ÜBER EINE TRIGONOMETRISCHE SUMME.

Von **Dunham Jackson** (Göttingen).

Adunanza del 12 marzo 1911.

Es ist bekannt, dass der absolute Betrag der Summe

$$S(n,\ x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n}$$

für alle Werte von n und x unterhalb einer festen Grenze bleibt [1]). FEJÉR hat die Vermutung ausgesprochen, dass man hierfür den Wert

$$G = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = 1.8519\ldots$$

setzen darf, und dass das Maximum von $|S(n,\ x)|$ mit n beständig gegen diese Grenze wächst [2]). Für diese Vermutung hat er später einen Beweis gefunden, aber nicht veröffentlicht. Er beweist:

1) Das Maximum wird für $x = \frac{\pi}{n+1}$ erreicht;

2) $$S\left(n,\ \frac{\pi}{n+1}\right) > S\left(n-1,\ \frac{\pi}{(n-1)+1}\right);$$

3) $$\lim_{n=\infty} S\left(n,\ \frac{\pi}{n+1}\right) = G.$$

Ich gebe im ersten Paragraphen einen einfachen Beweis für 1), und dann den FEJÉR'schen Beweis für 2) und 3), den ich einem Briefe FEJÉR's an Herrn LANDAU mit Zustimmung beider Herren entnehme. Auch Herr stud. math. J. DROSTE in Göttingen hat den Wert G als obere Grenze von $|S(n,\ x)|$ gefunden.

[1]) Siehe z. B.: KNESER, *Beiträge zur Theorie der* STURM-LIOUVILLE*schen Darstellung willkürlicher Funktionen* [Mathematische Annalen, Bd. LX (1905), S. 402-423]; FEJÉR, LEBESGUE*sche Konstanten und divergente* FOURIER*reihen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. CXXXVIII (1910), S. 22-53], S. 41-43.

[2]) FEJÉR, *Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze* [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München, Jahrgang 1910, n° 3, S. 1-17], S. 5-6.

Im zweiten Paragraphen beweise ich eine weitere Vermutung Fejér's, dass $S(n, x)$ im Intervalle $0 < x < \pi$ stets positiv ist.

I.

Es genügt, das Maximum von $|S(n, x)|$ für $0 \leqq x \leqq \pi$ zu bestimmen, da $S(n, x)$ periodisch mit der Periode 2π und ungerade ist; wir beschränken x auf dieses Intervall.

$$\text{1)} \qquad \frac{d}{dx} S(n, x) = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$$

$$= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2};$$

$$S(n, x) = \int_0^x \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx - \frac{x}{2}$$

$$= I(n, x) - \frac{x}{2}.$$

Der Integrand ist in sukzessiven Intervallen von der Länge $\frac{2\pi}{2n+1}$ abwechselnd positiv und negativ; der Nenner ist eine von 0 bis π monoton zunehmende Funktion.

$$0 \leqq I(n, x) \leqq I\left(n, \frac{2\pi}{2n+1}\right), \qquad 0 \leqq x \leqq \pi,$$

$$-\frac{x}{2} \leqq -\frac{\pi}{2n+1}, \qquad \frac{2\pi}{2n+1} \leqq x \leqq \pi.$$

Also

$$S(n, x) \leqq S\left(n, \frac{2\pi}{2n+1}\right), \qquad \frac{2\pi}{2n+1} \leqq x \leqq \pi.$$

Der Punkt x_0, wo $S(n, x)$ seinen grössten Wert annimmt, liegt sicherlich zwischen 0 und $\frac{2\pi}{2n+1}$. Im Punkte x_0 ist

$$\frac{d}{dx} S(n, x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} = 0;$$

$$\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x_0 = \sin \frac{x_0}{2},$$

$$0 \leqq x_0 \leqq \frac{2\pi}{2n+1}, \qquad 0 \leqq \left(n + \frac{1}{2}\right)x_0 \leqq \pi,$$

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)x_0 = \frac{x_0}{2} \text{ oder } \pi - \frac{x_0}{2};$$

x_0 ist gewiss $\neq 0$;

$$x_0 = \frac{\pi}{n+1}.$$

Wir werden bald sehen, dass dieses Maximum von $S(n, x)$ auch Maximum von $|S(n, x)|$ ist.

2) Da einerseits $S(n, x)$ seinen grössten Wert für $x = \frac{\pi}{n+1}$ erreicht und andererseits $\sin nx$ für $x = \frac{\pi}{n}$ verschwindet, ist

$$S\left(n, \frac{\pi}{n+1}\right) > S\left(n, \frac{\pi}{n}\right) = S\left(n-1, \frac{\pi}{n}\right) = S\left(n-1, \frac{\pi}{(n-1)+1}\right).$$

D. h., $S\left(n, \frac{\pi}{n+1}\right)$ wächst beständig mit n. Da $0 \leqq I(n, x)$ ist, wie wir gesehen haben, ist $S(n, x) \geqq -\frac{\pi}{2}$ für $0 \leqq x \leqq \pi$. Für $n = 5$ [3]), folglich für $n \geqq 5$ ist $S\left(n, \frac{\pi}{n+1}\right) > \frac{\pi}{2}$, und Maximum $S(n, x) =$ Maximum $|S(n, x)|$. Man findet leicht, dass letzteres auch für $n = 1, 2, 3, 4$ richtig ist. Damit ist der Beweis von 1) und 2) fertig.

3) $$S\left(n, \frac{\pi}{n+1}\right) = \sin\frac{\pi}{n+1} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{n+1}$$

$$= \frac{\pi}{n+1}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\frac{\pi}{n+1}} + \frac{\sin\frac{2\pi}{n+1}}{\frac{2\pi}{n+1}} + \cdots + \frac{\sin\frac{n\pi}{n+1}}{\frac{n\pi}{n+1}}\right];$$

$$\lim_{n=\infty} S\left(n, \frac{\pi}{n+1}\right) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx = G.$$

II.

Es soll jetzt gezeigt werden, dass $S(n, x) > 0$ ist für $0 < x < \pi$.

Sei x_1 der Punkt des Intervalls $0 \leqq x \leqq \pi$, wo $S(n, x)$ seinen kleinsten Wert erreicht. Ist diese Bestimmung nicht eindeutig, so sei x_1 der erste solche Punkt, der rechts vom Nullpunkt liegt. Ich habe zu zeigen, dass $x_1 = \pi$ ist; es ist $S(n, \pi) = 0$.

Es sei angenommen, dass $n \geqq 3$ ist. Für

$$S(1, x) = \sin x, \qquad S(2, x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} = \sin x(1 + \cos x)$$

ist die Richtigkeit des Satzes ohne weiteres klar.

1) Sei $0 < x \leqq \frac{\pi}{3}$. Man setze $\frac{2\pi}{2n+1} = \Delta$.

Für $0 < x \leqq \Delta$ ist jedes Glied der Summe $S(n, x)$ positiv. Für $\Delta < x \leqq \frac{\pi}{3}$

[3]) $S\left(5, \frac{\pi}{6}\right) = 1.5828\ldots$

ist, da der Integrand die Form sinus durch monoton zunehmende Funktion hat,

$$\int_0^x \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx \geqq \int_0^{2\Delta} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)y}{\sin y}\,dy + \int_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\frac{2\pi}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)y}{\sin y}\,dy, \quad \left(y=\frac{x}{2}\right)$$

$$> \int_0^{\frac{\pi}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)y}{y}\,dy + \frac{\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} \int_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\frac{2\pi}{2n+1}} \frac{\sin(2n+1)y}{y}\,dy$$

$\left(\text{da } n \geqq 3 \text{ angenommen wurde, also } \frac{2\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{3}\right)$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt, \quad (t=(2n+1)y)$$

$$> 1.85\cdots - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dt}{\pi} = 1.85\cdots - 1.21\cdots > \frac{\pi}{6};$$

$$-\frac{x}{2} \geqq -\frac{\pi}{6};$$

$$S(n, x) > 0.$$

Folglich ist $x_1 > \frac{\pi}{3}$.

2) Sei $\frac{\pi}{3} < x \leqq \pi - 2\Delta$.

$$S(n, x+2\Delta) - S(n, x) = \int_x^{x+2\Delta} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx - \Delta.$$

Für $x > \frac{\pi}{3}$ ist

$$2\sin\frac{x}{2} > 1, \qquad \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} < 1.$$

Der Integrand ist ferner nur auf einer Hälfte des Integrationsintervalls positiv; es ist sicher

$$\int_x^{x+2\Delta} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx < \Delta.$$

$$S(n, x+2\Delta) - S(n, x) < 0.$$

Eine solche Ungleichung ist mit der Definition von x_1 nicht verträglich, insofern der Punkt $x+2\Delta$ dem Intervalle $0 \leqq x \leqq \pi$ noch angehört. Es muss $x_1 > \pi - 2\Delta$ sein.

3) Sei $\pi - 2\Delta \leqq x \leqq \pi$.

Die Summe $S(n, x)$ hat in diesem Intervall einen kleinsten Wert. Nach der eben bewiesenen Ungleichung ist $S(n, \pi - 2\Delta) > S(n, \pi) = 0$. Wird der kleinste Wert in einem anderen Punkte als $x = \pi$ angenommen, so hat $S(n, x)$ in diesem Punkt ein Minimum.

$$\frac{d}{dx} S(n, x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} = 0,$$

$$\sin\left(n + \tfrac{1}{2}\right)x = \sin \frac{x}{2},$$

$$\left(n + \tfrac{1}{2}\right)x = \frac{x}{2} + 2k\pi \quad \text{oder} \quad \left(\pi - \frac{x}{2}\right) + 2k\pi,$$

$$x = \frac{2k\pi}{n} \quad \text{oder} \quad \frac{(2k+1)\pi}{n+1}.$$

$$\frac{d^2}{dx^2} S(n, x) = \frac{1}{2} \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{x}{2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(n+1) \sin \frac{x}{2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2} \sin (n+1)x}{\sin^2 \frac{x}{2}}.$$

In einem Punkte

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{n+1}, \qquad 0 < x < \pi$$

ist

$$\sin(n+1)x = 0, \qquad \sin \frac{x}{2} > 0;$$

$\frac{d^2}{dx^2} S(n, x)$ hat das Vorzeichen von

$$\cos\left(n + \tfrac{1}{2}\right)x = \cos \frac{n + \frac{1}{2}}{n+1}(2k+1)\pi$$

$$= \cos\left[(2k+1)\pi\left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right)\right] = -\cos \frac{1}{2}\frac{(2k+1)\pi}{n+1} = -\cos\frac{x}{2} < 0.$$

Diese Punkte sind keine Minima; nur die Punkte $x = \frac{2k\pi}{n}$ kommen für uns in Betracht.

Erster Fall: n gerade. Es liegt kein Punkt $\frac{2k\pi}{n}$ zwischen $\pi - 2\Delta$ und π.

$S(n, x)$ hat kein Minimum im Innern dieses Intervalles, sondern ist hier und im ganzen Intervalle $0 < x < \pi$ positiv [4]).

---

[4]) Auf diesen Schluss, der einen komplizierteren ersetzt, hat mich Herr LANDAU aufmerksam gemacht.

Zweiter Fall: n ungerade. Wegen

$$\sin n \left(\frac{2 k \pi}{n}\right) = 0$$

ist

$$S\left(n, \frac{2 k \pi}{n}\right) = S\left(n - 1, \frac{2 k \pi}{n}\right) > 0 \quad \text{für} \quad 0 < \frac{2 k \pi}{n} < \pi$$

nach dem ersten Fall. Für $0 < x < \pi$ ist jedes Minimum von $S(n, x)$ positiv, also jeder Wert von $S(n, x)$; es ist stets $x_1 = \pi$.

Göttingen, den 22. Februar 1911.

DUNHAM JACKSON.