Über die Konvergenz von Reihen, die nach periodischen Funktionen fortschreiten.

Von

Fritz Jerosch† und Hermann Weyl in Göttingen*).

§ 1.

Hilfssatz über die Beschränktheit von Funktionsfolgen.

Das nächste Ziel der folgenden Untersuchung ist es, zu entscheiden, unter welchen Voraussetzungen über die Größenordnung der Koeffizienten c_n, $\bar{c}_n$ eine trigonometrische Reihe

$$\frac{c_0}{2} + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + c_3 \cos 3x + \cdots$$
$$+ \bar{c}_1 \sin x + \bar{c}_2 \sin 2x + \bar{c}_3 \sin 3x + \cdots$$

für alle Werte der Variablen x mit Ausnahme solcher, die einer Menge vom Maße 0**) angehören, konvergiert.***) Wir bedürfen dazu eines Satzes über die Beschränktheit einer einfach unendlichen Reihe von periodischen Funktionen.

Es liege eine unendliche Folge

$$F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x),\ \cdots$$

*) Herr Fritz Jerosch, Student der Mathematik in Göttingen, hatte im August 1907 eine Note über den Gegenstand dieser Arbeit bei den Annalen eingereicht. Er war damit beschäftigt, sie umzugestalten und zu erweitern, als er plötzlich infolge einer Operation verstarb. Herr Weyl hatte die Freundlichkeit, auf Grund der nachgelassenen Papiere des Herrn Jerosch die vorliegende Bearbeitung auszuführen.

D. Red. d. Math. Ann.

**) Zur Definition des Begriffes „Maß" (mesure) vgl. Lebesgue, Leçons sur l'intégration (Paris 1904), pag. 102 ff., Leçons sur les séries trigonométriques (Paris 1906), pag. 8.

***) Die gleiche Fragestellung findet sich bereits bei Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math. Bd. 30 (1906), pag. 337. Doch ist das dort ausgesprochene Ergebnis — Fatou gibt als hinreichende Bedingung $\underset{n=\infty}{L}\, n c_n = \underset{n=\infty}{L}\, n \bar{c}_n = 0$ an — weit weniger vollständig als das in § 2 der vorliegenden Note bewiesene.

stetiger Funktionen von der Periode 2π vor. Ist N irgend ein Index, so finden sich für jeden Wert von x unter den Zahlen

$$|F_1(x)|,\ |F_2(x)|,\ \cdots,\ |F_N(x)|$$

eine oder mehrere *größte;* der Index der ersten unter diesen größten (der eine Funktion von N und x ist), werde mit $(N; x)$ bezeichnet, so daß für alle N und alle x

$$|F_n(x)| \leqq |F_{(N;x)}(x)|, \quad \text{falls} \quad n \leqq N,$$

gilt. Es ist leicht zu sehen, daß die Funktionen $F_{(N;x)}(x)$ von x gleichfalls stetig sind und die Periode 2π besitzen. Ist demnach δ irgend ein reeller positiver Exponent, so existieren die Integrale

$$\int_0^{2\pi} |F_{(N;x)}(x)|^\delta dx = J_N^{(\delta)} \quad \text{für} \quad N = 1, 2, 3, \cdots,$$

und der zu beweisende Hilfssatz lautet jetzt so:

Ist (für ein festes δ) die Zahlenfolge

(1) $$J_1^{(\delta)},\ J_2^{(\delta)},\ J_3^{(\delta)},\ \cdots$$

beschränkt, so ist die Menge $\mathfrak{M}_0$, die dadurch erklärt ist, daß ihr ein Wert x_0 des Intervalls $0 \cdots 2\pi$ dann und nur dann zugerechnet wird, falls die Wertefolge $F_1(x_0)$, $F_2(x_0)$, $F_3(x_0)$, $\cdots$ nicht beschränkt ist, vom Maße 0.

In der Tat: ist etwa

$$J_N^{(\delta)} \leqq H^\delta \quad \text{für alle } N,$$

und verstehen wir unter A irgend eine positive Zahl, so beträgt das Maß $m(\mathfrak{A}_N)$ derjenigen Punktmenge $\mathfrak{A}_N$ des Intervalls $0 \leqq x \leqq 2\pi$, in welcher $|F_{(N;x)}(x)| > A$ ist, höchstens $\left(\frac{H}{A}\right)^\delta$, da notwendig

$$\int_0^{2\pi} |F_{(N;x)}(x)|^\delta dx \geqq A^\delta \cdot m(\mathfrak{A}_N)$$

wird. Nun ist aber für jeden Wert von x

$$|F_{(1;x)}(x)| \leqq |F_{(2;x)}(x)| \leqq |F_{(3;x)}(x)| \leqq \cdots,$$

und mithin $\mathfrak{A}_1$ enthalten in $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_2$ enthalten in $\mathfrak{A}_3$ u. s. f.; folglich sind alle $\mathfrak{A}_N$ in einer Menge $\mathfrak{A}$ enthalten, für deren Maß $m(\mathfrak{A})$ die Ungleichung gilt:

$$m(\mathfrak{A}) \leqq \left(\frac{H}{A}\right)^\delta.$$

Das heißt aber, daß die Menge derjenigen Punkte x des Intervalls $0 \cdots 2\pi$, in denen *irgend eine* der Funktionen $|F_1(x)|$, $|F_2(x)|$, $\cdots$ die

Zahl A übersteigt, höchstens das Maß $\left(\frac{H}{A}\right)^\delta$ besitzt. Daraus ergibt sich die Richtigkeit unserer Behauptung.

Für die Zwecke des § 3 ist es erforderlich, eine gewisse Erweiterung dieses Hilfssatzes auf zweifach unendliche Funktionsfolgen vorzunehmen. Indem wir die obigen Bezeichnungen beibehalten, aber jetzt unter δ insbesondere einen positiven Exponenten $\leqq 1$ verstehen, unter $a_1, a_2, a_3, \cdots$ aber irgendwelche reelle Zahlen, für welche die Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^\delta, \quad \text{mithin auch} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert, setzen wir

$$G_{m,n}(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k F_n(kx).$$

Hilfssatz: *Ist für einen positiven Exponenten δ der angegebenen Art die Folge* (1) *beschränkt, so machen diejenigen Stellen x, für die die abzählbar-unendlichvielen Werte $G_{m,n}(x)$ $(m, n = 1, 2, 3, \cdots)$ nicht zwischen endlichen Grenzen bleiben, wiederum nur eine Menge vom Maße* 0 *aus.*

Es ist nämlich

$$(2) \qquad |G_{m,n}(x)| \leqq \sum_{k=1}^{M} |a_k| \cdot |F_{(N;kx)}(kx)|, \quad \text{falls} \quad m \leqq M,\ n \leqq N,$$

ferner

$$(3) \qquad \left(\sum_{k=1}^{M} |a_k| \cdot |F_{(N;kx)}(kx)|\right)^\delta \leqq \sum_{k=1}^{M} |a_k|^\delta \cdot |F_{(N;kx)}(kx)|^\delta,$$

und daher, wenn wir das Integral des auf der linken Seite von (3) stehenden Ausdrucks nach x im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ mit $J^{(\delta)}_{M,N}$ bezeichnen und bedenken, daß

$$\int_0^{2\pi} |F_{(N;kx)}(kx)|^\delta\, dx = \frac{1}{k}\int_0^{2\pi k} |F_{(N;x)}(x)|^\delta\, dx = \int_0^{2\pi} |F_{(N;x)}(x)|^\delta\, dx$$

ist,

$$J^{(\delta)}_{M,N} \leqq \sum_{k=1}^{M} |a_k|^\delta \cdot \int_0^{2\pi} |F_{(N;x)}(x)|^\delta\, dx \leqq H^\delta \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^\delta;$$

d. h. unter den gemachten Annahmen ist auch die Zahlenmenge der $J^{(\delta)}_{M,N}$ (bei festem δ) beschränkt, und daraus folgt, indem wir den ersten Hilfssatz statt auf die $F_n(x)$ nunmehr auf die doppelte Folge der $G_{m,n}(x)$ anwenden, die zu beweisende Tatsache.

§ 2.

Satz über die Konvergenz einer trigonometrischen Reihe.

Wir beschränken uns beim Ausspruch und Beweis des angekündigten Satzes über die Konvergenz trigonometrischer Entwicklungen auf eine bloße Cosinus-Reihe.

Satz: *Eine Reihe*

$$c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + c_3 \cos 3x + \cdots$$

konvergiert für alle Werte x mit Ausnahme solcher, die einer gewissen Menge $\mathfrak{M}$ vom Maße 0 angehören, falls sich eine positive Zahl C und ein Exponent $\gamma > \frac{2}{3}$ angeben lassen, so daß für alle n

$$|c_n| \leqq \frac{C}{n^\gamma}$$

ist.

Wir setzen

$$F_n(x) = c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \cdots + c_n \cos nx$$

und wenden auf die hiermit gewonnene Funktionsfolge

$$F_n(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

den ersten Hilfssatz und die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen an, um *auf solche Art zunächst zu beweisen, daß diejenigen Werte x des Intervalls $0 \leqq x \leqq 2\pi$, für die jene sukzessiven Partialsummen keine beschränkte Zahlenreihe bilden, eine Menge $\mathfrak{M}_0$ vom Maße 0 ausmachen.* Dazu ist es nötig, einen positiven Exponenten δ so ausfindig zu machen, daß die Reihe der Integrale $J_N^{(\delta)}$ für alle N unterhalb einer endlichen Grenze bleibt.

Unter den Voraussetzungen des Theorems existiert die Quadratsumme

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \cdots,$$

und es gibt infolgedessen, wenn wir den Integralbegriff in dem von Lebesgue aufgestellten Sinne*) nehmen, nach einem von den Herren Riesz und Fischer bewiesenen Satz**) eine samt ihrem Quadrat integrierbare Funktion $F(x)$, so daß

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x) \cos nx \, dx = c_n$$

und

$$\pi \cdot \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \int_0^{2\pi} (F(x))^2 \, dx$$

*) Leç. sur l'intégration pag. 98 ff. — Leç. s. l. sér. trigonom. pag. 10 f.

**) Riesz, Gött. Nachr. (Math.-phys. Klasse) 1907, pag. 116. — Fischer, Comptes Rendus, Bd. 144, p. 1022 (13. Mai 1907).

ist. Wir schreiben noch
$$F(x) - F_n(x) = D_n(x);$$
dann gilt
$$\int_0^{2\pi} (D_n(x))^2\, dx = \pi \cdot \sum_{h=n+1}^{\infty} c_h^2.$$

Das Maß $m(\mathfrak{E}_n)$ derjenigen Menge $\mathfrak{E}_n$ im Intervall $0 \cdots 2\pi$, in welcher $|D_n(x)| \geqq 1$ ist, genügt wegen dieser Gleichung der Bedingung

$$(4) \qquad m(\mathfrak{E}_n) \leqq \pi \cdot \sum_{h=n+1}^{\infty} c_h^2 \leqq \pi C^2 \cdot \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{h^{2\gamma}} < \pi C^2 \cdot \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{2\gamma}} = \frac{\pi C^2}{2\gamma - 1}\, n^{-(2\gamma-1)}.$$

Bedeutet für eine positive Zahl a allgemein $[a]$ die größte ganze Zahl, welche a nicht übersteigt, so schreiben wir jetzt
$$n_1 = 1,$$
$$n_2 = n_1 + [n_1^{\gamma}],$$
$$n_3 = n_2 + [n_2^{\gamma}],$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
Um das Integral
$$\int_0^{2\pi} |F_{(N;x)}(x)|^{\delta}\, dx$$
zu berechnen, teilen wir das Intervall $0 \cdots 2\pi$ (mit Bezug auf den Index N) in eine endliche Anzahl meßbarer Punktmengen $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \cdots, \mathfrak{R}_p$. Dabei rechnen wir einen Punkt x des Intervalls dann und nur dann zu $\mathfrak{R}_k$, falls
$$n_k \leqq (N; x) < n_{k+1}$$
ist, und es bedeutet p den letzten unter den Indizes k, für welche $n_k \leqq N$ ausfällt. Alsdann wird

$$(5) \qquad \int_0^{2\pi} |F_{(N;x)}(x)|^{\delta}\, dx = \int_{\mathfrak{R}_1} + \int_{\mathfrak{R}_2} + \cdots + \int_{\mathfrak{R}_p},$$

wobei allgemein unter $\int_{\mathfrak{R}_k}$ das über $\mathfrak{R}_k$ zu erstreckende (Lebesguesche) Integral von $|F_{(N;x)}(x)|^{\delta}$ zu verstehen ist. Ein in $\mathfrak{R}_k$ enthaltener Wert x gehört entweder $\mathfrak{E}_{n_k}$ an, falls nämlich $|D_{n_k}(x)| \geqq 1$ ist, oder es gilt für jenen Wert x die Ungleichung $|D_{n_k}(x)| < 1$; im letzten Fall ist aber, da für Werte x aus $\mathfrak{R}_k$
$$0 \leqq (N; x) - n_k < n_{k+1} - n_k \leqq n_k^{\gamma}$$
ist,

$$|D_{(N;x)}(x) - D_{n_k}(x)| = \left|\sum_{\nu=n_k+1}^{(N;x)} c_\nu \cos \nu x\right| \leqq \sum_{\nu=n_k+1}^{(N;x)} |c_\nu|$$
$$\leqq \frac{C}{n_k^\gamma} \{(N;x) - n_k\} < C,$$

und mithin

$$|D_{(N;x)}(x)| < 1 + C.$$

Für Werte x, die $\mathfrak{R}_k$, aber nicht $\mathfrak{E}_{n_k}$ angehören, ist demnach

$$|F_{(N;x)}(x)| < 1 + C + |F(x)|,$$

und falls der Exponent $\delta \leqq 1$ ist, um so mehr

$$|F_{(N;x)}(x)|^\delta < 1 + C + |F(x)|.$$

Aus dieser Überlegung folgt für das in (5) auftretende Integral über $\mathfrak{R}_k$ die Ungleichung

$$\left|\int_{\mathfrak{R}_k}\right| \leqq \int_{(\mathfrak{R}_k,\, \mathfrak{E}_{n_k})} |F_{(N;x)}(x)|^\delta dx + \int_{\mathfrak{R}_k} (1 + C + |F(x)|)\, dx,$$

in der $(\mathfrak{R}_k, \mathfrak{E}_{n_k})$ den „Durchschnitt“ der beiden eingeklammerten Mengen bezeichnet.

Sind die Zahlen $H_1, H_2, \cdots$ so gewählt, daß für alle Indizes $n < n_{k+1}$ und alle Werte x

$$|F_n(x)| \leqq H_k$$

wird, so ist im Bereiche der Menge $\mathfrak{R}_k$

$$|F_{(N;x)}(x)| \leqq H_k,$$

und folglich

$$\left|\int_{\mathfrak{R}_k}\right| \leqq H_k^\delta \cdot m(\mathfrak{E}_{n_k}) + \int_{(\mathfrak{R}_k)} (1 + C + |F(x)|)\, dx. \tag{6}$$

Führen wir diese Abschätzung in (5) ein, so kommt

$$\int_0^{2\pi} |F_{(N;x)}(x)|^\delta dx \leqq \sum_{k=1}^{p} H_k^\delta \cdot m(\mathfrak{E}_{n_k}) + 2\pi(1 + C) + \int_0^{2\pi} |F(x)|\, dx.$$

Daß die Integrale

$$J_N^{(\delta)} = \int_0^{2\pi} |F_{(N;x)}(x)|^\delta dx$$

eine beschränkte Folge bilden, wird also bewiesen sein, falls gezeigt wird, daß die unendliche Reihe

$$H_1^\delta \cdot m(\mathfrak{E}_{n_1}) + H_2^\delta \cdot m(\mathfrak{E}_{n}) + \cdots \tag{7}$$

konvergiert.

Wenn $n < n_{k+1}$ ist, gilt

$$|F_n(x)| \leqq C\left(\frac{1}{1^\gamma} + \frac{1}{2^\gamma} + \cdots + \frac{1}{n_{k+1}^\gamma}\right) \leqq C\left(1 + \int_1^{n_{k+1}} \frac{dx}{x^\gamma}\right) \leqq \frac{C}{1-\gamma} n_{\lambda+1}^{1-\gamma};$$

dabei ist noch, was selbstverständlich geschehen kann, $\gamma < 1$ angenommen; denn ist unser Satz für einen gewissen Wert $\gamma = \gamma_0 > \frac{2}{3}$ bewiesen, so gilt er a fortiori für alle Exponenten $\gamma > \gamma_0$. Da

$$n_{k+1}^{1-\gamma} \leqq (2n_k)^{1-\gamma} < 2 \cdot n_k^{1-\gamma}$$

ist, darf in der Abschätzungsformel (6)

$$H_k = \frac{2C}{1-\gamma} \cdot n_k^{1-\gamma}$$

genommen werden. Geschieht dies, so ist zufolge der Ungleichung (4) die Konvergenz von (7) sichergestellt, falls die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k^{(1-\gamma)\delta - (2\gamma - 1)}$$

konvergiert. Wird

$$\lambda = (2\gamma - 1) - (1-\gamma)\delta$$

gesetzt, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß

$$\lambda + \gamma > 1 \tag{8}$$

ausfällt. Denn aus

$$\frac{n_{k+1} - n_k}{n_{k+1}^{\lambda+\gamma}} \leqq \sum_{m=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{m^{\lambda+\gamma}} \leqq \frac{n_{k+1} - n_k}{n_k^{\lambda+\gamma}},$$

$$n_{k+1} - n_k \leqq n_k^\gamma < n_{k+1} - n_k + 1$$

folgen die Ungleichungen

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\lambda+\gamma}} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k^\lambda} \leqq 2^{1+\lambda+\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\lambda+\gamma}}.$$

Die Bedingung (8) läßt sich in der Form schreiben

$$\gamma > \frac{2+\delta}{3+\delta}. \tag{9}$$

Da $\gamma > \frac{2}{3}$ ist, kann stets ein positiver Exponent $\delta \leqq 1$ gefunden werden, für den die Beziehung (9) erfüllt ist, z. B. $\delta = 3\gamma - 2$. Die Zahlenfolge

$$J_1^{(3\gamma-2)},\ J_2^{(3\gamma-2)},\ J_3^{(3\gamma-2)},\ \ldots$$

stellt sich demnach als beschränkt heraus, und *daraus folgt nach dem in* § 1 *entwickelten Hilfssatz, daß unter den gegenwärtigen Voraussetzungen* *diejenigen Werte x, für welche die Reihe der Zahlen $F_1(x)$, $F_2(x)$, $\cdots$ nicht beschränkt ist, eine Menge $\mathfrak{M}_0$ vom Maße 0 bilden.*

Um nicht nur die Beschränktheit, sondern auch die Existenz des Limes $\underset{n=\infty}{L} F_n(x)$ einzusehen, machen wir Gebrauch von der *Abelschen Transformation**). Wir setzen

$$\bar{c}_n = c_n \cdot n^{\frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{2}{3}\right)} = \frac{c_n}{\tau_n}.$$

Alsdann ist

$$|\bar{c}_n| \leqq \frac{C}{n^{\bar{\gamma}}},$$

wo $\bar{\gamma} = \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{2}{3}\right)$ ebenfalls noch größer als $\frac{2}{3}$ ist. Folglich gibt es, wenn wir das soeben gewonnene Resultat statt auf die Reihe mit den Koeffizienten c_n auf

$$\bar{c}_1 \cos x + \bar{c}_2 \cos 2x + \cdots$$

anwenden, eine Menge $\overline{\mathfrak{M}}_0 = \mathfrak{M}$ vom Maße 0 derart, daß, wenn x_0 irgend eine Zahl bedeutet, die $\mathfrak{M}$ nicht angehört, die Zahlen

$$\bar{F}_n(x_0) = \bar{c}_1 \cos x_0 + \bar{c}_2 \cos 2x_0 + \cdots + \bar{c}_n \cos nx_0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

sämtlich absolut unterhalb einer von n unabhängigen endlichen Grenze A bleiben. Die Abelsche Transformation liefert

$$F_n(x_0) = \tau_1 \cdot \bar{c}_1 \cos x_0 + \cdots + \tau_n \cdot \bar{c}_n \cos nx_0$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} (\tau_k - \tau_{k+1}) \bar{F}_k(x_0) + \tau_n \bar{F}_n(x_0).$$

Da nach Definition

$$\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \cdots, \qquad \underset{n=\infty}{L} \tau_n = 0$$

ist, folgt, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\tau_k - \tau_{k+1}) \bar{F}_k(x_0) = f(x_0)$$

absolut konvergiert, und es gilt

$$|F_n(x_0) - f(x_0)| < 2A\tau_n,$$

mithin

$$\underset{n=\infty}{L} F_n(x_0) = f(x_0).$$

Damit ist aber bewiesen, daß die Reihe

(10) $$c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \cdots$$

konvergiert außer für Werte x, die der oben definierten Menge $\mathfrak{M}$ angehören.

*) Vgl. Lebesgue, Leç. s. l. sér. trigonom., pag. 38 f.

Aus dem Gang des Beweises läßt sich noch schließen, daß zu einer beliebigen positiven Zahl ε eine im Intervall $0 \cdots 2\pi$ gelegene Menge $\mathfrak{N}_\varepsilon$ angegeben werden kann, deren Maß $2\pi - \varepsilon$ übersteigt und welche von solcher Art ist, daß im Gebiet $\mathfrak{N}_\varepsilon$ die Reihe (10) *gleichmäßig* konvergiert. Daraus folgt offenbar

$$\underset{n=\infty}{L} \int\limits_{\mathfrak{N}_\varepsilon} (f(x) - F_n(x))^2 \, dx = 0.$$

Da aber

$$\int\limits_{\mathfrak{N}_\varepsilon} (F(x) - F_n(x))^2 \, dx \leqq \frac{\pi C^2}{2\gamma - 1} n^{-(2\gamma - 1)}$$

ist, ergibt sich

$$\int\limits_{\mathfrak{N}_\varepsilon} (f(x) - F(x))^2 \, dx = 0.$$

Mithin besteht die Gleichung

$$f(x) = F(x)$$

im ganzen Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ mit Ausnahme einer Menge, die höchstens das Maß ε besitzt. Da aber ε beliebig angenommen werden kann, gilt jene Gleichung überall mit Ausnahme einer Menge in x vom Maße 0. Daraus folgt endlich

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} F(x) \cos nx \, dx = c_n.$$

Bezeichnen wir demnach den Wert der Reihe (10) *an den Stellen ihrer Konvergenz mit $f(x)$ und definieren $f(x)$ für die übrigen Werte durch $f(x) = 0$, so sind die $c_1, c_2, \cdots$ die sukzessiven Fourierkoeffizienten der Funktion $f(x)$* (falls die Integrale im Lebesgueschen Sinne genommen werden).

§ 3.

Reihen, die nach periodischen Funktionen fortschreiten.

In diesem Paragraphen sollen die Untersuchungen des vorigen dahin verallgemeinert werden, daß an Stelle der Funktion $\cos x$ eine stetige Funktion $\varphi(x)$ von der Periode 2π tritt, für die das Integral

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi(x) \, dx = 0$$

wird. *Wir nehmen dabei an, daß $\varphi(x)$ in eine trigonometrische Reihe entwickelbar sei:*

$$\varphi(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots, \tag{11}$$

und zwar so, daß für einen gewissen positiven Exponenten $\delta \leqq 1$ *die beiden Summen*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^\delta, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^\delta$$

konvergent sind. Die Reihe (11), durch welche $\varphi(x)$ dargestellt wird, konvergiert alsdann absolut und gleichmäßig im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$. Der Einfachheit halber setzen wir noch $\varphi(x)$ als eine gerade Funktion voraus, so daß aus der Entwicklung die sin-Glieder fortfallen.

Wir untersuchen jetzt die Konvergenz der Reihe

$$c_1 \varphi(1x) + c_2 \varphi(2x) + c_3 \varphi(3x) + \cdots, \tag{12}$$

in der die Koeffizienten c_n von solcher Art sind, daß eine positive Zahl C und ein Exponent $\gamma > \frac{2+\delta}{3+\delta}$ existieren, so daß für alle n

$$|c_n| \leqq \frac{C}{n^\gamma}$$

wird. Indem wir die Bezeichnungen einführen:

$$F_n(x) = c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \cdots + c_n \cos nx,$$

$$\varphi_n(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx,$$

$$G_{m,n}(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k F_n(kx) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_k c_i \cos(kix) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_m(ix)$$

und auf die $F_n(x)$ die im vorigen Paragraphen durchgeführten Überlegungen anwenden, erkennen wir aus dem zweiten der in § 1 bewiesenen Hilfssätze, daß *für jeden Wert x, der einer gewissen Menge $\mathfrak{M}_0$ vom Maße 0 nicht angehört, die doppelt unendliche Folge $G_{m,n}(x)$* $(m, n = 1, 2, 3, \cdots)$ *absolut unterhalb einer (von x abhängigen) endlichen Grenze liegt.* Der Unterschied gegenüber dem § 2 besteht jetzt nur darin, daß der Exponent δ nicht mehr beliebig gewählt werden kann, sondern so beschaffen sein muß, daß $\sum |a_k|^\delta$ konvergiert.

Um aus diesem Resultat die Konvergenz von (12) zu erschließen, machen wir wiederum Gebrauch von der Abelschen Transformation. Wir bestimmen zunächst, was leicht geschehen kann, eine Reihe positiver, abnehmender, gegen 0 konvergierender Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots$, so daß für die Zahlen

$$\bar{a}_n = \frac{a_n}{\sigma_n}$$

die unendliche Summe $\sum_{k=1}^{\infty} |\bar{a}_k|^\delta$ noch konvergiert*). Ferner setzen wir, analog wie in § 2,

$$\tau_n = n^{\frac{1}{2}\left(\frac{2+\delta}{3+\delta} - \gamma\right)},$$

$$\bar{c}_n = \frac{c_n}{\tau_n}.$$

Mit Bezug auf die Zahlen

$$\bar{G}_{m,n}(x) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_k \bar{c}_i \cos(kix)$$

gilt dann der Satz, daß diejenigen Werte x, für welche unter den Zahlen $\bar{G}_{m,n}(x)$ $(m, n = 1, 2, 3, \cdots)$ beliebig große vorkommen, wiederum nur eine Menge $\mathfrak{M}$ vom Maße 0 bilden. Ist x_0 ein bestimmter Wert, der $\mathfrak{M}$ nicht angehört, so gibt es also eine Zahl A, so daß für alle m und n

$$|\bar{G}_{m,n}(x_0)| < A$$

ist. Doppelte Anwendung der Abelschen Transformation liefert

$$\begin{aligned} G_{m,n}(x_0) &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} [\sigma_k \cdot \tau_i \cdot \bar{a}_k \bar{c}_i \cos(kix_0)] \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} (\sigma_k - \sigma_{k+1})(\tau_i - \tau_{i+1}) \bar{G}_{k,i}(x_0) \\ &\quad + \sigma_m \sum_{i=1}^{n-1} (\tau_i - \tau_{i+1}) \bar{G}_{m,i}(x_0) + \tau_n \sum_{k=1}^{m-1} (\sigma_k - \sigma_{k+1}) \bar{G}_{k,n}(x_0) \\ &\qquad + \sigma_m \tau_n \bar{G}_{m,n}(x_0). \end{aligned}$$

---

*) Bedeutet A die Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^\delta$$

und setzt man

$$r_0 = 1, \quad r_n = 1 - \frac{1}{\mathsf{A}} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^\delta \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

so sind die obigen Bedingungen erfüllt, wenn man

$$\sigma_n = \left(\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}\right)^{\frac{1}{\delta}}$$

wählt, da dann offenbar

$$|\bar{a}_n|^\delta = \mathsf{A}\left[\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}\right]$$

und folglich

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\bar{a}_k|^\delta = \mathsf{A}$$

wird. Auch ist

$$\sigma_1 \geqq \sigma_2 \geqq \sigma_3 \geqq \cdots \quad \text{und} \quad \underset{n=\infty}{L} \sigma_n = 0.$$

Bezeichnet man den Wert der absolut konvergenten Reihe

$$\sum_{\substack{k=1,2,\cdots \\ i=1,2,\cdots}} (\sigma_k - \sigma_{k+1})(\tau_i - \tau_{i+1}) \overline{G}_{k,i}(x_0)$$

mit $g(x_0)$, so folgt hieraus

$$| G_{m,n}(x_0) - g(x_0) | < 2A(\sigma_1 \tau_n + \sigma_m \tau_1 - \sigma_m \tau_n),$$

mithin

$$\underset{\substack{m=\infty \\ n=\infty}}{L} G_{m,n}(x_0) = g(x_0).$$

Da aber

$$\underset{m=\infty}{L} G_{m,n}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi(i x_0)$$

existiert, ergibt sich hieraus insbesondere

$$c_1 \varphi(1 \cdot x_0) + c_2 \varphi(2 \cdot x_0) + \cdots = \underset{n=\infty}{L} \underset{m=\infty}{L} G_{m,n}(x_0) = g(x_0).$$

Das Resultat fassen wir in den folgenden Satz zusammen:

Theorem. *Ist $\varphi(x)$ eine stetige Funktion von der Periode 2π, welche in eine Fourierreihe ohne konstantes Glied*

$$\begin{aligned}\varphi(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots\end{aligned}$$

entwickelt werden kann, deren Koeffizienten von solcher Art sind, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{\delta}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^{\delta}$$

für einen Exponenten $\delta > 0$ und $\leqq 1$ konvergieren, so konvergiert eine Reihe

$$c_1 \varphi(1 \cdot x) + c_2 \varphi(2 \cdot x) + c_3 \varphi(3 \cdot x) + \cdots$$

für alle Werte x mit Ausnahme solcher, die einer gewissen Menge $\mathfrak{M}$ vom Maße 0 angehören, falls es eine Zahl $\gamma > \frac{2+\delta}{3+\delta}$ gibt, so daß $c_n \cdot n^{\gamma}$ für alle n absolut unterhalb einer endlichen Grenze liegt.

Wir erwähnen einige spezielle Fälle. Ist $\varphi(x)$ eine Funktion von der Periode 2π, für welche $\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx = 0$ ist, und

1) $\varphi(x)$ in eine absolut konvergente Fourierreihe entwickelbar, so ist die Bedingung unseres Theorems für $\delta = 1$ erfüllt, und demnach genügt zur Konvergenz der Reihe (12) die Voraussetzung $|c_n| \leqq \frac{C}{n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}}$ $(\varepsilon > 0)$;

2) $\varphi(x)$ ν-mal stetig differenzierbar $(\nu \geqq 1)$, so ist $\varphi(x)$ sicherlich in eine Fouriersche Reihe ohne konstantes Glied (deren Koeffizienten wieder a_n, b_n heißen mögen) entwickelbar, und es konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k^\nu a_k)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(k^\nu b_k)^2 = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu}\right)^2 dx.$$

Daraus schließen wir, daß auch

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^{\frac{2}{1+2\nu}+\varepsilon} \qquad \text{(für beliebiges } \varepsilon > 0)$$

konvergiert. Scheiden wir nämlich die Indizes k in zwei Klassen k', k'', so daß allgemein

$$|a_{k'}|^{\frac{2}{1+2\nu}} \leqq \frac{1}{k'}, \quad \text{hingegen} \quad |a_{k''}|^{\frac{2}{1+2\nu}} > \frac{1}{k''}$$

wird, so ist

$$\sum_{(k')}|a_{k'}|^{\frac{2}{1+2\nu}+\varepsilon} \leqq \sum_{(k')}\left(\frac{1}{k'}\right)^{1+\frac{(1+2\nu)\varepsilon}{2}}$$

konvergent, aber auch

$$\sum_{(k'')}|a_{k''}|^{\frac{2}{1+2\nu}+\varepsilon} = \sum_{(k'')}|a_{k''}|^{\varepsilon}\cdot|a_{k''}|^{2\left(1-\frac{2\nu}{1+2\nu}\right)} \leqq \sum_{(k'')}|a_{k''}|^{\varepsilon}\{a_{k''}(k'')^\nu\}^2.$$

Zur Konvergenz von (12) ist im gegenwärtigen Fall hinreichend, daß

$$|c_n| \leqq \frac{C}{n^{\gamma_\nu+\varepsilon}} \text{ wird, wo } \gamma_\nu = \frac{2+\frac{4}{2\nu}}{3+\frac{5}{2\nu}},\ \varepsilon > 0 \text{ ist; z. B.}$$

$$\gamma_1 = \frac{8}{11} = 0{,}727\cdots;\quad \gamma_2 = \frac{12}{17} = 0{,}705\cdots;\quad \gamma_3 = \frac{16}{23} = 0{,}695\cdots;\quad \text{usw.}$$

Weiß man, daß der ν^{te} Differentialquotient nicht nur stetig, sondern auch von beschränkter Schwankung ist, so erschließt man leicht die Ungleichung

$$|a_n| \leqq \frac{A_0}{n^{\nu+1}},$$

in der A_0 nicht von n abhängt. Die Konvergenzbedingung lautet

$$|c_n| \leqq \frac{C}{n^{\gamma_\nu^*+\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0),$$

wo

$$\gamma_\nu^* = \frac{2 + \frac{1}{\nu + 1}}{3 + \frac{1}{\nu + 1}}$$

ist, z. B.

$$\gamma_1^* = \frac{5}{7} = 0{,}714\cdots; \quad \gamma_2^* = \frac{7}{10} = 0{,}700\cdots; \quad \text{usw.};$$

3) $\varphi(x)$ beliebig oft differenzierbar, so genügt zur Konvergenz der Reihe (12), daß $|c_n| \leqq \frac{C}{n^{\frac{2}{3}+\varepsilon}}$ $(\varepsilon > 0)$ ist. In diesem letzten Fall erhalten wir also dasselbe Kriterium, das wir in § 2 für $\varphi(x) = \cos x$ abgeleitet hatten.