\ \lg \sin = 10,2368898 \\ \hline \lg \cotg = 9,9417726 \dots 48.50 \end{array}$$

Für den Punkt $\frac{1}{1+k}$ ist

$$\begin{array}{r} \lg(1+k) = 0,0124516 \\ \hline \lg \frac{\pi}{1+k} = 10,2060984 \dots \text{num} \dots 1,6073 \\ \lg \sin = 9,9802443 \quad \tau = 0,65177 \\ \hline \sin = 0,95553 \\ \hline \lg \cotg = 10,1984181 \dots 32.20 \end{array}$$

Für den Punkt 0 ist

$$\begin{array}{r} \lg \sin = \lg \tau = 9,6140900 \\ \lg \cot g = 10,3645724 \dots 23.22 \end{array}$$

Für den Punkt $-\frac{1}{1-k}$ ist

$$\begin{array}{r} \lg(1-k) = 9,9871566 \\ \lg \frac{\pi}{1-k} = 10,2313934 \dots \text{num} \dots 1,7037 \\ \lg \sin = 10,3720831 \qquad \tau = 065177 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \sin = 2,35547 \\ \lg \cot g = 9,8065793 \dots 57.22. \end{array}$$

Schneidet der \cos den hinteren Quadranten, wie dieses z. B. mit der Linie $s = [a' : 2b]$ der Fall seyn würde, so gilt hier die allgemeine Formel:

$$\sin : \cos = (m-k)b^2 - \frac{1}{\mu-k} \left((m-k)^2 b^2 + n^2 a^2 \right) : n \sqrt{n^2 a^2 + (m-k)^2 b^2 + a^2 b^2}$$

Wir überheben uns jedoch der weiteren Rechnung und suchen die Formel für den speciellen Fall in der Sectionslinie $\left[\frac{a}{m} : \frac{b}{o} \right]$. Um versteckte Factoren zu vermeiden, müssen wir die Formel (1) nehmen, welche lautet:

$$\sin : \cos = na^2 - \frac{\mu}{v(\mu \pm k)} \left[(m \pm k)^2 b^2 + n^2 a^2 \right] : (m \pm k) \sqrt{n^2 a^2 + (m \pm k)^2 b^2 + a^2 b^2};$$

setzen wir in dieser $n=0$, und $\mu=m$, welche in unserem Falle gleich werden, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sin : \cos &= \frac{m}{v(m \pm k)} (m \pm k)^2 b^2 : (m \pm k) \sqrt{(m \pm k)^2 b^2 + a^2 b^2} \\ &= \frac{m}{v} b : \sqrt{(m \pm k)^2 + a^2}, \end{aligned}$$

wo plus auf der vorderen, minus auf der hinteren Seite gilt.

Für eine Fläche $\left[\frac{b}{n} : \frac{a}{o}\right]$ setzen wir in unserer allgemeinen Formel $m=o$, und erhalten:

$$\sin : \cos = \pm kb^2 - \frac{1}{\mu \pm k} (k^2 b^2 + n^2 a^2) : n \sqrt{n^2 a^2 + k^2 b^2 + a^2 b^2},$$

wo das Plus für die Punkte im vorderen, Quadranten, das Minus für die im hinteren gilt.

Für eine Fläche aus der Zone des Mittelpunktes:

$\left[\frac{a}{m} : \frac{b}{n} : \infty c\right] = \left[\frac{a}{m \cdot \infty} : \frac{b}{n \cdot \infty} : c\right]$ müssen wir $m=m \cdot \infty$ und $n=n \cdot \infty$ setzen, und erhalten dann:

$$\begin{aligned} \sin : \cos &= m \cdot \infty b^2 - \frac{1}{\mu - k} (m^2 \cdot \infty^2 b^2 + n^2 \cdot \infty \cdot a^2) : \\ &\quad : n \cdot \infty \sqrt{n^2 \cdot \infty^2 \cdot a^2 + m \cdot \infty^2 b^2 + a^2 \cdot b^2} \\ &= \frac{1}{\mu \pm k} (m^2 b^2 + n^2 a^2) : n \sqrt{n^2 a^2 + m^2 b^2} \\ &= \sqrt{m^2 b^2 + n^2 a^2} : n \cdot (\mu \pm k). \end{aligned}$$

Suchen wir die ebenen Winkel der Punkte in der Axe a , so muß sich natürlich ergeben:

$$\sin : \cos = a : \mu \pm k,$$

und eben so für die in der Axe b :

$$\sin : \cos = b : \nu,$$

Formeln, die man unmittelbar aus der Figur abliest.

Die ebenen Winkel in der Projectionsfläche sind sämtlich in der Figur gezeichnet. Sie liegen jedoch sehr zerstreut. Da aber die Winkel, welche die Sectionslinien unter sich machen, dieselben bleiben, mag man auch die Linien parallel mit sich verrücken, so kann ich sämtliche durch einen Punkt gelegt denken, und alsdann unmittelbar \sin und \cos von den Axen ablesen. Will ich z. B. die Neigung von μ' gegen g finden, so lege ich g durch den Zonenpunkt $\left(\frac{b}{1} + \frac{a}{0}\right)$, alsdann habe ich für sie als Neigung gegen die Axe b die Formel:

$$\sin : \cos = a : b;$$

für

für μ' habe ich $\sin : \cos = \frac{2a_1}{3} : b$, folglich finde ich dar-

aus die Neigung beider Linien gegen einander. Lege ich nun sämtliche Linien durch gedachten Punkt, so kann ich das Verhältniß für die Neigung der Linien gegen die Axe unmittelbar ablesen, und somit leicht die Neigung der einzelnen Linien gegen einander finden.

Um nun eine Uebersicht, insonders der Kantenwinkel zu haben, kann man, wie wir in Fig. 2 Taf. III gethan haben, dieselben zwischen die Sectionslinien einschreiben. Es bedarf hierzu natürlich bei den 2- und 1-gliedrigen Systemen nur einer halben Figur, ja bei den 2- und 2-gliedrigen nur eines Quadranten ¹⁾. Man kann jedoch fast eben so bequem die Flächen nur zonenweis zusammenstellen, wie z. B. aus der Zone $\left(\frac{b}{1} + \frac{a}{0}\right)$:

$$\begin{aligned} b &= 0 \\ \sigma &= 38.56 \\ \mu' &= 8.21 \\ \nu &= 43.46 \\ \pi &= 17.23 \\ \varrho &= 14.26 \\ \mu &= 11.48 \\ b &= 45.20 \end{aligned}$$

und alsdann durch Addition die verschiedenen Neigungen finden.

Die ebenen Winkel sind weniger wissenschaftlich, jedoch würde man sie auf die Sectionslinien selbst ein-

1.) Da es unserer Projection allerdings besonders bei dem regulären und viergliedrigen Systeme zum Vorwurfe gereicht, daß die Figuren nicht selten zu sehr ausgedehnt werden, so kann dem Uebelstande hierdurch leicht abgeholfen werden; denn wir brauchen nur *Einen* Quadranten zu zeichnen. Da die Zonen in diesen Systemen auch leichter übersehbar sind, so ist es um so weniger schwierig, sich aus einem Viertel das ganze Bild im Geiste zu ergänzen.

schreiben, sofern man sie übersichtlich zusammenstellen wollte.

Da wir in unserer Figur den Krystall abstract mathematisch darstellen, so ist sie Jedem verständlich, der bis zur körperlichen Trigonometrie vorgedrungen ist. Es könnte daher der Mathematiker, dem Krystallographen leicht hülfsreiche Hand leisten, namentlich könnten Lehrer an Schulen sie als logarithmische Uebungsbeispiele ihren Schülern geben, und so der Mineralogie durch Berechnung einer Reihe von Winkeln einen nicht geringen Dienst erweisen.

Hat man sich Ebene- und Kanten-Winkel berechnet, so controlirt man die gefundenen Werthe mittelst der bekannten Formeln, die wir für eine rechtwinklige körperliche Ecke aufstellten. So hat z. B. die Octaëderfläche ρ gegen die Ebene ac eine Neigung von 48.55, gegen die bc aber 57.8; der ebene Winkel, welcher der rechtwinkligen Kante gegenüber steht, beträgt 55.42. Sind nun die Resultate richtig, so muß $\cos c = \cot g A \cdot \cot g B$ seyn, wenn wir die Winkel der Reihe nach mit A , B , c bezeichnen. Wir erhalten zum Resultate 9,7507410 = 9,7508140. Da ich bei der Rechnung halbe Minuten vernachlässigte, so stimmt dieses genau. So lassen sich die Neigungen der hinteren Flächen durch die ebenen Winkel auf der Fläche ac controliren, wenn man den Satz $\cos b = \frac{\cos B}{\sin A}$ in Anwendung bringt. Viele vereinzelt liegende Zonenpunkte lassen sich mittelst dieser Sätze oftmals sehr leicht berechnen, wie dieses Hr. Prof. Kupffer schon früher ausgeführt hat. Die Figur führt uns aber in die klarste Einsicht, und wenn wir sie fleißig studiren, so wird nicht nur nicht der Geübte, sondern auch selbst nicht einmal der Anfänger in irgend einem Falle in Verlegenheit kommen.
