Singuläre Integralgleichungen.*)

Von

H. Weyl in Göttingen.

I. Teil.

Theorie der Integralgleichungen mit beschränktem Kern.

Von Herrn Hilbert ist als erstem zur Behandlung der Theorie der Integralgleichung**)

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt,$$

in welcher $f(s)$ und der „Kern" $K(s, t)$ gegebene Funktionen sind, die *Methode der unendlichvielen Variablen* mit großem Erfolg angewandt worden. Diese Methode ist aber, wie im folgenden gezeigt werden soll, keineswegs auf die von Hilbert in der fünften Mitteilung vorzugsweise untersuchten stetigen Kerne beschränkt, sondern führt auch in gewissen allgemeineren Fällen zu interessanten Ergebnissen. Es muß dazu zunächst an einige Tatsachen aus der Theorie der Bilinearformen mit unendlichvielen Variablen kurz erinnert werden.

Es sei jedem Paar natürlicher Zahlen p, q eine reelle Zahl a_{pq} zugeordnet. Existiert alsdann eine Zahl M, so daß für alle Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots$, die den Bedingungen

$$(1) \qquad (x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots \leqq 1, \qquad (y, y) \leqq 1$$

genügen, und für alle n der „Abschnitt"

$$[A(x, y)]_n = \sum_{\substack{p=1,2,\ldots,n \\ q=1,2,\ldots,n}} a_{pq}\, x_p\, y_q$$

---

*) Die vorliegende Arbeit ist eine teils verkürzte, teils durch Zusätze vermehrte Umarbeitung meiner Inauguraldissertation „Singuläre Integralgleichungen, mit besonderer Berücksichtigung des Fourierschen Integraltheorems" (Göttingen 1908).

**) D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 4. und 5. Mitteilung, Gött. Nachr. 1906.

dem absoluten Betrag nach unterhalb M bleibt, so existiert der Limes*)

$$\underset{n=\infty}{L}\,[A(x, y)]_n = A(x, y)$$

und stellt demnach eine im Gebiet (1) erklärte Funktion der unendlichvielen Variablen $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots$ dar. Diese Funktion wird die mittels der Koeffizienten a_{pq} gebildete *beschränkte Bilinearform*

$$A(x, y) = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q$$

genannt. Sind

$$A(x, y) = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q, \qquad B(x, y) = \sum_{(p,q)} b_{pq} x_p y_q$$

irgend zwei beschränkte Bilinearformen, so konvergiert für jedes p, q die Reihe

$$c_{pq} = a_{p1} b_{1q} + a_{p2} b_{2q} + \cdots$$

absolut, und die mit diesen Koeffizienten c_{pq} gebildete Bilinearform, die durch das Symbol $AB(x, y)$ bezeichnet und die *Faltung* der Formen A und B genannt werde, ist gleichfalls beschränkt.**) Es läßt sich zeigen, daß für alle gemäß den Ungleichungen (1) in Betracht kommenden Werte der Variablen $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots$ die Gleichung besteht***):

$$AB(x, y) = \sum_{(p)} [(a_{1p} x_1 + a_{2p} x_2 + \cdots)(b_{p1} y_1 + b_{p2} y_2 + \cdots)].$$

Da offenbar nach Definition, falls unter $E(x, y)$ die Form

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots$$

verstanden wird,

$$AE(x, y) = EA(x, y) = A(x, y)$$

ist, folgt daraus insbesondere, daß der Wert einer beschränkten Bilinearform durch reihen- oder kolonnenweise Summation berechnet werden kann:

$$A(x, y) = \sum_{(p)} \Big(\sum_{(q)} a_{pq} x_p y_q\Big) = \sum_{(q)} \Big(\sum_{(p)} a_{pq} x_p y_q\Big).$$

Der Beweis der angeführten Tatsachen stützt sich vor allem auf eine fundamentale Ungleichung, welche im wesentlichen besagt, daß aus den Ungleichungen (1)

$$\text{abs. } E(x, y) \leqq 1$$

folgt.

Ist

$$A(x, y) = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q$$

*) Hilbert, 4. Mitt., pag. 178.

**) l. c., pag. 179.

***) Vergl. meine Dissertation, pag. 7 f.

eine beschränkte Bilinearform, so soll unter $A'(x, y)$ die mit den Koeffizienten

$$a'_{pq} = a_{qp}$$

gebildete Bilinearform verstanden werden. Herr O. Toeplitz hat gezeigt*), daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine beschränkte Form $B(x, y)$ von der Art existiere, daß

$$AB(x, y) = (x, y)$$

wird, darin besteht, daß die Funktion $AA'(x, x)$, welche negativer Werte nicht fähig ist, für alle Werte der Variablen $x_1, x_2, \ldots$, deren Quadratsumme $(x, x) = 1$ ist, oberhalb einer von 0 verschiedenen positiven Zahl liegt.

Wir beabsichtigen jetzt, die Theorie der Integralgleichung

$$(2) \qquad f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_0^\infty K(s, t)\, \varphi(t)\, dt \qquad (s \geqq 0)$$

zu entwickeln, wenn für den Kern $K(s, t)$ die folgenden Annahmen gemacht werden:

1) $K(s, t)$ ist für $s \geqq 0$, $t \geqq 0$ im allgemeinen definiert und stetig; es gibt nämlich *in jedem endlichen Gebiet* der s, t-Ebene höchstens eine endliche Anzahl monotoner stetiger Kurvenstücke, die sich in endlichvielen Punkten schneiden, und eine endliche Anzahl isolierter Punkte, längs deren und in denen $K(s, t)$ nicht definiert oder doch nicht stetig ist. Dabei ist noch angenommen, daß die Abszissen ev. vorkommender zur t-Achse paralleler singulärer Geradenstücke sich im Endlichen nirgends häufen.

2) Die durch

$$\int_0^\infty (K(s, t))^2 dt = (k(s))^2, \qquad k(s) \geqq 0$$

erklärte Funktion $k(s)$ existiert und ist stetig außer für endlich- oder unendlichviele, jedenfalls aber *isolierte* singuläre Stellen $s = s_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Unter die s_i haben wir uns insbesondere die Abszissen der unter 1) erwähnten, zur t-Achse parallelen singulären Geradenstücke aufgenommen zu denken.

3) Ist dann $s_0 \geqq 0$ irgend ein Wert, der von allen $s_i (i = 1, 2, \ldots)$ verschieden ist, so trifft die Gerade $s = s_0$ die singulären Kurven und Punkte nur in isoliert liegenden Punkten $t = \tau_i$. Bezeichnet $E(\omega)$ die Gesamtheit der Punkte $t \geqq 0$, welche einer der folgenden Ungleichungen genügen

$$|t - \tau_i| \leqq \frac{1}{\omega}, \quad t \geqq \omega, \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

*) Gött. Nachr. 1907, Sitzung vom 23. Februar.

so ist wegen der Stetigkeit von $k(s)$ für $s = s_0$

$$\underset{\substack{s=s_0\\ \omega=\infty}}{L} \int\limits_{E(\omega)} (K(s,t))^2\,dt = 0,$$

und daraus erschließen wir die Limesgleichung

$$\underset{s=s_0}{L} \int\limits_0^\infty (K(s,t) - K(s_0,t))^2\,dt = 0,$$

welche mit Hilfe der sog. Schwarzschen Ungleichung

$$\left(\int\limits_0^\infty f(s)\,g(s)\,ds\right)^2 \leqq \int\limits_0^\infty (f(s))^2\,ds \cdot \int\limits_0^\infty (g(s))^2\,ds$$

ergibt, daß für jede stetige, im Intervall $0 \cdots \infty$ quadratisch integrierbare Funktion $v(t)$ das Integral

$$\int\limits_0^\infty K(s,t)\,v(t)\,dt$$

eine für $s \neq s_i$ stetige Funktion von s ist. Nehmen wir etwa an, daß

$$\int\limits_0^\infty (v(t))^2\,dt = 1$$

ist, so wird

$$\left|\int\limits_0^\infty K(s,t)\,v(t)\,dt\right| \leqq k(s).$$

Bezeichnet daher $u(s)$ eine stetige Funktion von der Art, daß das Integral

$$\int\limits_0^\infty k(s)|u(s)|\,ds$$

existiert, so konvergiert a fortiori

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty K(s,t)\,u(s)\,v(t)\,dt\,ds.$$

Die *dritte Annahme*, die wir in betreff des Kernes $K(s,t)$ machen wollen, ist dann die, daß *dieses zweifache Integral für alle stetigen Funktionen* $u(s)$, $v(s)$, *für welche*

$$\int\limits_0^\infty k(s)|u(s)|\,ds$$

existiert und

$$\int\limits_0^\infty (u(s))^2\,ds = \int\limits_0^\infty (v(s))^2\,ds = 1$$

ist, absolut unterhalb einer festen positiven Zahl M gelegen ist.

Ein Kern, der den drei soeben ausgesprochenen Voraussetzungen genügt, heiße ein *beschränkter Kern.*

Um die Integralgleichung (2) mit der Theorie der unendlichvielen Variablen in Zusammenhang zu bringen, bedienen wir uns nach dem Vorgange von Herrn Hilbert eines *vollständigen Systems orthogonaler Funktionen.* *)

Unter einem solchen System für das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ versteht man eine Reihe stetiger Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots$, welche

I. die *Orthogonalitätsrelationen*

$$\int_0^1 \varphi_p(x)\,\varphi_q(x)\,dx = \begin{matrix} 0 & (p \neq q) \\ 1 & (p = q) \end{matrix}$$
$$(p, q = 1, 2, 3, \ldots)$$

und

II. die *Vollständigkeitsrelation*

$$\int_0^1 u(x)\,v(x)\,dx = \sum_{(p)} \left[\int_0^1 u(x)\,\varphi_p(x)\,dx \int_0^1 v(x)\,\varphi_p(x)\,dx\right]$$

für jedes Paar stetiger Funktionen $u(x)$, $v(x)$ befriedigen. Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Zutreffen der Vollständigkeitsrelation ist (unter Voraussetzung von I) die, daß sich zu jeder stetigen Funktion $u(x)$ und jeder positiven Zahl ε eine endliche Anzahl von Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_m$ angeben läßt derart, daß

$$\int_0^1 (u(x) - c_1\varphi_1(x) - \cdots - c_m\varphi_m(x))^2 dx < \varepsilon$$

wird. Ist allgemeiner $u(x)$ eine Funktion, die stetig ist außer für endlichviele oder abzählbar-unendlichviele Werte der Unabhängigen x, die sich nur an der Stelle $x = 0$ häufen, existiert aber noch das Integral

$$\int_0^1 (u(x))^2 dx,$$

so läßt sich eine im ganzen Intervall stetige Funktion $u^*(x)$ angeben, für welche

$$\int_0^1 (u(x) - u^*(x))^2 dx < \varepsilon$$

ausfällt.**) Hieraus ist zu schließen, daß die Vollständigkeitsrelation II auch noch für je zwei Funktionen $u(x)$, $v(x)$ gelten wird, welche von der eben von $u(x)$ vorausgesetzten allgemeineren Beschaffenheit sind. Führen wir an Stelle von x durch die Substitution

$$(4) \qquad x = \frac{1}{t+1} \qquad (t \geqq 0)$$

*) Hilbert, 5. Mitt., pag. 442.

**) Vergl. meine Diss., pag. 14 f.

die Variable t ein und setzen

$$\frac{1}{t+1}\cdot\varphi_p\left(\frac{1}{t+1}\right)=\Phi_p(t),$$

so erhalten wir außer den Beziehungen

$$\text{I*.}\qquad \int_0^\infty \Phi_p(t)\,\Phi_q(t)\,dt=\delta_{pq}$$

[δ_{pq} bedeutet, wie im folgenden stets, 0, falls $p \neq q$, 1, falls $p=q$ ist] die Vollständigkeitsrelation

$$\text{II*.}\qquad \int_0^\infty u(t)\,v(t)\,dt=\sum_{(p)}\left[\int_0^\infty u(t)\,\Phi_p(t)\,dt\int_0^\infty v(t)\,\Phi_p(t)\,dt\right],$$

gültig für irgend zwei im allgemeinen stetige Funktionen $u(t)$, $v(t)$, die quadratisch integrierbar sind. Dabei wird unter einer *„im allgemeinen stetigen“* Funktion eine solche verstanden, die für alle Werte von t mit Ausnahme gewisser isoliert liegender Stellen stetig ist.

Wir behandeln jetzt die umgekehrte Frage, wann aus der Konvergenz der Summe

$$\sum_{(p)}\left(\int_0^1 u(x)\,\varphi_p(x)\,dx\right)^2$$

für eine gewisse, nicht überall stetige Funktion $u(x)$ die Existenz des Integrals $\int_0^1 (u(x))^2\,dx$ erschlossen werden kann. Zu diesem Zweck gehen wir aus von unendlichvielen, im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ stetigen Funktionen $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., die gestatten, durch Bildung endlicher Linearkombinationen

$$c_1 P_1(x)+c_2 P_2(x)+\cdots+c_m P_m(x)$$

mittels konstanter Koeffizienten $c_1, c_2, \cdots, c_m$ jede stetige Funktion*) gleichmäßig anzunähern (z. B. $P_p(x)=x^{p-1}$), und verstehen unter $\varrho(x)$ irgend eine stetige Funktion im Intervall $0\cdots 1$, die höchstens für $x=0$ verschwindet, für $x>0$ hingegen positiv ist, und deren Maximum mit P bezeichnet werde. Wir bestimmen dann die Koeffizienten γ_{11}, γ_{21}, γ_{22}; γ_{31}, γ_{32}, γ_{33}; ... sukzessive so, daß die Funktionen

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x)&=\varrho(x)\cdot\gamma_{11}P_1(x),\\
\varphi_2(x)&=\varrho(x)\left(\gamma_{21}P_1(x)+\gamma_{22}P_2(x)\right),\\
\varphi_3(x)&=\varrho(x)\left(\gamma_{31}P_1(x)+\gamma_{32}P_2(x)+\gamma_{33}P_3(x)\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

*) oder doch jede stetige Funktion, die in der Umgebung des Punktes $x=0$ identisch Null ist.

die Orthogonalitätsrelationen I erfüllen.*) Ist nun $u(x)$ eine für $x > 0$ stetige Funktion von der Art, daß $\int_0^1 \varrho(x)\,|u(x)|\,dx$ und mithin die Integrale $\int_0^1 u(x)\,\varphi_p(x)\,dx$ existieren, und konvergiert ferner

$$\Big(\int_0^1 u(x)\,\varphi_1(x)\,dx\Big)^2 + \Big(\int_0^1 u(x)\,\varphi_2(x)\,dx\Big)^2 + \cdots = H^2,$$

so, behaupte ich, ist $u(x)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ quadratisch integrierbar.

Seien ε, δ zwei positive Zahlen, so daß $\varepsilon + \delta < 1$. Wir setzen

$$\begin{aligned} u^*(x) &= 0 && (0 \leqq x < \varepsilon), \\ &= u\,(\varepsilon + \delta)\cdot\frac{x-\varepsilon}{\delta} && (\varepsilon \leqq x < \varepsilon + \delta), \\ &= u\,(x) && (\varepsilon + \delta \leqq x \leqq 1), \end{aligned}$$

bestimmen darauf zu der positiven Größe ζ die Zahl m und die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_m$ so, daß

$$\left|\frac{u^*(x)}{\varrho(x)} - c_1\,P_1(x) - \cdots - c_m\,P_m(x)\right| < \zeta$$

oder

$$|u^*(x) - \mathsf{Z}(x)| \leqq \zeta\,\varrho(x) \leqq \zeta\mathsf{P}$$

wird; hierin ist $\mathsf{Z}(x)$ eine endliche Linearkombination der $\varrho(x)\,P_p(x)$, also auch der $\varphi_p(x)$:

$$\mathsf{Z}(x) = \gamma_1\,\varphi_1(x) + \cdots + \gamma_m\,\varphi_m(x).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(x)\,\mathsf{Z}(x)\,dx &= \gamma_1 \int_0^1 u(x)\,\varphi_1(x)\,dx + \cdots + \gamma_m \int_0^1 u(x)\,\varphi_m(x)\,dx \\ &\leqq H\sqrt{\gamma_1^2 + \cdots + \gamma_m^2} = H\cdot\sqrt{\int_0^1 (\mathsf{Z}(x))^2\,dx}. \end{aligned} \tag{5}$$

Es gelten ferner die Ungleichungen

$$(u^*(x))^2 - (\mathsf{Z}(x))^2 < \zeta\mathsf{P}\,(2\,M(\varepsilon) + \zeta\mathsf{P}),$$

wo

$$M(\varepsilon) = \operatorname*{Max.}_{\varepsilon \leqq x \leqq 1} |u(x)|$$

gesetzt ist, und

$$\left|\int_0^1 u(x)\,u^*(x)\,dx - \int_0^1 u(x)\,\mathsf{Z}(x)\,dx\right| \leqq \zeta \int_0^1 \varrho(x)\,|u(x)|\,dx.$$

*) Vergl. z. B. Hilbert, 5. Mitt., pag. 444.

Führt man sie in (5) ein und läßt dann ζ gegen 0 konvergieren, ohne ε und δ zu ändern, so erhält man

$$(6) \qquad \int_0^1 u(x)\, u^*(x)\, dx \leqq H \sqrt{\int_0^1 (u^*(x))^2\, dx}.$$

Endlich ist

$$\left| \int_0^1 u(x)\, u^*(x)\, dx - \int_\varepsilon^1 (u(x))^2\, dx \right| \leqq 2\delta\, (M(\varepsilon))^2,$$

$$\left| \int_0^1 (u^*(x))^2\, dx - \int_\varepsilon^1 (u(x))^2\, dx \right| \leqq 2\delta\, (M(\varepsilon))^2.$$

Berücksichtigt man dies, so kann in (6) der Grenzübergang $L\delta = 0$ vollzogen werden, welcher

$$\int_\varepsilon^1 (u(x))^2\, dx \leqq H \sqrt{\int_\varepsilon^1 (u(x))^2\, dx}$$

ergibt. Diese letzte Relation zeigt die Konvergenz des Integrals $\int_0^1 (u(x))^2\, dx$, und zwar muß, da H^2 auf keinen Fall größer als $\int_0^1 (u(x))^2\, dx$ sein kann,

$$\int_0^1 (u(x))^2\, dx = H^2$$

werden. Damit ist zugleich die Vollständigkeit des Orthogonalsystems $\varphi_p(x)$ bewiesen.

Wir kehren nunmehr zu dem Intervall $0 \cdots \infty$ zurück, und es sei $k(t) \geqq 0$ irgend eine Funktion, die für alle Werte $t \geqq 0$ definiert und stetig ist. Es ist dann leicht, eine *stetige* Funktion

$$0 < k^*(t) \leqq \frac{1}{(t+1)^2}$$

zu konstruieren von der Art, daß das Integral

$$\int_0^\infty k^*(t)\, k(t)\, dt$$

konvergiert. Wir schreiben

$$\varrho(x) = \frac{1}{x} \cdot k^*\left(\frac{1}{x} - 1\right) \qquad \text{für } 0 < x \leqq 1,$$

$$\varrho(0) = 0;$$

alsdann ist $\varrho(x)$ für $x > 0$ positiv und stetig, auch für $x = 0$. Mit Hilfe dieser Funktion $\varrho(x)$ konstruieren wir, wie oben geschildert, das vollständige Orthogonalsystem $\varphi_p(x)$ und setzen darauf, indem wir die Substitution (4) ausüben,

$$\Phi_p(t) = x \cdot \varphi_p(x).$$

Ist dann $U(t)$ eine „im allgemeinen" stetige Funktion, zu der sich eine Zahl A so angeben läßt, daß

$$|U(t)| \leqq A k(t)$$

wird, so existiert offenbar $\int\limits_0^1 \varrho(x)\,|u(x)|\,dx$, wenn $u(x)$ durch

$$U(t) = x \cdot u(x)$$

definiert wird, und es ist demnach $\Phi_p(t)$ $(p = 1, 2, \ldots)$ ein vollständiges Orthogonalsystem von der Art, daß für jede Funktion $U(t)$ der soeben geschilderten Beschaffenheit aus der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{(p)} \Big(\int\limits_0^\infty U(t)\, \Phi_p(t)\, dt\Big)^2$$

auf die des Integrals $\int\limits_0^\infty (U(t))^2\, dt$ geschlossen werden kann. Außerdem existiert für jedes p das Integral

$$\int\limits_0^\infty k(t)\,|\Phi_p(t)|\,dt.$$

Ein solches Funktionensystem $\Phi_p(t)$ nennen wir, wenn es auf einen kurzen Ausdruck ankommt, *zu der Funktion $k(t)$ passend.* Ein zu $k(t)$ passendes Orthogonalsystem läßt sich auch immer dann finden, wenn $k(t)$ nicht überall, sondern nur „im allgemeinen" stetig ist.

Wir haben nunmehr die Vorbereitungen beendet, um die Theorie der Integralgleichungen mit beschränktem Kern aufnehmen zu können. Wir bedienen uns der früher benutzten Bezeichnungen, verstehen vor allem unter $k(s)$ die durch

$$\int\limits_0^\infty (K(s, t))^2\, dt = (k(s))^2, \qquad k(s) \geqq 0$$

definierte Funktion. Wegen der Voraussetzungen, die wir über diese gemacht haben, existiert ein vollständiges System orthogonaler Funktionen

$$\Phi_1(t), \quad \Phi_2(t), \ldots$$

für das Intervall $0 \ldots \infty$, *welches zu $k(t)$ paßt.* Wir zeigten oben, daß die Funktionen

$$K_p(s) = \int_0^\infty K(s,t)\,\Phi_p(t)\,dt$$

außer für $s = s_i$ stetig sind. Wenden wir die Vollständigkeitsrelation an, so kommt

$$\int_0^\infty (K(s,t))^2\,dt = (k(s))^2 = (K_1(s))^2 + (K_2(s))^2 + \cdots.$$

Es ist also

$$|K_q(s)| \leqq k(s) \qquad (q = 1, 2, \ldots),$$

und darum existiert für jedes Paar ganzer positiver Zahlen p, q

$$\int_0^\infty \Phi_p(s)\,K_q(s)\,ds = c_{pq}.$$

Sind $x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_n$ irgend $2n$ Zahlen, die den Ungleichungen

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqq 1, \qquad y_1^2 + \cdots + y_n^2 \leqq 1$$

genügen, und setzen wir

$$u(s) = x_1\Phi_1(s) + \cdots + x_n\Phi_n(s),$$
$$v(t) = y_1\Phi_1(t) + \cdots + y_n\Phi_n(t),$$

so ist

$$\int_0^\infty (u(s))^2\,ds \leqq 1, \qquad \int_0^\infty (v(s))^2\,ds \leqq 1,$$

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty K(s,t)\,u(s)\,v(t)\,dt\,ds = \sum_{\substack{p=1,\cdots,n\\ q=1,\cdots,n}} c_{pq}\,x_p\,y_q.$$

Aus der betreffs des Kernes $K(s,t)$ gemachten dritten Voraussetzung folgt demnach jetzt, daß die mit den Koeffizienten c_{pq} gebildete Bilinearform $C(x,y)$ beschränkt ist.

Bedeuten ferner $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ irgendwelche reelle Zahlen mit konvergenter Quadratsumme, so konvergiert die Reihe

$$\alpha_1 K_1(s) + \alpha_2 K_2(s) + \cdots = g(s)$$

und stellt eine für $s \neq s_i$ stetige Funktion dar, da der Rest der Reihe vom n^{ten} Term ab kleiner als

$$\sqrt{\alpha_n^2 + \alpha_{n+1}^2 + \cdots}\;k(s)$$

ausfällt. Es ist darum auch

$$\left|\int_0^\infty g(s)\,\Phi_p(s)\,ds - \sum_{q=1,\cdots,n} c_{pq}\,\alpha_q\right| \leqq \sqrt{\alpha_{n+1}^2 + \alpha_{n+2}^2 + \cdots}\int_0^\infty k(s)\,|\Phi_p(s)|\,ds,$$

folglich

$$\int_0^\infty g(s)\,\Phi_p(s)\,ds = c_{p1}\alpha_1 + c_{p2}\alpha_2 + \cdots;$$

mithin konvergiert die Reihe

$$\sum_{(p)}\left(\int_0^\infty g(s)\,\Phi_p(s)\,ds\right)^2 = C'C(\alpha,\alpha),$$

und da

$$|g(s)| \leqq \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots}\cdot k(s),$$

das Orthogonalsystem $\Phi_p(s)$ aber als ein zu der Funktion $k(s)$ passendes gewählt ist, konvergiert schließlich auch $\int_0^\infty (g(s))^2\,ds$. Insbesondere ist demnach für jede stetige Funktion $u(s)$, für die das Integral $\int_0^\infty (u(s))^2 ds$ konvergiert, $\int_0^\infty K(s,t)\,u(t)\,dt$ gleichfalls quadratisch integrierbar, und hieraus ist noch zu schließen, daß, wenn $K'(s,t)$ einen zweiten beschränkten Kern bedeutet, der aus K', K durch *Zusammensetzung* entstehende Kern

$$K'K(s,t) = \int_0^\infty K'(s,r)\,K(t,r)\,dr$$

wiederum beschränkt ist.

Um den Satz über die Auflösung der inhomogenen Integralgleichung, den wir zu beweisen gedenken, möglichst einfach aussprechen zu können, benutzen wir die folgende Bezeichnung. Wir sagen, die homogene Integralgleichung

$$\varphi(s) + \int_0^\infty K(t,s)\,\varphi(t)\,dt = 0$$

mit dem transponierten Kern $K(t,s)$ *gestatte eine näherungsweise Auflösung*, wenn eine Reihe stetiger Funktionen $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ... angegeben werden kann, so daß gleichmäßig für alle stetigen Funktionen $v(s)$, deren quadratisches Integral unterhalb 1 liegt,

$$\int_0^\infty \varphi_n(s)\,v(s)\,ds + \int_0^\infty\int_0^\infty K(t,s)\,\varphi_n(t)\,v(s)\,ds\,dt$$

mit wachsendem n gegen 0 konvergiert, ohne daß in demselben Sinne $\int_0^\infty \varphi_n(s)\,v(s)\,ds$ gegen 0 strebte.

Satz: *Für jede im allgemeinen stetige, quadratisch integrierbare Funktion $f(s)$ besitzt die Integralgleichung mit dem beschränkten Kern $K(s,t)$*

$$f(s) = \varphi(s) + \int_0^\infty K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

sicher dann eine Lösung $\varphi(s)$ von der gleichen Beschaffenheit, wenn die homogene transponierte Integralgleichung näherungsweise nicht auflösbar ist.

Beweis: Setzen wir

$$(x, y) + C(x, y) = A(x, y),$$

so gibt es eine positive Zahl m derart, daß identisch in den Variablen x_p

$$AA'(x, x) \geqq m \cdot (x, x) \tag{7}$$

wird. Denn andernfalls gäbe es zu jeder positiven Zahl ε endlichviele Werte $x_1^{(\varepsilon)}, x_2^{(\varepsilon)}, \cdots, x_n^{(\varepsilon)}$, so daß, wenn man noch $x_{n+1}^{(\varepsilon)} = x_{n+2}^{(\varepsilon)} = \cdots = 0$ setzte,

$$(x^{(\varepsilon)}, x^{(\varepsilon)}) = 1, \quad AA'(x^{(\varepsilon)}, x^{(\varepsilon)}) \leqq \varepsilon$$

und folglich identisch in y

$$|A'(x^{(\varepsilon)}, y)| \leqq \sqrt{\varepsilon \cdot (y, y)}$$

ausfiele. Bildeten wir dann die Funktion

$$\varphi_\varepsilon(s) = x_1^{(\varepsilon)} \Phi_1(s) + \cdots + x_n^{(\varepsilon)} \Phi_n(s),$$

so würde sich für alle stetigen Funktionen $v(s)$, deren quadratisches Integral 1 nicht übersteigt, die Ungleichung

$$\left| \int_0^\infty \varphi_\varepsilon(s)\, v(s)\, ds + \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty K(t, s)\, \varphi_\varepsilon(t)\, v(s)\, ds\, dt \right| \leqq \sqrt{\varepsilon}$$

ergeben — im Gegensatz zu unserer Voraussetzung. Nach dem Satze von Herrn Toeplitz existiert daher eine beschränkte Bilinearform $B(x, y)$, so daß

$$AB(x, y) = (x, y)$$

wird. Setzen wir in $B(x, y)$ speziell

$$x_p = K_p(s), \quad y_p = \int_0^\infty f(s)\, \Phi_p(s)\, ds = \alpha_p,$$

so geht eine Funktion hervor, die sich wegen des Satzes von der reihen- und kolonnenweisen Summation in der Form

$$\psi(s) = \beta_1 K_1(s) + \beta_2 K_2(s) + \cdots$$

schreiben läßt und welche danach im allgemeinen stetig und zudem im Intervall $0 \ldots \infty$ quadratisch integrierbar ist. Man findet

$$\int_0^\infty \psi(s)\, \Phi_p(s)\, ds = \sum_{(q)} c_{pq}\, \beta_q$$

und folglich

$$\int_0^\infty K(s,t)\,\psi(t)\,dt = \sum_{(p)} \sum_{(q)} c_{pq} K_p(s)\,\beta_q$$
$$= C(K(s),\,\beta) = CB(K(s),\,\alpha).$$

Daher wird

$$\psi(s) + \int_0^\infty K(s,t)\,\psi(t)\,dt = B(K(s),\alpha) + CB(K(s),\alpha)$$
$$= AB(K(s),\,\alpha) = (K(s),\,\alpha) = \int_0^\infty K(s,t)\,f(t)\,dt.$$

Führen wir die Funktion

$$\varphi(s) = f(s) - \psi(s)$$

ein, so gilt nach der letzten Gleichung

$$\psi(s) = \int_0^\infty K(s,t)\,\varphi(t)\,dt,$$

und damit erweist sich $\varphi(s)$ als Lösung der inhomogenen Gleichung. Diese Funktion ist in der Tat von der im Satze behaupteten Beschaffenheit.*)

Führen wir in die oben behandelte Integralgleichung einen Parameter λ ein, indem wir schreiben

(8) $$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_0^\infty K(s,t)\,\varphi(t)\,dt,$$

so erhebt sich die Frage, für welche Werte von λ der Fall eintritt, daß die zugehörige homogene, transponierte Integralgleichung eine näherungs-

---

*) Vergl. hierzu Hilbert, 5. Mitt., pag. 447 f. — Indem man die von E. Schmidt (Rendiconti di Palermo 1908, XXV, pag. 74) bewiesenen Sätze über Auflösbarkeit linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten heranzieht, erkennt man, daß *die betreffs des Kerns $K(s,t)$ gemachte dritte Annahme für die Gültigkeit des oben bewiesenen Satzes gänzlich entbehrt werden kann.* Denn unter Beibehaltung der im Text benutzten Bezeichnungen gewinnen wir aus

$$|K_1(s)\,K_1(t) + \cdots + K_n(s)\,K_n(t)| \leqq k(s)\,k(t)$$

durch Multiplikation mit $|\Phi_p(s)\,\Phi_p(t)|$ und Integration nach s und t die für alle Indices p, n gültige Ungleichung

$$\sum_{q=1}^{n} \left(\int_0^\infty K_q(s)\,\Phi_p(s)\,ds\right)^2 \leqq \left(\int_0^\infty k(s)\,|\Phi_p(s)|\,ds\right)^2,$$

und mithin konvergiert für jedes p die Quadratsumme

$$c_{p1}^2 + c_{p2}^2 + \cdots.$$

weise Lösung zuläßt — diese Werte λ bilden das *Spektrum* des Kerns $K(s, t)$ —, und weiter, ob sich Genaueres über das Verhalten der homogenen Gleichung für solche λ-Werte ausmachen läßt. Um darauf Antwort zu geben, machen wir noch die Annahme, daß *der beschränkte Kern $K(s, t)$ symmetrisch* sei, d. h. daß für alle Werte s, t, für die $K(s, t)$ definiert ist, $K(t, s) = K(s, t)$ ausfällt. Alsdann gilt auch für die Koeffizienten der zugehörigen Bilinearform c_{pq}, die wir von jetzt ab mit k_{pq} bezeichnen wollen, die Symmetriebedingung $k_{pq} = k_{qp}$, wie ich in meiner Dissertation ausführlich gezeigt habe.*) Sind $u(s)$, $v(s)$ irgend zwei im allgemeinen stetige Funktionen, die im Intervall $0 \ldots \infty$ quadratisch integrierbar sind, so ist, wie wir wissen, $\int\limits_0^\infty K(s, t) v(t) dt$ gleichfalls quadratisch integrierbar, und es wird daher, wenn wir

$$\int\limits_0^\infty u(s)\,\Phi_p(s)\,ds = x_p, \quad \int\limits_0^\infty v(s)\,\Phi_p(s)\,ds = y_p$$

setzen,

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty K(s, t)\,u(s)\,v(t)\,dt\,ds = \sum_{(p)} x_p \Big(\int\limits_0^\infty \sum_{(q)} y_q K_q(s) \cdot \Phi_p(s) ds\Big)$$
$$= \sum_{(p)} \sum_{(\;)} k_{pq}\, x_p\, y_q = K(x, y)\,.$$

Wandeln wir entsprechend das zweifache Integral, in anderer Reihenfolge der Integration genommen, um und benutzen den Satz von der reihen- und kolonnenweisen Summation, so erkennen wir:

Für einen beschränkten symmetrischen Kern existieren im Sinne der sukzessiven Integration die doppelten Integrale

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty K(s, t)\,u(s)\,v(t)\,dt\,ds = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty K(s, t)\,v(s)\,u(t)\,dt\,ds,$$

falls $u(s)$, $v(s)$ irgendwelche im allgemeinen stetige Funktionen bezeichnen, für die

$$\int\limits_0^\infty (u(s))^2 ds \leqq 1, \quad \int\limits_0^\infty (v(s))^2 ds \leqq 1$$

ist, und bleiben ihrem absoluten Betrage nach unterhalb einer festen, von der Wahl der Funktionen $u(s)$, $v(s)$ unabhängigen Grenze M.

Zu jeder symmetrischen beschränkten Bilinearform

$$K(x, y) = \sum_{(p,q)} k_{pq}\, x_p\, y_q$$

---

*) Diss., pag. 35 ff.

gehört eine beschränkte *quadratische Form* der unendlichvielen Variablen $x_1, x_2, \ldots$

$$K(x) = K(x, x) = \underset{n=\infty}{L} \sum_{\substack{p=1,2,\cdots,n \\ q=1,2,\cdots,n}} k_{pq} x_p x_q,$$

und umgekehrt erhält man aus $K(x)$ die Bilinearform zurück, indem man

$$K\left(\frac{x+y}{2}\right) - K\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

bildet („*Polarisation*"), wobei unter $K\left(\frac{x+y}{2}\right)$ der Wert der Form $K(\xi)$ für die Argumentwerte $\xi_p = \frac{x_p + y_p}{2}$ verstanden wird.

Um die Theorie der Integralgleichung (8) für Werte λ, die dem Spektrum angehören, behandeln zu können, müssen wir uns mit einigen, die Theorie der *orthogonalen Transformation einer quadratischen Form* betreffenden Resultaten bekannt machen.

Das System der linearen Formen

$$x_p' = o_{p1} x_1 + o_{p2} x_2 + \cdots \qquad (p = 1, 2, \cdots) \tag{9}$$

definiert eine orthogonale Substitution, falls für alle p, q

$$\sum_{r=1,2,\cdots} o_{pr} o_{qr} = \delta_{pq},$$

$$\sum_{r=1,2,\cdots} o_{rp} o_{rq} = \delta_{pq}$$

gilt. Sind dann umgekehrt x_p' irgendwelche Zahlen, deren Quadratsumme $\leqq 1$ ist, so genügen die aus

$$x_p = o_{1p} x_1' + o_{2p} x_2' + \cdots$$

berechneten Zahlen x_p den Gleichungen (9). Ferner folgt aus der Definition, daß

$$x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots = x_1^2 + x_2^2 + \cdots$$

ist, zunächst identisch in $x_1, x_2, \ldots x_n$, falls $x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = 0$ gesetzt wird, dann aber auch, wie leicht zu sehen, für alle Werte $x_1, x_2, \ldots,$ die dem Bereich $(x, x) \leqq 1$ angehören, (auf welchen die unendlichvielen Variablen stets beschränkt bleiben sollen,) oder noch allgemeiner

$$(x', y') = (x, y),$$

falls die y_p' durch dieselbe Transformation (9) aus den y_p hervorgehen.

Ist $u(x)$ eine stetige Funktion im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$, $f(x)$ eine stetige Funktion von beschränkter Schwankung, und teilen wir das Intervall $0 \ldots 1$ durch die Punkte $x_0 = 0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = 1$ irgendwie in n Teilintervalle, bezeichnen ferner mit $\Delta_i f$ die Differenz der Funktion $f(x)$ im $(i+1)^{\text{ten}}$ Intervall,

$$\Delta_i f = f(x_{i+1}) - f(x_i),$$

mit ε die Länge des größten unter jenen Teilintervallen, so existiert der Limes

$$\underset{\varepsilon=0}{L}\Big[\sum_{i=0,1,\cdots,n-1} u(x_i)\,\Delta_i f\Big],$$

den wir als Verallgemeinerung des gewöhnlichen Integralbegriffs mit $\int\limits_0^1 u(x)\,df(x)$ bezeichnen werden.

Verstehen wir weiter mit Herrn Hellinger*) unter $f(x)$, $f_1(x)$ stetige Funktionen und unter $g(x)$ eine stetige, monoton wachsende**) Funktion im Intervall $0\ldots1$, die von der Beschaffenheit sind, daß es zwei stetige, monoton wachsende Funktionen $h(x)$, $h_1(x)$ gibt, welche für jedes Teilintervall von $0\ldots1$ die Ungleichungen

$$(\Delta f)^2 \leqq \Delta g\cdot\Delta h$$
$$(\Delta f_1)^2 \leqq \Delta g\cdot\Delta h_1$$

befriedigen [unter Δf usw. die Differenz der Funktion $f(x)$ für jenes Intervall verstanden], so existiert in demselben Sinne wie oben der Grenzwert***)

$$\underset{\varepsilon=0}{L}\sum_{i=0,1,\cdots,n-1}\frac{\Delta_i f\cdot\Delta_i f_1}{\Delta_i g} = \int\limits_0^1 \frac{df\,df_1}{dg}.$$

Die Übertragung der beiden auseinandergesetzten Integralbegriffe auf ein unendliches Intervall geschieht wie bei dem gewöhnlichen Integral.

Nun sei $\varrho(\mu)$ eine für alle reellen μ definierte stetige, monoton wachsende Funktion, die in der Umgebung der Stelle $\mu=0$ konstant ist, $\varrho_1(\mu)$, $\varrho_2(\mu)$, ... stetige Funktionen, die (in allen Intervallen, in denen sich $\varrho(\mu)$ nicht ändert, gleichfalls konstant bleiben und) den Bedingungen

$$(10)\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varrho_p(\mu)\,d\varrho_q(\mu)}{d\varrho(\mu)} = \delta_{pq}$$

genügen, ferner

$$\varrho(0) = \varrho_1(0) = \varrho_2(0) = \cdots = 0:$$

alsdann sagen wir mit Herrn Hellinger, die Funktionen $\varrho_1(\mu)$, $\varrho_2(\mu)$, ...

*) Hellinger, Orthogonalinvarianten quadratischer Formen usw., Inaugural-dissertation (Göttingen 1907), pag. 25 ff.

**) Durch diesen Ausdruck soll ein streckenweises Konstantbleiben von $g(x)$ nicht ausgeschlossen werden.

***) Ist $\Delta_i g = 0$, so gilt auch $\Delta_i f = \Delta_i f_1 = 0$; unter $\dfrac{\Delta_i f\cdot\Delta_i f_1}{\Delta_i g}$ soll alsdann 0 verstanden werden.

definierten *ein differentielles Orthogonalsystem mit der Basis* $\varrho(\mu)$. Dasselbe heißt *vollständig*, wenn für irgend zwei stetige Funktionen $f(\mu)$, $g(\mu)$, für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(d f(\mu))^2}{d\varrho(\mu)}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(d g(\mu))^2}{d\varrho(\mu)}$$

existieren, die Vollständigkeitsrelation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df\, dg}{d\varrho} = \sum_{(p)} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df\, d\varrho_p}{d\varrho} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dg\, d\varrho_p}{d\varrho} \right]$$

gilt. Insbesondere ist dann für stetige Funktionen $u(\mu)$, $v(\mu)$, für welche die Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (u(\mu))^2 d\varrho(\mu), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (v(\mu))^2 d\varrho(\mu)$$

konvergieren,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(\mu) v(\mu) d\varrho(\mu) = \sum_{(p)} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\mu)\, d\varrho_p(\mu) \int_{-\infty}^{+\infty} v(\mu)\, d\varrho_p(\mu)$$

also beispielsweise

$$(\varrho_1(\mu))^2 + (\varrho_2(\mu))^2 + \cdots = |\varrho(\mu)|.$$

Wegen (10) ist identisch in $x_1, \ldots x_n$, falls man $x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = 0$ setzt,

$$(11) \qquad (x, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(d \sum_{(p)} \varrho_p(\mu) x_p)^2}{d\varrho(\mu)}.$$

Herr Hellinger hat aber gezeigt*), daß, wenn $x_1, x_2, \ldots$ irgendwelche Werte mit konvergenter Quadratsumme sind, $\sum_{(p)} \varrho_p(\mu) x_p$ eine stetige Funktion von μ *von beschränkter Schwankung* wird, und daß auch für solche Werte der Variablen x die Gleichung (11) erfüllt bleibt, und wiederum allgemeiner

$$(11') \qquad (x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d X(\mu)\, d Y(\mu)}{d\varrho(\mu)},$$

falls

$$X(\mu) = \sum_{(p)} \varrho_p(\mu) x_p, \qquad Y(\mu) = \sum_{(p)} \varrho_p(\mu) y_p$$

gesetzt wird.

Da $\varrho(\mu)$ in der Umgebung von $\mu = 0$ konstant bleibt, können wir bilden

*) l. c. pag. 56 f. und pag. 27.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\int_0^\mu \frac{d\varrho_p(\nu)}{\nu} \cdot d\varrho_q(\mu)}{d\varrho(\mu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_p(\mu) \cdot d\int_0^\mu \frac{d\varrho_q(\nu)}{\nu}}{d\varrho(\mu)}.$$

Diese Integrale, die wir kürzer durch $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_p\, d\varrho_q}{\mu\, d\varrho}$ bezeichnen, verwenden wir in der folgenden Weise zur Bildung einer, wie man leicht sieht, *beschränkten* quadratischen Form $K_0(x)$ der unendlichvielen Variablen $x_1, x_2, \ldots$:

$$K_0(x) = \sum_{(p,q)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_p\, d\varrho_q}{\mu\, d\varrho} \cdot x_p x_q.$$

Die auf solche Art aus dem vollständigen differentiellen Orthogonalsystem $\varrho_p(\mu)$ mit der Basis $\varrho(\mu)$ gewonnene Form möge eine *Elementarform* genannt werden.

Der durch die Entwicklungen von Hilbert und Hellinger bewiesene Satz über die orthogonale Transformation ist nun dieser*). Ist $K(x)$ irgend eine beschränkte quadratische Form, so gibt es eine orthogonale Transformation, welche an Stelle der Variablen x_p die Variablen x'_p, x''_p; $x_p^{(1)}$, $x_p^{(2)}$, $x_p^{(3)}$, ... substituiert:

$$x'_p = \sum_{(q)} l'_{pq} x_q, \qquad x''_p = \sum_{(q)} l''_{pq} x_q,$$

$$x_p^{(h)} = \sum_{(q)} l_{pq}^{(h)} x_q \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$[p = 1, 2, \ldots]$$

und durch die $K(x)$ in die folgende Form gebracht wird:

$$K(x) = \sum_{(p)} \frac{x'^2_p}{\lambda_p} + \sum_{(h)} K^{(h)}(x^{(h)}).$$

Dabei sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ gewisse von 0 verschiedene Zahlen, die sogenannten *Eigenwerte*, welche das *Punktspektrum* der quadratischen Form ausmachen, jede der Formen $K^{(h)}(x^{(h)})$ aber eine Elementarform der Variablen $x_p^{(h)}$:

$$K^{(h)}(x^{(h)}) = \sum_{(p,q)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_p^{(h)}(\mu)\, d\varrho_q^{(h)}(\mu)}{d\varrho^{(h)}(\mu)} x_p^{(h)} x_q^{(h)}.$$

Diejenigen Werte μ, in deren Umgebung irgend eine der Basisfunktionen $\varrho^{(h)}(\mu)$ nicht konstant ist, bilden das *Streckenspektrum* von $K(x)$. Dem oben

*) Hilbert, 4. Mitt., pag. 198; Hellinger, Diss., pag. 60

definierten Spektrum gehören dann das Streckenspektrum, das Punktspektrum und die Häufungspunkte des Punktspektrums an.

Wir kehren zu dem Kern $K(s, t)$ zurück und nehmen zunächst der Einfachheit halber an, daß die aus ihm berechnete quadratische Form $K(x)$ von solcher Art ist, daß sie durch eine orthogonale Transformation der Variabeln x_p in die Variablen x'_p, ξ_p in eine Elementarform $K^*(\xi)$ der ξ_p umgewandelt wird:

$$x'_p = m_{p1}x_1 + m_{p2}x_2 + \cdots,$$
$$\xi_p = l_{p1}x_1 + l_{p2}x_2 + \cdots,$$

$$K(x) = K^*(\xi) = \sum_{(p,q)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_p(\mu)\, d\varrho_q(\mu)}{\mu\, d\varrho(\mu)} \xi_p \xi_q. \tag{12}$$

Die $\varrho_p(\mu)$ definieren ein vollständiges differentielles Orthogonalsystem mit der Basis $\varrho(\mu)$, die m_{pq} und l_{pq} genügen den Bedingungen

$$\sum_{(r)} m_{pr}m_{qr} = \sum_{(r)} l_{pr}l_{qr} = \sum_{(r)} m_{rp}m_{rq} + \sum_{(r)} l_{rp}l_{rq} = \delta_{pq}, \tag{13}$$
$$\sum_{(r)} m_{pr}l_{qr} = 0.$$

Indem wir die früheren Bezeichnungen wieder aufnehmen, setzen wir

$$k'_p(s) = x'_p(K(s)) = m_{p1}K_1(s) + m_{p2}K_2(s) + \cdots,$$
$$k_p(s) = \xi_p(K(s)) = l_{p1}K_1(s) + l_{p2}K_2(s) + \cdots.$$

Diese Funktionen sind im allgemeinen stetig, und es ist

$$\sum_{(p)} (k_p(s))^2 + \sum_{(p)} (k'_p(s))^2 = \sum_{(p)} (K_p(s))^2. \tag{14}$$

Die $k'_p(s)$, $k_p(s)$ definierenden unendlichen Reihen dürfen nach Multiplikation mit $\Phi_q(s)$ gliedweise integriert werden: so ergibt sich

$$\int_0^\infty k'_p(s)\Phi_q(s)\,ds = m_{p1}k_{q1} + m_{p2}k_{q2} + \cdots,$$

$$\int_0^\infty k_p(s)\Phi_q(s)\,ds = l_{p1}k_{q1} + l_{p2}k_{q2} + \cdots.$$

Hieraus gewinnen wir mittels der Beziehungen (12) und (13) (unter Zuhilfenahme des Satzes von der kolonnen- und reihenweisen Summation quadratischer Formen) die Gleichungen:

$$\int_0^\infty k_p'(s)\,\Phi_q(s)\,ds = 0,$$

$$\int_0^\infty k_p(s)\,\Phi_q(s)\,ds = \sum_{(r)} l_{rq} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_p\,d\varrho_r}{\mu\,d\varrho}.$$

Da nach früheren Auseinandersetzungen die Integrale $\int_0^\infty (k_p'(s))^2\,ds$, $\int_0^\infty (k_p(s))^2\,ds$ existieren, folgt aus diesen Rechnungen

$$k_p'(s) = 0, \tag{15}$$

$$\int_0^\infty (k_p(s))^2\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(d\varrho_p)^2}{\mu^2\,d\varrho}.$$

Wir führen ferner die Funktionen

$$\mathsf{A}(s;\lambda) = k_1(s)\int_0^\lambda \mu\,d\varrho_1(\mu) + k_2(s)\int_0^\lambda \mu\,d\varrho_2(\mu) + \cdots,$$

$$\mathsf{B}(s;\lambda) = k_1(s)\,\varrho_1(\lambda) + k_2(s)\,\varrho_2(\lambda) + \cdots$$

ein. Diese beiden Funktionen sind für jedes Wertepaar (s,λ), falls $s \neq s_i$ ist, stetige Funktionen; es existieren die Integrale $\int_0^\infty (\mathsf{A}(s;\lambda))^2\,ds$, $\int_0^\infty (\mathsf{B}(s;\lambda))^2\,ds$. Als Funktionen von λ sind A und B nach den Hellingerschen Resultaten von beschränkter Schwankung, und es existiert außerdem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(d_\mu \mathsf{B}(s;\mu))^2}{d\varrho(\mu)} = \sum_{(p)} (k_p(s))^2.$$

Die letzte Summe stimmt aber wegen (14) und (15) mit

$$\sum_{(p)} (K_p'(s))^2 = KK(s,s)$$

überein, und es gilt infolgedessen etwas allgemeiner

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d_\mu \mathsf{B}(s;\mu)\,d_\mu \mathsf{B}(t;\mu)}{d\varrho(\mu)} = KK(s,t). \tag{16}$$

Die Funktionen $\mathsf{A}(s;\lambda)$ und $\mathsf{B}(s;\lambda)$ stehen in einem einfachen Zusammenhang miteinander. Es ist nämlich

$$\int_0^\lambda \mu\,d\varrho_p(\mu) = \lambda\,\varrho_p(\lambda) - \int_0^\lambda \varrho_p(\mu)\,d\mu,$$

und folglich, da die Reihe

$$k_1(s)\,\varrho_1(\mu) + k_2(s)\,\varrho_2(\mu) + \cdots = \mathsf{B}(s;\mu)$$

für einen Wert $s \neq s_i$ gleichmäßig im Intervall $0 \leqq \mu \leqq \lambda$ konvergiert,

$$\mathsf{A}(s;\lambda) = \lambda\,\mathsf{B}(s;\lambda) - \int_0^\lambda \mathsf{B}(s;\mu)\,d\mu.$$

Diese Gleichung, die sich auch in der Form

$$(17) \qquad \mathsf{A}(s;\lambda) = \int_0^\lambda \mu\, d_\mu \mathsf{B}(s;\mu)$$

schreiben läßt, hat zur Folge, daß sich für irgend eine stetige Funktion $f(\mu)$, für welche $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(df)^2}{d\varrho}$ existiert,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,\mathsf{B}(s;\mu)\,df(\mu)}{d\varrho(\mu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,\mathsf{A}(s;\mu)\,df(\mu)}{\mu\,d\varrho(\mu)}$$

und auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(d_\mu \mathsf{B}(s;\mu))^2}{d\varrho(\mu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(d_\mu \mathsf{A}(s;\mu))^2}{\mu^2 d\varrho(\mu)}$$

ergibt. (16) verwandelt sich demnach in

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathsf{A}(s;\mu)\,d\mathsf{A}(t;\mu)}{\mu^2 d\varrho(\mu)} = KK(s,t).$$

Die Fourierkoeffizienten der Funktion $\mathsf{A}(s;\lambda)$ nach der Variabeln s dürfen durch gliedweise Integration berechnet werden; es ergibt sich so

$$\int_0^\infty \mathsf{A}(s;\lambda)\,\Phi_p(s)\,ds = \sum_{(q)}\sum_{(r)} \left[\int_0^\lambda \mu\, d\varrho_q(\mu)\cdot l_{rp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_q\, d\varrho_r}{\mu\, d\varrho}\right].$$

Durch Summationsvertauschung und wegen der Vollständigkeit der $\varrho_p(\mu)$ findet man

$$(18) \qquad \int_0^\infty \mathsf{A}(s;\lambda)\,\Phi_p(s)\,ds = \sum_{(q)} l_{qp}\varrho_q(\lambda).$$

Wir schließen hieraus noch

$$(19) \qquad \int_0^\infty (\mathsf{A}(s;\lambda))^2 ds = (\varrho_1(\lambda))^2 + (\varrho_2(\lambda))^2 + \cdots \doteq |\varrho(\lambda)|,$$

weiter aber

$$\int_0^\infty K(s,t)\,\mathsf{A}(t;\lambda)\,dt = \sum_{(p)}\sum_{(q)} l_{qp}\varrho_q(\lambda)K_p(s)$$
$$= \sum_{(q)}\sum_{(p)} \varrho_q(\lambda) l_{qp} K_p(s) = \sum_{(q)} \varrho_q(\lambda)\,k_q(s) = \mathsf{B}(s;\lambda).$$

Benutzen wir (17), so ergibt sich

$$\text{(20)} \qquad \Delta_\lambda \mathsf{A}(s;\lambda) - \int_{(\Delta_\lambda)} \mu \cdot d_\mu \int_0^\infty K(s,t)\,\mathsf{A}(t;\mu)\,dt = 0.$$

Enthält das Intervall, auf welches sich das Differenzsymbol Δ_λ bezieht, und das auch selbst kurz mit Δ_λ bezeichnet werde, Teile des Streckenspektrums von $K(x)$, so ist, wie (19) zeigt, $\Delta_\lambda \mathsf{A}(s;\lambda)$ nicht identisch in s gleich Null. Den Inhalt der Gleichung (20) dürfen wir also dahin aussprechen, daß sich für einen Wert λ, der dem Streckenspektrum angehört, das *„in s nicht identisch verschwindende Differential“* $d_\lambda \mathsf{A}(s;\lambda)$ *als eine Lösung der homogenen Gleichung ergibt.* Dieselbe hat hingegen für keinen Wert von λ eine *eigentliche* Lösung, d. h. es gibt keine im allgemeinen stetige, quadratisch integrierbare Funktion $\varphi(s)$, für welche

$$\varphi(s) - \lambda \int_0^\infty K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = 0$$

wird. Denn dies würde eine Lösung $x_1, x_2, \ldots$ mit konvergenter Quadratsumme der unendlich vielen linearen Gleichungen

$$x_p - \lambda \sum_{(q)} k_{pq} x_q = 0$$
$$(p = 1, 2, \ldots)$$

zur Folge haben, und eine solche existiert nach Hilbert*) nur für Werte λ, die dem Punktspektrum der quadratischen Form $K(x)$ angehören. Ein Punktspektrum ist aber in unserm Fall überhaupt nicht vorhanden.

Bezeichnet jetzt $g(s)$ eine beliebige im allgemeinen stetige, quadratisch integrierbare Funktion, so hat

$$f(s) = \int_0^\infty K(s,t)\,g(t)\,dt$$

den gleichen Charakter, und es ist nach dem allgemeinen Satz auf S. 286:

$$\int_0^\infty \mathsf{A}(s;\lambda) f(s)\,ds = \int_0^\infty \mathsf{B}(s;\lambda)\,g(s)\,ds.$$

*) Hilbert, 4. Mitt., pag. 199.

Wir setzen

$$\int_0^\infty g(s)\,\Phi_p(s)\,ds = \bar{a}_p,$$

$$l_{p1}\bar{a}_1 + l_{p2}\bar{a}_2 + \cdots = a_p.$$

Da entsprechend der Formel (18)

$$\sum_{(q)} l_{pq}\int_0^\infty \mathsf{B}(s;\lambda)\,\Phi_q(s)\,ds = \int_0^\lambda \frac{d\varrho_p(\mu)}{\mu},$$

$$\sum_{(q)} m_{pq}\int_0^\infty \mathsf{B}(s;\lambda)\,\Phi_q(s)\,ds = 0$$

wird, folgt

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathsf{B}(s;\lambda)\,g(s)\,ds &= \sum_{(p)} \bar{a}_p\int_0^\infty \mathsf{B}(s;\lambda)\,\Phi_p(s)\,ds\\ &= \sum_{(p)}\Big\{\sum_{(q)} l_{pq}\bar{a}_q\cdot\sum_{(q)} l_{pq}\int_0^\infty \mathsf{B}(s;\lambda)\,\Phi_q(s)\,ds\Big\}\\ &+\sum_{(p)}\Big\{\sum_{(q)} m_{pq}\bar{a}_q\cdot\sum_{(q)} m_{pq}\int_0^\infty \mathsf{B}(s;\lambda)\,\Phi_q(s)\,ds\Big\} = \sum_{(p)} a_p\int_0^\lambda \frac{d\varrho_p(\mu)}{\mu}.\end{aligned}$$

Setzen wir nun in der Beziehung (11′)

$$x_p = a_p, \qquad y_p = k_p(s),$$

so wird

$$X(\lambda) = a_1\varrho_1(\lambda) + a_2\varrho_2(\lambda) + \cdots,$$
$$Y(\lambda) = \mathsf{B}(s;\lambda),$$

mithin

$$\Delta X(\lambda) = \int_{(\Delta)} \mu\cdot d_\mu\int_0^\infty \mathsf{A}(s;\mu)\,f(s)\,ds.$$

Da aber

$$a_1k_1(s) + a_2k_2(s) + \cdots = f(s)$$

wird, geht (11′) über in

$$(21)\qquad f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d_\mu \mathsf{B}(s;\mu)\,d X(\mu)}{d\varrho(\mu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu\frac{d\mathsf{B}(s;\mu)\cdot d\int_0^\infty \mathsf{A}(t;\mu)\,f(t)\,dt}{d\varrho(\mu)}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d_\mu \mathsf{A}(s;\mu)\cdot d_\mu\int_0^\infty \mathsf{A}(t;\mu)\,f(t)\,dt}{d\varrho(\mu)}.$$

Diese Integraldarstellung, welche eine Verallgemeinerung des gewöhnlichen Fourierschen Integraltheorems ist, gilt demnach für jede Funktion $f(s)$, *die sich in der Form* $\int_0^\infty K(s,t)\,g(t)\,dt$ *mittels einer beliebigen, im allgemeinen stetigen, quadratisch integrierbaren Funktion* $g(s)$ *darstellen läßt.*

Wir erwähnen noch die folgende leicht zu beweisende Eigenschaft der Funktion $\mathsf{A}(s;\lambda)$. Für irgend zwei stetige Funktionen $f(\mu)$, $g(\mu)$, für die $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(df)^2}{d\varrho}$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(dg)^2}{d\varrho}$ existieren, gilt, falls

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{df(\mu)\cdot d_\mu \mathsf{A}(s;\mu)}{\mu\, d\varrho(\mu)} = \varphi(s), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dg(\mu)\cdot d_\mu \mathsf{A}(s;\mu)}{\mu\, d\varrho(\mu)} = \psi(s)$$

gesetzt wird, die „Orthogonalitätsrelation"

$$\int_0^\infty \varphi(s)\,\psi(s)\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{df(\mu)\cdot dg(\mu)}{\mu^2\, d\varrho(\mu)}. \tag{22}$$

Wir gehen jetzt auf die Frage ein, wieweit das Streckenspektrum und die Funktion $\mathsf{A}(s;\lambda)$ durch den Kern $K(s,t)$ bestimmt sind. Es sei μ_0 irgend ein Wert, welcher dem Streckenspektrum nicht angehört; da das Streckenspektrum abgeschlossen ist, können wir dann ein Intervall $\mathfrak{i}$ der Variablen μ

$$|\mu-\mu_0|\leqq h$$

angeben, das gleichfalls einschließlich seiner Endpunkte außerhalb des Streckenspektrums gelegen ist. Es liege ferner eine für alle $s\geqq 0$ und alle μ des Intervalls $\mathfrak{i}$ definierte Funktion $\mathsf{A}^*(s;\mu)$ vor, welche stetig in (s,μ) ist, falls $s \neq s_i$, und von solcher Art, daß $\int_0^\infty (\mathsf{A}^*(s;\mu))^2\,ds$ konvergiert und eine stetige Funktion von μ vorstellt. Endlich sei für jedes Teilintervall Δ_μ von $\mathfrak{i}$

$$\Delta_\mu \mathsf{A}^*(s;\mu) = \int_{(\Delta_\mu)} \nu\cdot d_\nu \int_0^\infty K(s,t)\,\mathsf{A}^*(t;\nu)\,dt.\,^{*)}$$

---

*) Dabei braucht nicht angenommen zu werden, daß $\mathsf{B}^*(s;\mu)$ in μ eine Funktion von beschränkter Schwankung ist, falls man nur dem Integral

$$\int_{(\Delta)} \nu\cdot d\mathsf{B}^*(s;\nu)$$

die aus (23) hervorgehende Bedeutung beilegt.

Aus den Voraussetzungen folgt, daß

$$\underset{\mu'=\mu}{L}\int_0^\infty (\mathsf{A}^*(s;\mu)-\mathsf{A}^*(s;\mu'))^2\,ds = 0$$

und daher auch

$$\mathsf{B}^*(s;\mu)=\int_0^\infty K(s,t)\,\mathsf{A}^*(t;\mu)\,dt$$

eine stetige Funktion von s und μ ist, falls $s \neq s_i$. Es gilt dann also

$$\Delta\mathsf{A}^*(s;\mu)=\Delta(\mu\mathsf{B}^*(s;\mu))-\int_{(\Delta)}\mathsf{B}^*(s;\nu)\,d\nu. \tag{23}$$

Bedeutet $f(s)$ irgend eine im allgemeinen stetige, quadratisch integrierbare Funktion, so ist leicht einzusehen, daß

$$\int_0^\infty\left(\int_{\mu_0}^{\mu}\mathsf{B}^*(s;\nu)\,d\nu\right)f(s)\,ds=\int_{\mu_0}^{\mu}\left(\int_0^\infty\mathsf{B}^*(s;\nu)f(s)\,ds\right)d\nu$$

wird, folglich

$$\left[\int_0^\infty\mathsf{A}^*(s;\mu)f(s)\,ds\right]_{\mu_0}^{\mu}=\left[\mu\cdot\int_0^\infty\mathsf{B}^*(s;\mu)f(s)\,ds\right]_{\mu_0}^{\mu}-\int_{\mu_0}^{\mu}d\nu\int_0^\infty\mathsf{B}^*(s;\nu)f(s)\,ds.$$

Es gilt aber nach früherem die Beziehung

$$\int_0^\infty\Delta_\mu\mathsf{A}^*(s;\mu)\cdot\Delta_\lambda\mathsf{B}(s;\lambda)\,ds=\int_0^\infty\Delta_\mu\mathsf{B}^*(s;\mu)\cdot\Delta_\lambda\mathsf{A}(s;\lambda)\,ds.$$

Wir wollen dabei unter Δ_μ ein Intervall $\mu_0\mu$ verstehen, das ganz in $\mathfrak{i}$ liegt, und ferner sei $\Delta_\lambda=(\lambda_0\lambda)$; hierin denken wir uns λ gleichfalls in einem Intervall $\mathfrak{i}'$: $|\lambda-\lambda_0|\leqq h'$ veränderlich, das von $\mathfrak{i}$ vollständig getrennt liegt. Indem wir dann

$$\int_0^\infty\Delta_\mu\mathsf{B}^*(s;\mu)\cdot\Delta_\lambda\mathsf{B}(s;\lambda)\,ds=V(\lambda,\mu)$$

schreiben, liefern die beiden letzten Gleichungen

$$(\mu-\lambda)\cdot V(\lambda,\mu)+\int_{\lambda_0}^{\lambda}V(\lambda,\mu)\,d\lambda=\int_{\mu_0}^{\mu}V(\lambda,\mu)\,d\mu.$$

Bezeichnet μ' einen Wert, den wir gegen μ konvergieren lassen, δ das Intervall $\mu\mu'$, bezw. das auf dieses Intervall sich beziehende Differenzsymbol, so kommt

$$(\mu-\lambda)\frac{\delta V}{\delta\mu}+\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{\delta V}{\delta\mu}\,d\lambda=V(\lambda,\mu^*)-V(\lambda,\mu'), \tag{24}$$

wenn wir unter μ^* einen (von λ abhängigen) Punkt des Intervalls $\mu\mu'$ verstehen. Es ist nun leicht einzusehen, daß zu einer beliebigen positiven Größe ε eine andere σ so bestimmt werden kann, daß für alle λ des Intervalls $\mathfrak{i}'$ und alle Werte μ_1, μ_2 des Intervalls $\mathfrak{i}$, die die Ungleichung $|\mu_1 - \mu_2| < \sigma$ erfüllen,

$$|V(\lambda, \mu_1) - V(\lambda, \mu_2)| < \varepsilon$$

wird. Wir wenden daher den folgenden Hilfssatz auf (24) an:

Ist $e(x)$ irgend eine stetige, durchaus positive Funktion im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$, $f_1(x), f_2(x), \cdots$ eine Folge stetiger Funktionen, für welche

$$\varepsilon_i(x) = e(x) f_i(x) + \int_0^x f_i(\xi)\, d\xi$$

mit wachsendem i gleichmäßig im Intervall $0 \cdots 1$ gegen 0 konvergiert, so konvergiert auch die Folge $f_1(x), f_2(x), \cdots$ gleichmäßig gegen 0.

So erschließen wir die Limesgleichung

$$\underset{\mu'=\mu}{L} \frac{\delta V}{\delta \mu} = 0, \quad \text{d. i.} \quad \frac{\partial V(\lambda, \mu)}{\partial \mu} = 0.$$

Da aber $V(\lambda, \mu_0) = 0$ ist, wird notwendig identisch in λ, μ für die in Betracht kommenden Bereiche

$$V(\lambda, \mu) = \int_0^\infty \Delta_\mu \mathsf{B}^*(s; \mu) \cdot \Delta_\lambda \mathsf{B}(s; \lambda)\, ds = 0,$$

mithin auch

$$\int_0^\infty \Delta_\mu \mathsf{B}^*(s; \mu) \cdot \Delta_\lambda \mathsf{A}(s; \lambda)\, ds = 0. \tag{25}$$

Wir haben noch den Beweis des angewendeten Hilfssatzes nachzuholen. Ist für eine stetige Funktion $f(x)$

$$\left| e(x)\, f(x) + \int_0^x f(\xi)\, d\xi \right| < \varepsilon$$

und bedeutet A das Maximum von $\frac{1}{e(x)} = \mathsf{E}(x)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$, so gilt, wenn wir die Funktion

$$\int_0^x f(\xi)\, d\xi = g(x)$$

einführen,

$$\left| \mathsf{E}(x)\, g(x) + \frac{dg(x)}{dx} \right| < \varepsilon A.$$

Nun ist

$$e^{\int_0^x \mathsf{E}(\xi)\, d\xi} \left(\mathsf{E}(x) g(x) + \frac{dg}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(e^{\int_0^x \mathsf{E}(\xi)\, d\xi} \cdot g(x) \right),$$

also

$$\left|\frac{d}{dx}\left(e^{\int_0^x \mathsf{E}(\xi)\,d\xi} g(x)\right)\right| < \varepsilon A \cdot e^{Ax},$$

$$|g(x)| \leqq \varepsilon\,(e^{Ax} - 1).$$

Weiter folgt dann

$$\left|\frac{f(x)}{\mathsf{E}(x)}\right| < \varepsilon \cdot e^{Ax}, \quad |f(x)| < \varepsilon A \cdot e^{Ax},$$

und damit ist jener Hilfssatz bewiesen.

Da für $\Delta_\mu \mathsf{B}^*(s;\mu)$ die Darstellung gilt

$$\Delta_\mu \mathsf{B}^*(s;\mu) = \int_0^\infty K(s,t)\,\Delta_\mu \mathsf{A}^*(t;\mu)\,dt,$$

dürfen wir diese Funktion in dem Integraltheorem (21) an Stelle von $f(s)$ einführen, und weil für jedes Teilintervall von $\mathfrak{i}$

$$\Delta_\mu \mathsf{A}(s;\mu) = 0$$

ist, erhalten wir aus dieser Integraldarstellung unter Berücksichtigung von (25)

$$\Delta_\mu \mathsf{B}^*(s;\mu) = 0$$

und folglich [s. Gleichung (23')]

$$\Delta_\mu \mathsf{A}^*(s;\mu) = 0.$$

Zufolge der letzten, für jedes Teilintervall von $\mathfrak{i}$ gültigen Gleichung ist demnach $\mathsf{A}^*(s;\mu)$ mit Bezug auf die Variable μ eine Konstante. Damit ist gezeigt, daß *für Werte λ, die dem Streckenspektrum nicht angehören, der homogenen Integralgleichung* in dem erörterten Sinne *durch ein nichtverschwindendes Differential auf keine Weise genügt werden kann*, und auf solche Art zugleich eine charakteristische Eigenschaft des Streckenspektrums gewonnen, die erkennen läßt, daß dasselbe durch den Kern $K(s,t)$ allein völlig bestimmt ist.

Hätten wir in der obigen Deduktion angenommen, daß μ_0 dem Streckenspektrum angehört, so hätte sich die folgende Darstellung der Funktion $\mathsf{A}^*(s;\lambda)$ ergeben [bei welcher $\mathsf{A}^*(s;0) = 0$ angenommen ist]

$$\mathsf{A}^*(s;\lambda) = \int_0^\lambda \frac{d_\mu \mathsf{A}(s;\mu)\cdot dH(\mu)}{d\varrho(\mu)},$$

in der $H(\mu)$ eine gewisse stetige Funktion von beschränkter Schwankung bezeichnet, für die $\frac{(dH(\mu))^2}{d\varrho(\mu)}$ in jedem endlichen Intervall integrierbar ist. Diese Gleichung besagt, daß *bis auf einen von s unabhängigen Faktor das*

Differential $d_\lambda \mathsf{A}(s;\lambda)$ *das einzige ist, welches der homogenen Integralgleichung für den Wert* λ *des Streckenspektrums genügt.*

Zur Bestimmung der Funktion $\mathsf{A}(s;\lambda)$ haben wir im vorstehenden ein System orthogonaler Funktionen $\Phi_p(s)$ von besonderer Art benutzt. Bezeichnet hingegen $\Phi_p'(s)$ $(p = 1, 2, \cdots)$ ein beliebiges vollständiges Orthogonalsystem für das Intervall $0 \cdots \infty$, so erkennt man leicht, daß die quadratische Form $K'(x)$ mit den Koeffizienten

$$k'_{pq} = \int_0^\infty\int_0^\infty K(s,t)\,\Phi_p'(s)\,\Phi_q'(t)\,ds\,dt$$

in $K(x)$ orthogonal transformierbar ist; folglich ist eine orthogonale Transformation der Variablen x_p in die Variablen x_p', ξ_p angebbar — ihre Koeffizienten mögen mit m'_{pq}, bzw. l'_{pq} bezeichnet sein —, so daß

$$K'(x) = \sum_{(p,q)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varrho_p \cdot d\varrho_q}{\mu\, d\varrho}\, \xi_p \xi_q$$

wird, und zwar stellt sich

$$l'_{p1} K_1'(s) + l'_{p2} K_2'(s) + \cdots = l_{p1} K_1(s) + l_{p2} K_2(s) + \cdots$$

heraus, wenn unter $K_p'(s)$ das Integral

$$\int_0^\infty K(s,t)\,\Phi_p'(t)\,dt$$

verstanden wird; d. h. die Funktionen $k_p(s)$ und mithin auch $\mathsf{A}(s;\lambda)$ sind von der Wahl des vollständigen Orthogonalsystems $\Phi_p'(s)$ vollständig unabhängig, und ein beliebiges solches, mag es nun zu der Funktion $k(s)$ passen oder nicht, ist zu ihrer Berechnung geeignet.

Besondere Hervorhebung verdient der Fall, daß das Streckenspektrum aus einer endlichen oder abzählbar unendlichen Anzahl von Intervallen besteht, die Funktion $|\varrho(\lambda)|$ mit der Gesamtlänge der zwischen 0 und λ gelegenen Intervalle des Streckenspektrums identisch wird und schließlich $\mathsf{A}(s;\lambda)$ für jeden Wert von λ, der *dem Innern* des Streckenspektrums angehört, nach λ stetig differenzierbar ist

$$\frac{\partial \mathsf{A}(s,\lambda)}{\partial \lambda} = \mathsf{P}(s;\lambda):$$

alsdann nenne ich den Kern $K(s,t)$ *regulär*.*) Hat unter diesen Umständen die Funktion $f(s)$, welche in die Form

$$\int_0^\infty K(s,t)\,g(t)\,dt$$

*) Diesen Fall, der bisher in den Anwendungen allein auftritt, habe ich in meiner Dissertation ohne Heranziehung des Hellingerschen Integralbegriffs behandelt.

gebracht werden kann, außerdem noch die Eigenschaft, daß das Integral

$$\int_0^\infty \mathsf{P}(s;\lambda)\, f(s)\, ds$$

gleichmäßig in der Umgebung jedes im Innern des Spektrums gelegenen Wertes von λ konvergiert, so verwandelt sich die Integraldarstellung (21) in

$$f(s) = \int_{(\mathsf{M})} \mathsf{P}(s;\mu) \int_0^\infty \mathsf{P}(t;\mu)\, f(t)\, dt\, d\mu,$$

in welcher M das Streckenspektrum bezeichnet. Konvergiert auch noch

$$\int_0^\infty K(s,t)\, \mathsf{P}(t;\lambda)\, dt$$

gleichmäßig in der Variablen λ, falls wir diese auf die Umgebung eines inneren Punktes des Streckenspektrums beschränken, so ist offenbar $\mathsf{P}(s;\lambda)$ eine Eigenfunktion des Kerns $K(s,t)$ im gewöhnlichen Sinne.

Die bisherigen Entwicklungen waren von der Voraussetzung beherrscht, daß die aus $K(s,t)$ entspringende quadratische Form in eine Elementarform orthogonal transformierbar sei. In dem allgemeineren Falle eines beliebigen beschränkten Kernes erhalten wir statt (21) eine Darstellung der Funktion $f(s)$ von folgender Art

$$f(s) = \sum_{(p)} \varphi_p(s) \int_0^\infty f(t)\, \varphi_p(t)\, dt + \sum_{(h)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d_\mu \mathsf{A}^{(h)}(s;\mu) \cdot d_\mu \int_0^\infty \mathsf{A}^{(h)}(t;\mu)\, f(t)\, dt}{d\varrho^{(h)}(\mu)}.$$

Dabei bilden die $\varphi_p(s)$, welche Eigenfunktionen des Kerns $K(s,t)$ sind (und zwar für diejenigen Eigenwerte, die das Punktspektrum ausmachen), ein System orthogonaler Funktionen für das Intervall $0 \cdots \infty$; $\mathsf{A}^{(h)}(s;\mu)$ sind Funktionen von der Beschaffenheit des oben benutzten $\mathsf{A}(s;\mu)$, und es bestehen die Relationen

$$\int_0^\infty \mathsf{A}^{(h)}(s;\mu)\, \mathsf{A}^{(i)}(s;\mu)\, ds = 0 \qquad (h \neq i),$$

$$\int_0^\infty \mathsf{A}^{(h)}(s;\mu)\, \varphi_p(s)\, ds = 0$$

II. Teil.

Beispiele singulärer Kerne.

Ist $K(s, t)$ ein beschränkter Kern, für den das Doppelintegral

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (K(s,t))^2\, ds\, dt$$

existiert, so gilt ohne Abänderungen die von Herrn Hilbert in seiner fünften Mitteilung entwickelte Theorie der Integralgleichungen. Wenn wir daher im folgenden einige Beispiele für die oben dargestellte allgemeinere Theorie besprechen wollen, können wir uns auf solche Kerne beschränken, für welche jenes Doppelintegral nicht konvergiert.

Als ersten derartigen singulären Kern nenne ich den folgenden

$$K(s, t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}\,(s+t)\cdot e^{-\left|\left(\frac{s}{2}\right)^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2\right|} \qquad \left(-\infty < {s \atop t} < +\infty\right), \tag{26}$$

welcher sich mit elementaren Hilfsmitteln (insbesondere ohne Heranziehung der Theorie der unendlichvielen Variablen) behandeln läßt. Er steht in naher Beziehung zu den sog. *Hermiteschen Polynomen*, die man am einfachsten durch die Gleichungen

$$\mathfrak{P}_p(s) = (-1)^p\, e^{\frac{1}{2}s^2}\cdot\frac{d^p}{ds^p}\left(e^{-\frac{1}{2}s^2}\right)$$

$$(p = 0, 1, 2, \cdots)$$

definiert, aus denen sich mit großer Leichtigkeit die wesentlichen Eigenschaften dieser Polynome ergeben. Es folgt nämlich aus ihnen

$$\frac{d}{ds}\left((-1)^p\, e^{-\frac{1}{2}s^2}\,\mathfrak{P}_p(s)\right) = (-1)^{p+1}\, e^{-\frac{1}{2}s^2}\,\mathfrak{P}_{p+1}(s)$$

und daraus die Rekursionsformel

$$\mathfrak{P}_{p+1}(s) = s\cdot\mathfrak{P}_p(s) - \frac{d\mathfrak{P}_p(s)}{ds}. \tag{27}$$

Ferner wird

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_{p+1}(s) &= (-1)^p\, e^{\frac{1}{2}s^2}\frac{d^p}{ds^p}\left(s e^{-\frac{1}{2}s^2}\right)\\ &= s\,\mathfrak{P}_p(s) - p\,\mathfrak{P}_{p-1}(s),\end{aligned}$$

und aus der Kombination dieser Gleichung mit der vorigen schließen wir die einfache Beziehung

$$\frac{d\mathfrak{P}_p(s)}{ds} = p\,\mathfrak{P}_{p-1}(s). \tag{27'}$$

Da $(-1)^p e^{-\frac{1}{2}s^2}\mathfrak{P}_p(s)$ der p^{te} Differentialquotient von $e^{-\frac{1}{2}s^2}$ ist, folgt durch mehrmalige Anwendung der partiellen Integration, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} \mathfrak{P}(s)\, \mathfrak{P}_p(s)\, ds = 0$$

wird für jedes Polynom $\mathfrak{P}(s)$ von niedrigerem als p^{tem} Grade, insbesondere also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} \mathfrak{P}_p(s)\, \mathfrak{P}_q(s)\, ds = 0 \qquad (p \neq q).$$

Indem man nun noch das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} (\mathfrak{P}_p(s))^2\, ds$$

berechnet, erkennt man, daß die Funktionen

$$\Phi_p(s) = \frac{e^{-\left(\frac{s}{2}\right)^2} \cdot \mathfrak{P}_p(s)}{\sqrt[4]{2\pi} \cdot \sqrt{p!}} \qquad (p = 0, 1, 2, \cdots)$$

ein System orthogonaler Funktionen für das Intervall $-\infty \cdots +\infty$ bilden.

Wir berechnen unter Heranziehung des besonderen, oben definierten Kernes $K(s, t)$ die Integrale (indem wir zunächst noch $s > 0$ voraussetzen)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(s, t)\, \Phi_p(t)\, dt = \frac{1}{2}\Big[- e^{\left(\frac{s}{2}\right)^2} \cdot \int_{-\infty}^{-s} e^{-\left(\frac{t}{2}\right)^2} \Phi_p(t)\, dt$$

$$+ e^{-\left(\frac{s}{2}\right)^2} \cdot \int_{-s}^{+s} e^{\left(\frac{t}{2}\right)^2} \Phi_p(t)\, dt + e^{\left(\frac{s}{2}\right)^2} \int_{s}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{2}\right)^2} \Phi_p(t)\, dt\Big].$$

Für ein gerades p ist $\Phi_p(s)$ eine gerade, für ungerades p eine ungerade Funktion von s; darum wird

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(s, t)\, \Phi_p(t) dt = e^{-\left(\frac{s}{2}\right)^2} \int_0^s e^{\left(\frac{t}{2}\right)^2} \Phi_p(t)\, dt \qquad [p \equiv 0 \ (\text{mod. } 2)]$$

$$= e^{\left(\frac{s}{2}\right)^2} \int_s^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{2}\right)^2} \Phi_p(t)\, dt \qquad [p \equiv 1 \ (\text{mod. } 2)].$$

Es gilt aber, wenn wir die Definitionsgleichungen und oben aufgestellten Rekursionsformeln heranziehen,

$$\int_0^s e^{\left(\frac{t}{2}\right)^2} \Phi_p(t)\, dt = \int_0^s \frac{\mathfrak{P}_p(t)}{\sqrt[4]{2\pi} \cdot \sqrt{p!}}\, dt = \frac{\mathfrak{P}_{p+1}(s)}{(p+1)\sqrt[4]{2\pi} \cdot \sqrt{p!}} = \frac{e^{\left(\frac{s}{2}\right)^2} \Phi_{p+1}(s)}{\sqrt{p+1}}$$

für $p \equiv 0\ (2)$,

$$\int_s^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{2}\right)^2} \Phi_p(t)\, dt = \frac{(-1)^p}{\sqrt[4]{2\pi} \cdot \sqrt{p!}} \int_s^{\infty} \frac{d^p}{dt^p}\left(e^{-\frac{1}{2}t^2}\right) dt$$

$$= \frac{(-1)^{p-1}}{\sqrt[4]{2\pi} \cdot \sqrt{p!}} \cdot \frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}}\left(e^{-\frac{1}{2}s^2}\right) = \frac{e^{-\left(\frac{s}{2}\right)^2} \Phi_{p-1}(s)}{\sqrt{p}}$$

für $p \equiv 1\ (2)$.

Wir erhalten damit die Gleichungen, welche für das Folgende die Grundlage bilden,

$$(28)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} K(s,t)\,\Phi_p(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{p+1}}\,\Phi_{p+1}(s) \qquad p \equiv 0 \ (2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p}}\,\Phi_{p-1}(s) \qquad p \equiv 1 \ (2).$$

Da $\int_{-\infty}^{+\infty} (K(s,t))^2\,dt \leqq 2$ ist, folgt hieraus für alle p

$$|\Phi_p(s)| \leqq \sqrt{2(p+1)}, \qquad |\mathfrak{P}_p(s)| \leqq \sqrt[4]{8\pi}\; e^{\left(\frac{s}{2}\right)^2} \sqrt{(p+1)!},$$

und mithin konvergiert die Reihe

$$(29)\qquad x(s) = \sqrt{\frac{2}{2+m}} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{-m}{2+m}\right)^p \frac{\mathfrak{P}_{2p}(s)}{2^p p!},$$

wenn m eine der Zahlen $0, 1, 2, \cdots$ bedeutet, gleichmäßig in jedem endlichen Intervall der Variablen s, und dasselbe gilt, wie man leicht sieht, auch für die durch gliedweise Derivation aus (29) erhaltene Reihe, welche folglich die Ableitung $x'(s)$ darstellt. Indem man von den Rekursionsformeln (27), (27′) Gebrauch macht, gewinnt man daraus die Gleichung

$$x'(s) = -\frac{ms}{2}\,x(s);$$

also wird, da $x(0) = 1$ ist,

$$x(s) = e^{-m\left(\frac{s}{2}\right)^2}.$$

Die aus (29) durch Multiplikation mit $e^{-\left(\frac{s}{2}\right)^2}$ hervorgehende Entwicklung von $e^{-(m+1)\left(\frac{s}{2}\right)^2}$ nach den Funktionen $\Phi_{2p}(s)$ konvergiert *gleichmäßig im ganzen unendlichen Intervall* $-\infty \cdots +\infty$, und da man nach dem Weierstraßschen Satz über die näherungsweise Darstellung jeder stetigen Funktion (in einem endlichen Intervall) durch Polynome schließen kann, daß jede gerade, stetige, im Unendlichen verschwindende Funktion gleichmäßig im Intervall $-\infty < s < +\infty$ durch Linearkombination der Funktionen $e^{-(m+1)\left(\frac{s}{2}\right)^2}$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ angenähert werden kann, ergibt sich aus diesen Entwicklungen der Satz, daß zu jeder positiven Zahl ε und jeder stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktion $f(s)$ ein Polynom $\mathfrak{P}(s)$ derart existiert, daß

$$|f(s) - e^{-\left(\frac{s}{2}\right)^2}\,\mathfrak{P}(s)| < \varepsilon\,(1 + |s|)$$

wird.*)

*) Die genauere Ausführung s. in meiner Diss., pag. 58 ff.

Ist jetzt $h(s)$ eine stetige Funktion, die *außerhalb eines gewissen endlichen Intervalls verschwindet,* und setzen wir $e^{\frac{s^2}{8}} h(s) = h^*(\sigma)$, indem σ den Wert $\frac{s}{\sqrt{2}}$ bedeutet, so wählen wir das Polynom $\mathfrak{P}^*(\sigma)$ so, daß

$$|h^*(\sigma) - e^{-\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2} \mathfrak{P}^*(\sigma)| < \varepsilon\,(1 + |\sigma|)$$

ausfällt, daher, wenn $\mathfrak{P}(s) = \mathfrak{P}^*\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$ gesetzt ist,

$$|h(s) - e^{-\left(\frac{s}{2}\right)^2} \mathfrak{P}(s)| < \varepsilon \cdot e^{-\frac{s^2}{8}}(1 + |s|),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (h(s) - e^{-\left(\frac{s}{2}\right)^2} \mathfrak{P}(s))^2 ds < (7\varepsilon)^2$$

wird. Da jede stetige, quadratisch integrierbare Funktion $g(s)$ durch eine Funktion von der Natur $h(s)$ so angenähert werden kann, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (g(s) - h(s))^2\, ds < \varepsilon^2$$

wird, ist durch diese Ungleichung *die Vollständigkeit des Systems der Hermiteschen Orthogonalfunktionen* $\Phi_p(s)$ *auf direktem Wege bewiesen.*

Wenden wir daher auf das Integral

$$(30) \qquad f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(s, t)\, g(t)\, dt,$$

in dem $g(t)$ eine stetige, quadratisch integrierbare Funktion bedeutet, die Vollständigkeitsrelation an, so ergibt sich, falls wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, \Phi_p(t)\, dt = g_p$$

setzen, die absolut und gleichmäßig für alle s konvergente Entwicklung

$$f(s) = g_0 \frac{\Phi_1(s)}{\sqrt{1}} + g_1 \frac{\Phi_0(s)}{\sqrt{1}} + g_2 \frac{\Phi_3(s)}{\sqrt{3}} + g_3 \frac{\Phi_2(s)}{\sqrt{3}} + \cdots,$$

die wir wegen der von der Reihenfolge der Glieder unabhängigen Konvergenz auch in die Form setzen können

$$f(s) = c_0 \Phi_0(s) + c_1 \Phi_1(s) + c_2 \Phi_2(s) + \cdots.$$

Integrieren wir diese Reihe nach Multiplikation mit $\Phi_p(s)$ in dem beliebigen endlichen Intervall $a \leqq s \leqq b$, so folgt

$$\left| \int_a^b f(s)\, \Phi_p(s)\, ds - \sum_{r=1}^{q} c_r \int_a^b \Phi_p(s)\, \Phi_r(s)\, ds \right|$$
$$\leqq \sqrt{c_{q+1}^2 + c_{q+2}^2 + \cdots} \sqrt{\int_a^b (\Phi_p(s))^2\, ds}.$$

Hieraus ist zu schließen (indem man a gegen $-\infty$, b gegen $+\infty$ konvergieren läßt)

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,\Phi_p(s)\,ds - c_p\right| \leqq \sqrt{c_{q+1}^2 + c_{q+2}^2 + \cdots} \qquad \text{für } q \geqq p,$$

mithin, da die rechte Seite mit wachsendem q gegen 0 konvergiert,

$$c_p = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,\Phi_p(s)\,ds.$$

Um unsere Untersuchung zu Ende zu führen, bleibt jetzt nur noch übrig, zu entscheiden, wann sich eine Funktion $f(s)$ in der Form (30) darstellen läßt. Setzen wir voraus, daß $f(s)$ einmal stetig differenzierbar ist, und, unter $f'(s)$ die Ableitung von $f(s)$ verstanden, die beiden Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (sf(s))^2\,ds, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (f'(s))^2\,ds$$

existieren, so folgt daraus für beliebiges $\omega > 1$

$$\int_1^{\omega} \left|\frac{d}{ds}\left(\frac{f(s)}{s}\right)\right| ds \leqq \int_1^{\omega} \left|\frac{f'(s)}{s}\right| ds + \int_1^{\omega} \frac{|f(s)|}{s^2}\,ds$$
$$\leqq \sqrt{\int_1^{\infty} (f'(s))^2\,ds} + \sqrt{\frac{1}{5}}\sqrt{\int_1^{\infty} (sf(s))^2\,ds};$$

mithin konvergiert das Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{d}{ds}\left(\frac{f(s)}{s}\right) ds,$$

d. h. $\frac{f(s)}{s}$ nähert sich, wenn s gegen $+\infty$ konvergiert, einer bestimmten Grenze, und es muß daher

$$\underset{s=\pm\infty}{L} \frac{f(s)}{s} = 0$$

sein. Beachten wir dies, so erschließen wir nunmehr durch eine leichte Rechnung, daß die Funktion

$$g(s) = \frac{s}{2} f(s) + f'(-s)$$

die Integralgleichung (30) befriedigt. Das Resultat dieser ganzen Untersuchung ist also der Satz:

Jede einmal stetig differenzierbare Funktion $f(s)$, für welche $sf(s)$ und $f'(s)$ quadratisch integrierbar sind, ist in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach den Hermiteschen Orthogonalfunktionen $\Phi_p(s)$ zu entwickeln:

$$f(s) = c_0\Phi_0(s) + c_1\Phi_1(s) + c_2\Phi_2(s) + \cdots,$$

deren Koeffizienten durch

$$c_p = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,\Phi_p(s)\,ds$$

*gegeben werden.**)

Die Relationen (28) zeigen übrigens noch, daß

$$\varphi_0(s) = \frac{\Phi_0(s) + \Phi_1(s)}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi_1(s) = \frac{\Phi_0(s) - \Phi_1(s)}{\sqrt{2}},$$
$$\varphi_2(s) = \frac{\Phi_2(s) + \Phi_3(s)}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi_3(s) = \frac{\Phi_2(s) - \Phi_3(s)}{\sqrt{2}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Eigenfunktionen des Kernes $K(s, t)$ sind, die zu den Eigenwerten

$$\frac{1}{\sqrt{1}},\ -\frac{1}{\sqrt{1}};\quad \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}};\ \cdots$$

gehören. Es gibt auch keine weiteren Eigenfunktionen; denn jede solche müßte zu allen $\varphi_p(s)$ orthogonal sein, was nicht möglich ist, da diese bereits ein *vollständiges* System orthogonaler Funktionen bilden. Ein Streckenspektrum ist bei dem hier behandelten Kern überhaupt nicht vorhanden.

Zu interessanten Ergebnissen gelangt man, wenn man in ähnlicher Weise, wie soeben die Hermiteschen, die *Laguerreschen Polynome*

$$P_p(s) = e^{2s}\frac{d^p}{ds^p}(e^{-2s}s^p) \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

untersucht. Für sie gewinnen wir leicht aus der Definitionsgleichung die Rekursionsformeln

$$P_p(s) = s\frac{dP_{p-1}(s)}{ds} - (2s - p)P_{p-1}(s),$$
$$\frac{dP_p(s)}{ds} = p\left(\frac{dP_{p-1}(s)}{ds} - 2P_{p-1}(s)\right).$$

Auch erkennen wir, daß die Funktionen

(31) $$\Lambda_p(s) = \sqrt{2}\,\frac{e^{-s}P_p(s)}{p!} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

ein Orthogonalsystem für das Intervall $0 \cdots \infty$ bilden. Aus dem im vorigen Abschnitt gewonnenen Resultat, daß jede stetige, außerhalb eines

*) Vgl. hierzu W. Myller-Lebedeff, Theorie der Integralgleichungen in Anwendung usw. (Inauguraldissertation, abgedr. in Math. Ann. Bd. 64.)

endlichen Intervalls verschwindende Funktion $h(s)$ für alle $s \geqq 0$ durch lineare Kombination der dort benutzten $e^{-\left(\frac{s}{2}\right)^2}\mathfrak{P}_{2p}(s)$ bis auf einen Fehler $\varepsilon \cdot e^{-\frac{s^2}{8}}$ angenähert werden kann (indem man nämlich $h(-s) = h(s)$ setzt), wird erkennbar, daß die in (31) eingeführten *Laguerreschen Orthogonalfunktionen* $\Lambda_p(s)$ gleichfalls ein vollständiges System bilden. Die zweite der aufgestellten Rekursionsformeln läßt sich, da $P_p(0) = p\,P_{p-1}(0)$ ist, in der Form schreiben

$$P_p(s) - pP_{p-1}(s) = -\,2p\cdot\int\limits_0^s P_{p-1}(t)\,dt$$

oder

$$\Lambda_{p+1}(s) - \Lambda_p(s) = -\,2e^{-s}\int\limits_0^s e^t\Lambda_p(t)\,dt. \tag{32}$$

Aus dieser Beziehung läßt sich durch Anwendung der Vollständigkeitsrelation eine Bedingung ableiten, unter der eine stetige Funktion $f(s)$ nach den Differenzen $\Lambda_1(s) - \Lambda_0(s)$, $\Lambda_2(s) - \Lambda_1(s), \cdots$ der Laguerreschen Orthogonalfunktionen entwickelbar ist.

Mit derselben Leichtigkeit wie (32) erhält man die analoge Formel

$$\Lambda_p(s) - \Lambda_{p-1}(s) = 2e^s\int\limits_s^\infty e^{-t}\Lambda_p(t)\,dt;$$

addieren wir sie zu (32), so folgt

$$\int\limits_0^\infty e^{-|s-t|}\Lambda_p(t)\,dt = -\frac{1}{2}\Lambda_{p-1}(s) + \Lambda_p(s) - \frac{1}{2}\Lambda_{p+1}(s), \quad (p = 1, 2, \ldots)$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-|s-t|}\Lambda_0(t)\,dt = \Lambda_0(s) - \frac{1}{2}\Lambda_1(s)\cdot$$

Betrachten wir also den symmetrischen Kern

$$K(s,t) = \frac{1}{2}\,e^{-|s-t|} \qquad \left(0 \leqq {s \atop t} < \infty\right)$$

für den sich

$$(k(s))^2 = \int\limits_0^\infty (K(s,t))^2\,dt = \frac{1}{4}$$

ergibt, und ordnen ihm die quadratische Form $K(x)$ mit den Koeffizienten

$$k_{pq} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-|s-t|}\Lambda_{p-1}(s)\,\Lambda_{q-1}(t)\,ds\,dt \quad (p,\ q = 1, 2, \ldots)$$

zu, so wird

$$k_{pq} = 0, \quad \text{falls} \quad p \neq q-1,\ q,\ q+1;$$
$$k_{pp} = \frac{1}{2}; \qquad k_{p,p-1} = k_{p,p+1} = -\frac{1}{4},$$

mithin

$$(33) \qquad \begin{aligned} K(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + \cdots \\ -\frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2x_3 - \cdots \end{aligned}$$

Der Kern $\frac{1}{2}e^{-|s-t|}$ *ist demnach ein beschränkter Kern.* Die durch (33) erklärte quadratische Form läßt sich aber in folgender Gestalt schreiben*)

$$(34) \qquad K(x) = \sum_{(p,q)} \int_1^\infty \frac{\psi_p(\mu)\psi_q(\mu)}{\mu}\, d\mu \cdot x_p x_q,$$

falls wir unter $\psi_p(\lambda)$ diese Funktionen verstehen:

$$\psi_p(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin^2 r}{\sqrt{\sin 2r}} \sin 2pr;$$

dabei bezeichnet r den zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegenen Wert von arc sin $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ $(\lambda \geqq 1)$. Die $\psi_p(\lambda)$ bilden ein vollständiges Orthogonalsystem für das Intervall $1 \leqq \lambda < \infty$. Indem wir

$$\begin{aligned} \varrho(\lambda) &= 0 \qquad (\lambda < 1), \qquad & \varrho_p(\lambda) &= 0 \qquad & (\lambda < 1), \\ &= \lambda - 1 \quad (\lambda \geqq 1), & &= \int_1^\lambda \psi_p(\mu)\,d\mu & (\lambda \geqq 1) \end{aligned}$$

setzen, erkennen wir, daß $K(x)$ eine Elementarform ist, deren Streckenspektrum aus dem einzigen Intervall $1 \leqq \lambda < \infty$ besteht und deren Basisfunktion das eben angegebene $\varrho(\lambda)$ ist.

Um nun diese Darstellung der quadratischen Form (33) für den Kern $\frac{1}{2}e^{-|s-t|}$ nutzbar zu machen, müssen wir zunächst die Funktion $\mathsf{A}(s;\lambda)$ unserer allgemeinen Theorie bestimmen. Dazu bemerken wir zunächst, daß aus der Integralgleichung

$$(35) \qquad f(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-|s-t|} g(t)\,dt$$

die Differentialbeziehung

$$g(s) = f(s) - \frac{d^2 f(s)}{ds^2}$$

folgt. Damit diese Funktion $g(s)$ die Integralgleichung (35) löst, muß

*) Diese Darstellung ist in etwas anderer Form schon von Hilbert, 4. Mitt., pag. 208 gegeben worden.

$$f'(0) = f(0), \qquad \underset{s=\infty}{L}\, e^{-s}(f(s) + f'(s)) = 0$$

sein.*) Nehmen wir provisorisch an, daß $\mathsf{A}(s;\lambda)$ nach λ differenzierbar ist:

$$\frac{\partial \mathsf{A}(s;\lambda)}{\partial \lambda} = \mathsf{P}(s;\lambda) \qquad (\lambda > 1),$$

und $\int\limits_0^\infty K(s,t)\mathsf{P}(t;\lambda)dt$ gleichmäßig in λ konvergiert, so ist $\mathsf{P}(s;\lambda)$ Eigenfunktion des Kernes $\frac{1}{2}e^{-|s-t|}$ für den Eigenwert λ, und folglich

$$\frac{\partial^2 \mathsf{P}(s;\lambda)}{\partial s^2} + (\lambda - 1)\mathsf{P}(s;\lambda) = 0,$$

$$\left[\frac{\partial \mathsf{P}(s;\lambda)}{\partial s} - \mathsf{P}(s;\lambda)\right]_{s=0} = 0.$$

Es muß dann also

$$\mathsf{P}(s;\lambda) = a(\lambda)\left\{\sqrt{\lambda-1}\cdot\cos\left(s\sqrt{\lambda-1}\right) + \sin\left(s\sqrt{\lambda-1}\right)\right\}$$

sein, wobei $a(\lambda)$ eine gewisse Funktion von λ ist. Diese bestimmen wir so, daß

$$\int\limits_0^\infty \mathsf{P}(s;\lambda)\,\Lambda_0(s)\,ds = \psi_1(\lambda)$$

wird. Da aber

$$\sqrt{2}\int\limits_0^\infty \left\{\sqrt{\lambda-1}\cos\left(s\sqrt{\lambda-1}\right) + \sin\left(s\sqrt{\lambda-1}\right)\right\}e^{-s}ds = 2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{\lambda-1}}{\lambda},$$

$$\psi_1(\lambda) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt[4]{\lambda-1}}{\sqrt{\lambda^3}}$$

ist, ergibt sich

$$a(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi\lambda}\cdot\sqrt[4]{\lambda-1}}.$$

Wir setzen nunmehr

$$\overline{\mathsf{P}}(s;\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\sqrt[4]{\lambda-1}}{\sqrt{\lambda}}\cos\left(s\sqrt{\lambda-1}\right) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt[4]{\lambda-1}}\sin\left(s\sqrt{\lambda-1}\right)\right\},$$

$$\overline{\mathsf{A}}(s;\lambda) = \int\limits_1^\lambda \overline{\mathsf{P}}(s;\mu)\,d\mu \qquad (\text{für } \lambda \geqq 1).$$

Es ist dann durch die vorigen Überlegungen wahrscheinlich gemacht, daß

(36) $$\mathsf{A}(s;\lambda) = \overline{\mathsf{A}}(s;\lambda)$$

wird. Wir müssen prüfen, ob dieses zutrifft.

Zunächst besteht sicherlich die Beziehung

*) Der Akzent bedeutet hier Differentiation nach dem Argument s.

$$\overline{\mathsf{P}}(s;\lambda) = \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty e^{-|s-t|}\,\overline{\mathsf{P}}(t;\lambda)\,dt \qquad (\lambda \geqq 1).$$

Da ferner (durch einmalige partielle Integration) leicht zu erkennen ist, daß $\overline{\mathsf{A}}(s;\lambda)$ für $s=\infty$ Null wird mindestens wie $\frac{1}{s}$, also eine im Intervall $0 \leqq s < \infty$ quadratisch integrierbare Funktion ist, erhalten wir hieraus die Entwicklung

$$\text{(37)} \qquad \overline{\mathsf{A}}(s;\lambda) = \sum_{p=1,2,\cdots}\Big[k_p(s)\int\limits_1^\lambda \mu\,\overline{\psi}_p(\mu)\,d\mu\Big],$$

in welcher

$$\text{(38)} \qquad \begin{aligned} k_p(s) &= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-|s-t|}\,\Lambda_{p-1}(t)\,dt, \\ \psi_p(\lambda) &= \int\limits_0^\infty \overline{\mathsf{P}}(t;\lambda)\,\Lambda_{p-1}(t)\,dt \end{aligned}$$

gesetzt wurde, und aus ihr die Fourierkoeffizienten von $\overline{\mathsf{A}}(s;\lambda)$

$$\int\limits_0^\infty \overline{\mathsf{A}}(s;\lambda)\,\Lambda_{p-1}(s)\,ds = \sum_{(q)} k_{pq}\int\limits_1^\lambda \mu\,\overline{\psi}_q(\mu)\,d\mu.$$

Andererseits ist aber wegen (38)

$$\int\limits_0^\infty \overline{\mathsf{A}}(s;\lambda)\,\Lambda_{p-1}(s)\,ds = \int\limits_1^\lambda \overline{\psi}_p(\mu)\,d\mu.$$

Für $p=1$ wird

$$\begin{aligned} \int\limits_1^\lambda \overline{\psi}_1(\mu)\,d\mu = \int\limits_1^\lambda \psi_1(\mu)\,d\mu &= \sum_{(q)}\int\limits_1^\infty \frac{\psi_1(\mu)\,\psi_q(\mu)}{\mu}\,d\mu \int\limits_1^\lambda \mu\,\psi_q(\mu)\,d\mu \\ &= \sum_{(q)} k_{1q}\int\limits_1^\lambda \mu\,\psi_q(\mu)\,d\mu; \end{aligned}$$

mithin kommt

$$\sum_{(q)}\Big[k_{1q}\int\limits_1^\lambda \mu\,(\psi_q(\mu) - \overline{\psi}_q(\mu))\,d\mu\Big] = 0.$$

Da nun $\psi_1(\mu) - \overline{\psi}_1(\mu) = 0$, $k_{1q} = 0$ für $q > 2$, hingegen $k_{12} \neq 0$ ist, folgt hieraus

$$\psi_2(\lambda) = \overline{\psi}_2(\lambda).$$

Dies zeigt wiederum, daß

$$\sum_{(q)}\Big[k_{2q}\int\limits_1^\lambda \mu\,(\psi_q(\mu) - \overline{\psi}_q(\mu))\,d\mu\Big] = 0$$

sein muß, mithin

$$\psi_3(\lambda) = \overline{\psi}_3(\lambda)$$

und so fort. Damit aber verwandelt sich (37) in die zu beweisende Gleichung

$$\overline{\mathsf{A}}(s;\lambda) = \sum_{(p)} \left[k_p(s) \int_1^{\lambda} \mu \psi_p(\mu)\, d\mu\right] = \mathsf{A}(s;\lambda).$$

Nach diesen Rechnungen können wir das folgende, dem Fourierschen analoge Integraltheorem aufstellen

$$(39) \quad \begin{aligned} f(s) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} & \frac{\sqrt{\lambda-1}\cos(s\sqrt{\lambda-1}) + \sin s\sqrt{\lambda-1})}{\sqrt{\lambda}\sqrt[4]{\lambda-1}} \\ & \cdot \int_0^{\infty} f(t) \frac{\sqrt{\lambda-1}\cos(t\sqrt{\lambda-1}) + \sin(t\sqrt{\lambda-1})}{\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt[4]{\lambda-1}}\, dt\, d\lambda. \end{aligned}$$

Es ist gültig, falls für die als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzte Funktion $f(s)$ die Integrale

$$\int_0^{\infty} (f(s))^2\, ds, \qquad \int_0^{\infty} (f''(s))^2\, ds, \qquad \int_0^{\infty} |f''(s)|\, ds$$

existieren, $\underset{s=\infty}{L} f(s) = \underset{s=\infty}{L} f'(s) = 0$ und $f'(0) = f(0)$ ist. Denn unter diesen Umständen konvergiert das innere Integral in (39) gleichmäßig in der Umgebung jeder Zahl $\lambda > 1$, wie sich durch zweimalige Anwendung der partiellen Integration ergibt. Die angeführten Bedingungen sind insbesondere dann erfüllt, wenn $f(s)$ für $s = \infty$ in normaler Weise von höherer als $\frac{1}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung verschwindet, d. h. wenn es eine positive Zahl ε gibt, so daß

$$s^{\frac{1}{2}+\varepsilon} f(s), \qquad s^{\frac{3}{2}+\varepsilon} f'(s), \qquad s^{\frac{5}{2}+\varepsilon} f''(s)$$

für alle $s \geqq 0$ unterhalb einer endlichen Grenze bleiben.

Von $\frac{1}{2} e^{-|s-t|}$ gelangen wir durch Substitution leicht zu andern einfachen singulären Kernen. Setzen wir in dem Integral

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-|s-t|}\, U(s)\, U(t)\, ds\, dt,$$

in welchem $U(s)$ eine beliebige stetige Funktion mit der Eigenschaft $\int_0^{\infty} (U(s))^2\, ds = 1$ bedeuten möge,

$$e^{-2s} = \sigma, \qquad e^{-2t} = \tau,$$

so verwandelt es sich in das folgende

$$\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 G(\sigma,\tau)\,u(\sigma)\,u(\tau)\,d\sigma\,d\tau,$$

wenn $G(\sigma,\tau)$ durch

$$(40)\qquad \begin{aligned} G(\sigma,\tau) &= \frac{1}{\sigma} \quad (\sigma \geqq \tau) \\ &= \frac{1}{\tau} \quad (\sigma \leqq \tau) \end{aligned}$$

definiert und

$$u(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{2\sigma}}\cdot U\left(\frac{1}{2}\,|\lg\sigma|\right)$$

gesetzt wird, so daß also auch

$$(41)\qquad \int_0^1 (u(\sigma))^2\,d\sigma = 1$$

ausfällt. Über den Kern (40), der wohl als der einfachste aller singulären bezeichnet werden darf, läßt sich demnach das Folgende aussagen:

Für alle stetigen Funktionen, die (41) erfüllen, ist

$$0 < \int_0^1\int_0^1 G(\sigma,\tau)\,u(\sigma)\,u(\tau)\,d\sigma\,d\tau \leqq 4.$$

Die inhomogene Integralgleichung

$$f(\sigma) = \varphi(\sigma) - \lambda\int_0^1 G(\sigma,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$$

hat für alle $\lambda < \frac{1}{4}$ eine Lösung $\varphi(\sigma)$, die stetig außer für $\sigma = 0$, in der Umgebung dieser Stelle aber quadratisch integrierbar ist (falls $f(\sigma)$ von der gleichen Beschaffenheit vorausgesetzt wird). Für Werte $\lambda > \frac{1}{4}$ hat die zugehörige homogene Integralgleichung Lösungen $\varphi_\lambda(\sigma)$, welche, mit $\sqrt{\sigma}$ multipliziert, an der Stelle $\sigma = 0$ endlich bleiben; es sind dies die Funktionen

$$\varphi_\lambda(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{\pi\sigma}}\,\frac{\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}\cos\left(\left|\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}\lg\sigma\right|\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\left|\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}\lg\sigma\right|\right)}{\sqrt{\lambda}\,\sqrt[4]{\lambda-\frac{1}{4}}}$$

Sie bilden die Grundfunktion eines Fouriertheorems:

$$f(\sigma) = \int_{\frac{1}{4}}^{\infty}\varphi_\lambda(\sigma)\int_0^1 f(\tau)\,\varphi_\lambda(\tau)\,d\tau\,d\lambda.$$

Damit beherrschen wir also den Kern $G(\sigma, \tau)$ in der vollkommensten Weise.

Durch eine leichte Modifikation erhalten wir übrigens auch das *gewöhnliche Fouriersche Integraltheorem.* Wir brauchen nämlich dazu statt des Kernes $\frac{1}{2} e^{-|s-t|}$ nur die beiden folgenden

$$K_+(s,t) = e^{-s}\operatorname{Cof} t \quad (s \geqq t) \qquad\Big|\qquad K_-(s,t) = e^{-s}\operatorname{Sin} t \quad (s \geqq t)\text{*)}$$
$$= e^{-t}\operatorname{Cof} s \quad (s < t) \qquad\Big|\qquad = e^{-t}\operatorname{Sin} s \quad (s < t)$$

zugrunde zu legen, welche durch Übergang zu den quadratischen Formen mittels des Laguerreschen Orthogonalsystems $\Lambda_p(s)$ auf

$$K_+(x) = \frac{3}{4}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + \cdots - \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2x_3 - \cdots,$$

$$K_-(x) = \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + \cdots - \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2x_3 - \cdots$$

führen. Diese lassen sich in eine der Darstellung (34) analoge Gestalt bringen und liefern dann das (in zwei Teile zerspaltene) Fouriersche Integraltheorem**)

$$f(s) = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{\cos\left(s\sqrt{\lambda-1}\right)}{\sqrt[4]{\lambda-1}} \int_0^\infty f(t)\,\frac{\cos\left(t\sqrt{\lambda-1}\right)}{\sqrt[4]{\lambda-1}}\,dt\,d\lambda,$$

$$f(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\left(s\sqrt{\lambda-1}\right)}{\sqrt[4]{\lambda-1}} \int_0^\infty f(t)\,\frac{\sin\left(t\sqrt{\lambda-1}\right)}{\sqrt[4]{\lambda-1}}\,dt\,d\lambda.$$

Gleichzeitig erhält man bei der Durchführung dieser Rechnung die Gleichungen

$$(42)\qquad \begin{aligned} \int_0^\infty \sin(s\operatorname{cotg}\varrho)\,\Lambda_p(s)\,ds &= \sqrt{2}\sin\varrho\cdot\cos(2p+1)\varrho,\\ \int_0^\infty \cos(s\operatorname{cotg}\varrho)\,\Lambda_p(s)\,ds &= \sqrt{2}\sin\varrho\cdot\sin(2p+1)\varrho. \end{aligned}$$

Nach einer von Herrn Hilbert gemachten Bemerkung kann man das Fouriertheorem noch von einem wesentlich anderen Gesichtspunkt auffassen, als bisher geschehen ist. Betrachten wir nämlich

*) $\operatorname{Cof} s = \dfrac{e^s + e^{-s}}{2}, \qquad \operatorname{Sin} s = \dfrac{e^s - e^{-s}}{2}.$

**) s. Dissertation pag. 65, 69. — Das Fouriersche und allgemeinere Integraltheoreme sind auch von Herrn E. Hilb („Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen", Math. Ann. Bd. 66, pag. 1—66) auf einem mehr indirekten Wege mit großem Erfolg untersucht worden.

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(st) \quad \left(0 \leqq {s \atop t} < \infty\right)$$

als *Kern* einer Integralgleichung, so zeigt das Fouriersche Integraltheorem, das wir jetzt in der Form schreiben

$$(43) \qquad u(s) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(st) \int_0^\infty \cos(tr)\, u(r)\, dr\, dt,$$

daß dieser höchstens die beiden Eigenwerte $+1$, -1 besitzen kann. Es fragt sich, welche Eigenfunktionen zu jedem von ihnen gehören. *Eine* solche zu $+1$ gehörige Funktion wird durch die bekannte Integralbeziehung

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos(st)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = e^{-\frac{s^2}{2}}$$

geliefert. Um jedoch diese Frage systematisch zu entscheiden, beachte man zunächst die Formeln (42), welche besagen, daß die Funktionen

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos(st)\, \Lambda_p(t)\, dt \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

ebenso wie die $\Lambda_p(s)$ selber ein vollständiges Orthogonalsystem bilden. Aus diesem Umstand folgt, wenn wir

$$\bar{u}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos(st)\, u(t)\, dt$$

setzen, wie ich in meiner Dissertation gezeigt habe*), die „Orthogonalitätsrelation"

$$(44) \qquad \int_0^\infty \bar{u}(s)\bar{v}(s)\, ds = \int_0^\infty u(s)\, v(s)\, ds$$

für irgend zwei stetige, absolut und quadratisch im Intervall $0 \cdots \infty$ integrierbare Funktionen $u(s)$, $v(s)$. Vgl. hierzu übrigens Formel (22).

Der Bereich derjenigen stetigen Funktionen $u(s)$, für welche $\bar{u}(s)$ existiert und stetig ist, welche ferner dem Fouriertheorem (43) und den Limesgleichungen

$$\underset{a=\infty}{L}\int_0^\infty (\bar{u}_a(s) - \bar{u}(s))^2 ds = 0,$$

$$\underset{a=\infty}{L}\int_0^\infty (u_a(s) - u(s))^2 ds = 0$$

*) Diss., pag. 23 u. 31.

genügen — dabei ist

$$\bar{u}_a(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos(st)\, u(t)\, dt,$$

$$u_a(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos(st)\, \bar{u}(t)\, dt$$

gesetzt — möge mit $\mathfrak{U}$ bezeichnet werden. Jede endliche Linearkombination von Funktionen aus $\mathfrak{U}$ gehört wiederum diesem Bereich an, und falls $u(s)$ irgend eine Funktion aus $\mathfrak{U}$, ist auch $\bar{u}(s)$ in $\mathfrak{U}$ enthalten. Ferner gilt für irgend zwei Funktionen aus $\mathfrak{U}$ die Orthogonalitätsbeziehung (44), und jede stetige, absolut und quadratisch integrable Funktion, welche im Endlichen von beschränkter Schwankung ist, gehört dem Bereich $\mathfrak{U}$ an.

Schränken wir nun den Begriff der Funktion gänzlich auf den soeben definierten Bereich $\mathfrak{U}$ ein, verstehen insonderheit unter einer Eigenfunktion des Kernes $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(st)$ eine *in* $\mathfrak{U}$ *enthaltene* Funktion $\varphi(s)$, welche der Relation

$$\varphi(s) - \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(st)\, \varphi(t)\, dt = 0$$

genügt, so zeigt sich*), daß der Kern $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(st)$ sich in allen wesentlichen Punkten verhält wie ein regulärer. Ihm kommen zwar die einzigen Eigenwerte $+1$, -1 zu, aber zu jedem von ihnen gehören unendlichviele Eigenfunktionen. Jede in $\mathfrak{U}$ enthaltene Funktion ist die Summe einer zu $+1$ und einer zu -1 gehörigen Eigenfunktion. Die inhomogene Integralgleichung

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(st)\, \varphi(t)\, dt$$

hat, falls $\lambda \neq \pm 1$ ist, für jede zu $\mathfrak{U}$ gehörige Funktion $f(s)$ eine Lösung $\varphi(s)$ von der nämlichen Beschaffenheit. Für einen Eigenwert $\lambda = +1$ oder -1 ist sie jedoch nur dann (in demselben Sinne) lösbar, wenn $f(s)$ zu den sämtlichen zu λ gehörigen Eigenfunktionen orthogonal ist. Der Kern $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(st)$ ist offenbar nicht „beschränkt", wohl aber liegt der Integrallimes

*) Diss., pag. 28 f.

$$\underset{\substack{a=\infty \\ b=\infty}}{L} \int_0^a \int_0^b \cos st\, u(s)\, u(t)\, ds\, dt,$$

der für alle stetigen, quadratisch integrierbaren Funktionen $u(s)$ existiert, unterhalb der Grenze $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, wenn $\int_0^\infty (u(s))^2 ds \leqq 1$ bleibt.

Die bisherigen, das Fouriersche Integraltheorem betreffenden Untersuchungen lassen sich ohne Schwierigkeit auf die Besselschen Funktionen übertragen. Wir werden uns dazu der folgenden Verallgemeinerung der Laguerreschen Polynome bedienen:

$$P_p^{(\alpha)}(s) = \frac{e^{2s}}{s^{2\alpha}} \frac{d^p}{ds^p} (e^{-2s} s^{p+2\alpha}), \tag{45}$$

in denen s im Intervall $0 \cdots \infty$ variabel ist, α aber eine beliebige reelle Zahl $> -\frac{1}{2}$ bedeutet und p die Reihe der ganzen nicht-negativen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ durchläuft. Aus dieser Definitionsgleichung gewinnt man die Rekursionsformel

$$\frac{dP_p^{(\alpha)}(s)}{ds} = p\left(\frac{dP_{p-1}^{(\alpha)}(s)}{ds} - 2P_{p-1}^{(\alpha)}(s)\right), \tag{46}$$

und man beweist wie früher, daß die Funktionen

$$\frac{2^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\Gamma(p+1)\cdot\Gamma(p+1+2\alpha)}}\, e^{-s} s^\alpha P_p^{(\alpha)}(s) = \Lambda_p^{(\alpha)}(s) \tag{47}$$

$$p = 0, 1, 2, \ldots$$

für ein festes α ein vollständiges Orthogonalsystem für $0 \leqq s < \infty$ bilden.

Es ist offenbar

$$-\frac{d^p}{ds^p}(e^{-2s} s^{p+2\alpha}) = \int_s^\infty \frac{d^{p+1}}{dt^{p+1}}(e^{-2t} t^{p+1+2\alpha-1})\, dt. \tag{48}$$

Führen wir in diese Gleichung die Bezeichnungen (45), (47) ein, so verwandelt sie sich *unter der Voraussetzung* $\alpha > 0$, *die wir jetzt zunächst machen wollen,* in

$$-\Lambda_p^{(\alpha)}(s) = \sqrt{2(p+1)}\, e^s s^{-\alpha} \int_s^\infty e^{-t} t^{\alpha-\frac{1}{2}} \Lambda_{p+1}^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}(t)\, dt. \tag{49}$$

Es folgt hieraus in bekannter Weise durch Anwendung der Vollständigkeitsrelation: Wenn $g(s)$ eine stetige, im Intervall $0 \cdots \infty$ quadratisch integrierbare Funktion bedeutet, für welche

$$\int_0^\infty g(t)\, \Lambda_0^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}(t)\, dt = 0,$$

d. h.

(50) $$\int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-\frac{1}{2}} g(t)\, dt = 0$$

ist, so läßt sich das Integral

(51) $$f(s) = e^s s^{-\alpha} \int_s^\infty e^{-t} t^{\alpha-\frac{1}{2}} g(t)\, dt$$

in eine gleichmäßig und absolut konvergente Reihe nach den $\Lambda_p^{(\alpha)}(s)$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ entwickeln. Aus (51) folgt

(52) $$g(s) = \frac{(s-\alpha) f(s) - s f'(s)}{\sqrt{s}},$$

und diese Funktion ist umgekehrt eine Auflösung von (51), wenn

(53) $$\underset{s=\infty}{L}\, e^{-s} s^\alpha f(s) = 0$$

ist. Damit (50) gilt, ist gemäß (51) dann notwendig und hinreichend, daß

(53') $$\underset{s=0}{L}\, s^\alpha f(s) = 0$$

wird. *Wenn demnach die Funktion* (52) *für* $s > 0$ *existiert und stetig, im Intervall* $0 \cdots \infty$ *aber quadratisch integrierbar ist und* (53), (53') *erfüllt sind, läßt sich* $f(s)$ *in der angegebenen Weise entwickeln.* Diese Bedingungen lassen sich noch in der verschiedensten Weise spezialisieren.

Die Formel (48) liefert ein entsprechendes Ergebnis für $\alpha = 0$. Beachtet man nämlich, daß

$$s \cdot \frac{d^{p+1}}{ds^{p+1}}(e^{-2s} s^p) = -2 \frac{d^p}{ds^p}(e^{-2s} s^{p+1})$$

ist, so geht (48) für $\alpha = 0$ über in

$$\Lambda_p^{(0)}(s) = \sqrt{2(p+1)}\, e^s \int_s^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \Lambda_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}(t)\, dt,$$

und *es ist demnach* $f(s)$ *nach den* $\Lambda_p^{(0)}(s)$ *entwickelbar, wenn*

$$\underset{s=\infty}{L}\, e^{-s} f(s) = 0 \quad \textit{und} \quad \sqrt{s}\,(f(s) - f'(s))$$

*stetig und quadratisch integrierbar ist.**)

Um ein analoges Resultat für $\alpha < 0$ zu erhalten, gehen wir von der Bemerkung aus, daß

*) Vgl. W. Myller-Lebedeff, l. c.

$$\frac{d^p}{ds^p}\left(e^{-2s}s^{p+2\alpha}\cdot s\right)=s\cdot\frac{d^p}{ds^p}\left(e^{-2s}s^{p+2\alpha}\right)+p\,\frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}}\left(e^{-2s}s^{p-1+2\alpha+1}\right)$$

ist. Indem wir die Definitionsgleichung (45) heranziehen, wird

$$P_p^{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}(s)=P_p^{(\alpha)}(s)+p\,P_{p-1}^{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}(s),$$

und daher, wenn wir (46) benutzen,

$$-\frac{dP_p^{(\alpha)}(s)}{ds}=2p\,P_{p-1}^{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}(s).$$

Integrieren wir diese Relation zwischen 0 und s, so folgt

$$P_p^{(\alpha)}(0)-P_p^{(\alpha)}(s)=2p\int_0^s P_{p-1}^{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}(t)\,dt,$$

und wenn wir hierin die Bezeichnungen (47) einführen,

$$-\frac{\Lambda_p^{(\alpha)}(s)}{\sqrt{2p}}+\frac{1}{\sqrt{\Gamma(1+2\alpha)}}\sqrt{\frac{\Gamma(p+2\alpha+1)}{2p\,\Gamma(p+1)}}\cdot\Lambda_0^{(\alpha)}(s)=e^{-s}s^{\alpha}\int_0^s e^t t^{-\alpha-\frac{1}{2}}\,\Lambda_{p-1}^{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}(t)\,dt.$$

Nehmen wir nun an, daß $\alpha<0$ ist, so ist $e^t t^{-\alpha-\frac{1}{2}}$ an der Stelle $t=0$ quadratisch integrierbar. Außerdem ist dann

$$\frac{\Gamma(p+2\alpha+1)}{p\,\Gamma(p+1)}<p^{-1+2\alpha},$$

also konvergiert die Summe

$$\sum_{p=1,2,\ldots}\frac{\Gamma(p+2\alpha+1)}{p\,\Gamma(p+1)}$$

und mithin auch

$$\sum_{p=1,2,\ldots}\gamma_p\sqrt{\frac{\Gamma(p+2\alpha+1)}{p\,\Gamma(p+1)}},$$

wenn γ_p irgendwelche Zahlen mit konvergenter Quadratsumme sind. Eine mittels der stetigen, quadratisch integrierbaren Funktion $g(s)$ in der Form

$$f(s)=e^{-s}s^{\alpha}\int_0^s e^t t^{-\alpha-\frac{1}{2}}\,g(t)\,dt \tag{54}$$

darstellbare Funktion $f(s)$ ist demnach wiederum in eine gleichmäßig und absolut konvergente, nach den Funktionen $\Lambda_0^{(\alpha)}(s)$, $\Lambda_1^{(\alpha)}(s)$, $\Lambda_2^{(\alpha)}(s)$, ... fortschreitende Reihe entwickelbar. Aus (54) folgt

$$g(s)=\frac{(s-\alpha)f(s)+sf'(s)}{\sqrt{s}}, \tag{55}$$

und diese Funktion genügt in der Tat der Gleichung (54), wenn noch

$$\underset{s=0}{L}\; s^{-\alpha}f(s)=0$$

ist. *Zur Entwickelbarkeit ist demnach die Existenz, Stetigkeit (für $s > 0$) und quadratische Integrierbarkeit der Funktion* (55) *und die Existenz des Limes $\underset{s=0}{L}\, s^{-\alpha} f(s)$ hinreichend.* Denn in diesem Fall kann man eine Konstante c so wählen, daß

$$\underset{s=0}{L}\, s^{-\alpha}\left(f(s) - c\Lambda_0^{(\alpha)}(s)\right) = 0$$

wird; dann aber ist nach unsern Überlegungen $f(s) - c\Lambda_0^{(\alpha)}(s)$, also auch $f(s)$ selbst entwickelbar. Damit ist der Fall $\alpha < 0$ gleichfalls erledigt und so eine, wie mir scheint, sehr durchsichtige und auch in ihrem Resultat vollständige Theorie der verallgemeinerten Laguerreschen Polynome gewonnen. Übrigens kann man noch, indem man sich statt des gewöhnlichen des Hellingerschen Integralbegriffs bedient, die im Vorstehenden auftretende Forderung der stetigen Differenzierbarkeit durch eine weniger einschneidende ersetzen.

Wir wenden uns jetzt zu der Darlegung des Zusammenhanges, der zwischen den eben untersuchten Laguerreschen Polynomen und dem für die Besselschen Funktionen gültigen Integraltheorem besteht. Bezeichnet, wie üblich, $J_\nu(x)$ die Besselsche Funktion mit dem reellen Index $\nu > -1$, so schreiben wir

$$\mathfrak{J}_\nu(x) = e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} J_\nu\left(x e^{\frac{\pi i}{2}}\right).$$

Diese Funktion ist für positive Argumentwerte reell und genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d^2(\sqrt{x}\,\mathfrak{J}_\nu(x))}{dx^2} - \left(1 + \frac{4\nu^2 - 1}{4x^2}\right)\sqrt{x}\,\mathfrak{J}_\nu(x) = 0.$$

Wie bekannt ist, gibt es ein von $\mathfrak{J}_\nu(x)$ unabhängiges, gleichfalls in dem eben benutzten Sinne reelles Integral dieser Gleichung, das bei unbegrenzt wachsendem x gegen 0 konvergiert wie $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$; wir bezeichnen es mit $\mathfrak{C}_\nu(x)$, wobei wir es so normiert annehmen, daß

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\,\mathfrak{C}_\nu(x)\right)\cdot\sqrt{x}\,\mathfrak{J}_\nu(x) - \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\,\mathfrak{J}_\nu(x)\right)\cdot\sqrt{x}\,\mathfrak{C}_\nu(x) = -1$$

wird: durch diese Festsetzungen ist $\mathfrak{C}_\nu(x)$ völlig bestimmt. Wir behandeln nunmehr die Theorie des folgenden Kerns

$$(56)\qquad \begin{aligned} K_\nu(s,t) &= \mathfrak{C}_\nu(s)\,\mathfrak{J}_\nu(t)\sqrt{st} \quad (s \geqq t) \\ &= \mathfrak{J}_\nu(s)\,\mathfrak{C}_\nu(t)\sqrt{st} \quad (s \leqq t) \end{aligned} \qquad \left(0 \leqq {s \atop t} < \infty\right),$$

von dem wir mittels des Orthogonalsystems $\Lambda_p^{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}(s)$ zur quadratischen Form $K_\nu(x)$ übergehen. Wir betrachten zunächst die Integralgleichung 1. Art

(57) $$f(s) = \int_0^\infty K_\nu(s,t)\, g(t)\, dt.$$

Aus ihr folgt
$$g(s) = -\frac{d^2 f(s)}{ds^2} + \left(1 + \frac{4\nu^2 - 1}{4s^2}\right) f(s).$$

Damit diese Funktion aber wirklich der Gleichung (57) genügt, muß außerdem

(58) $$\underset{s=0}{L}\left[\sqrt{s}\,\mathfrak{J}_\nu(s)\frac{df(s)}{ds} - f(s)\frac{d}{ds}\left(\sqrt{s}\,\mathfrak{J}_\nu(s)\right)\right] = 0,$$

(58′) $$\underset{s=\infty}{L}\left[\sqrt{s}\,\mathfrak{E}_\nu(s)\frac{df(s)}{ds} - f(s)\frac{d}{ds}\left(\sqrt{s}\,\mathfrak{E}_\nu(s)\right)\right] = 0$$

sein. — Ferner vervollständigen wir die für die Laguerreschen Funktionen aufgestellten Relationen durch die folgenden, aus der Definitionsgleichung leicht zu beweisenden Formeln

$$P_p^{(\alpha)}(s) = s\frac{dP_{p-1}^{(\alpha)}(s)}{ds} + (p + 2\alpha - 2s)\, P_{p-1}^{(\alpha)}(s),$$
$$P_p^{(\alpha)}(s) = [2(p + \alpha - s) - 1]\, P_{p-1}^{(\alpha)}(s) - (p-1)(p + 2\alpha - 1)\, P_{p-2}^{(\alpha)}(s),$$
$$s\frac{d^2 P_p^{(\alpha)}(s)}{ds^2} + (1 + 2\alpha - 2s)\frac{dP_p^{(\alpha)}(s)}{ds} + 2p\, P_p^{(\alpha)}(s) = 0.$$

Wir führen die Rechnung der Einfachheit halber nur für den Fall $\nu = 0$ durch und bestimmen also zunächst die Funktion

$$k_p(s) = \int_0^\infty K_0(s,t)\, \Lambda_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}(t)\, dt;$$

diese genügt notwendig der Gleichung

(59) $$\frac{d^2 k_p(s)}{ds^2} - \left(1 - \frac{1}{4s^2}\right) k_p(s) = -\Lambda_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s).$$

Man übersieht sofort, daß diese Differentialgleichung ein partikuläres Integral von der Form
$$\frac{2e^{-s}\sqrt{s}\, Q_{p+1}(s)}{p!\sqrt{p+1}}$$
besitzt, wo $Q_{p+1}(s)$ ein Polynom $(p+1)^{\text{ten}}$ Grades ist, mithin

$$Q_{p+1}(s) = \alpha_0^{(p)} P_{p+1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s) + \alpha_1^{(p)} P_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s) + \alpha_2^{(p)} P_{p-1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s) + \cdots + \alpha_{p+1}^{(p)} P_0^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s)$$

gesetzt werden darf. $Q_{p+1}(s)$ genügt der Gleichung

(60) $$L(Q_{p+1}) \equiv s\, Q''_{p+1} + (1 - 2s)\, Q'_{p+1} - Q_{p+1} = -s\, P_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s)$$
$$= \frac{1}{2}\left[P_{p+1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s) - 2(p+1)\, P_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s) + p(p+1)\, P_{p-1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s)\right].$$

Die aufgestellten Rekursionsformeln liefern

$$L\left(P_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = -\frac{dP_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{ds} - (2p+1)\,P_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Wenden wir noch zweimal die Rekursionsformel (46) an, so kommt daher

$$\begin{aligned} L(Q_{p+1}) = &-\alpha_0^{(p)}(2p+3)\,P_{p+1}^{\left(\frac{1}{2}\right)} + \left\{2\alpha_0^{(p)}(p+1) - \alpha_1^{(p)}(2p+1)\right\} P_p^{\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &+ \left\{2p\left(\alpha_0^{(p)}(p+1) + \alpha_1^{(p)}\right) - \alpha_2^{(p)}(2p-1)\right\} P_{p-1}^{\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &- \left\{p\left(\alpha_0^{(p)}(p+1) + \alpha_1^{(p)}\right) + \alpha_2^{(p)}\right\} \frac{dP_{p-1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{ds} + L\left(\alpha_3^{(p)} P_{p-2}^{\left(\frac{1}{2}\right)} + \cdots + \alpha_{p+1}^{(p)} P_0^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right). \end{aligned}$$

Vergleicht man auf beiden Seiten von (60) die Koeffizienten der Potenzen s^{p+1}, s^p, s^{p-1}, so erhält man dadurch

$$\alpha_0^{(p)} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{2p+3}, \qquad \alpha_1^{(p)} = \frac{1}{2}\,\frac{(2p+2)^2}{(2p+1)(2p+3)}, \qquad \alpha_2^{(p)} = -\frac{1}{2}\,\frac{p(p+1)}{2p+1}.$$

Diese Größen erfüllen aber die Beziehung

$$p\left(\alpha_0^{(p)}(p+1) + \alpha_1^{(p)}\right) + \alpha_2^{(p)} = 0;$$

es muß infolgedessen

$$L\left(\alpha_3^{(p)} P_{p-2}^{\left(\frac{1}{2}\right)} + \cdots + \alpha_{p+1}^{(p)} P_0^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = 0$$

sein, eine Gleichung, die gewiß erfüllt ist, wenn

$$\alpha_3^{(p)} = \cdots = \alpha_{p+1}^{(p)} = 0$$

genommen wird. Ein partikuläres Integral von (59) liefert uns demnach der Ausdruck

$$\begin{aligned} k_p^*(s) = &-\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{p(p+1)}}{2p+1}\,\Lambda_{p-1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s) + \frac{1}{2}\,\frac{(2p+2)^2}{(2p+1)(2p+3)}\,\Lambda_p^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s) \\ &- \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{(p+1)(p+2)}}{2p+3}\,\Lambda_{p+1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s). \end{aligned}$$

Diese Entwickelungen gelten freilich nur für $p \neq 0$; für $p = 0$ bleibt gleichwohl das erhaltene Resultat in der Form gültig:

$$k_0^*(s) = \frac{2}{3}\,\Lambda_0^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s) - \frac{1}{3\sqrt{2}}\,\Lambda_1^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s).$$

Es ist aber notwendig

$$k_p(s) = k_p^*(s) + \beta_p \cdot \mathfrak{J}_0(s)\sqrt{s} + \gamma_p \cdot \mathfrak{E}_0(s)\sqrt{s}.$$

Da die Limesgleichungen (58), (58′) erfüllt sein müssen, wenn man $k_p(s)$ an Stelle von $f(s)$ setzt, so ergibt sich für die Konstanten β_p, γ_p

$$\beta_p = 0, \qquad \gamma_p = 0.$$

Die dem Kern $K_0(s,t)$ korrespondierende quadratische Form, deren Koeffizienten durch

$$\int_0^\infty\int_0^\infty K_0(s,t)\,\Lambda_{p-1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}(s)\,\Lambda_{q-1}^{\left(\frac{1}{2}\right)}(t)\,ds\,dt$$

gegeben werden, lautet demnach

$$K_0(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}x_1^2+\frac{16}{15}x_2^2+\frac{36}{35}x_3^2+\cdots\right.$$
$$\left.-\sqrt{\frac{8}{9}}x_1x_2-\sqrt{\frac{24}{25}}x_2x_3-\sqrt{\frac{48}{49}}x_3x_4-\cdots\right].$$

Stellen wir die Rechnung allgemeiner für ein beliebiges $\nu>-1$ an, so ergibt sich

$$K_\nu(x)=\frac{1}{2}\sum_{(p)}\frac{(2p+2\nu)^2+2\nu}{(2p+2\nu)^2-1}x_p^2-\sum_{(p)}\frac{\sqrt{p(p+2\nu+1)}}{2p+2\nu+1}x_px_{p+1}.$$

Für $p=1$, $\nu=-\frac{1}{2}$ erscheint der Koeffizient $\frac{(2p+2\nu)^2+2\nu}{(2p+2\nu)^2-1}$ in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$; er ist durch

$$\frac{3}{2}=\underset{\nu=-\frac{1}{2}}{L}\frac{(2+2\nu)^2+2\nu}{(2+2\nu)^2-1}$$

zu ersetzen.

Wir ziehen noch die in der folgenden Weise definierten (Legendreschen) Polynome heran

$$\Pi_p^{(\beta)}(x)=\frac{1}{x^\beta(1-x)^{\beta-1}}\frac{d^p}{dx^p}\left[x^{p+\beta}(1-x)^{p+\beta-1}\right]$$
$$(\beta>0,\qquad 0\leqq x\leqq 1).$$

Aus ihnen leiten sich die Funktionen ab:

$$\psi_p^{(\nu)}(\lambda)=\frac{1}{\Gamma(p+\nu)}\sqrt{\frac{2\,\Gamma(p+2\nu+1)}{\Gamma(p)}}\;\frac{(\lambda-1)^{\frac{\nu}{2}}}{\lambda^{\nu+\frac{1}{2}}}\;\Pi_{p-1}^{(\nu+1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Für ein festes ν bilden $\psi_1^{(\nu)}(\lambda)$, $\psi_2^{(\nu)}(\lambda),\ldots$ ein vollständiges Orthogonalsystem im Intervall $1\leqq\lambda<\infty$. Wie die Rechnung lehrt, ist

$$K_\nu(x)=\int_1^\infty\frac{\left(\psi_1^{(\nu)}(\mu)\,x_1+\psi_2^{(\nu)}(\mu)\,x_2+\cdots\right)^2}{\mu}\,d\mu.$$

Bestimmen wir endlich die zu dem Kern $K_\nu(s,t)$ nach der allgemeinen Theorie gehörige Funktion $\mathsf{A}_\nu(s;\lambda)$, so ergibt sich genau in der beim Kern $e^{-|s-t|}$ beschriebenen Weise

$$\frac{\partial\mathsf{A}_\nu(s;\lambda)}{\partial\lambda}=\sqrt{\frac{s}{2}}\cdot J_\nu\!\left(s\sqrt{\lambda-1}\right)\qquad(\lambda\geqq 1).$$

Damit erscheint das Integraltheorem

$$f(s) = \frac{1}{2}\int_1^\infty \sqrt{s}\, J_\nu(s\sqrt{\lambda - 1}) \int_0^\infty f(t)\sqrt{t}\, J_\nu(t\sqrt{\lambda-1})\, dt\, d\lambda$$

bewiesen für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(s)$, für welche

$$\left[\frac{d^2 f(s)}{ds^2} - \left(1 + \frac{4\nu^2 - 1}{4s^2}\right) f(s)\right]^2$$

im Intervall $0 \cdots \infty$, $|s^{\nu+\frac{1}{2}} f(s)|$ an der Stelle $s = 0$ und $|f''(s)|$ für $s = \infty$ integrabel ist, $f(s)$ und $f'(s)$ im Unendlichen verschwinden und ferner die erste der beiden Bedingungen (58) statthat. Diese Voraussetzungen sind erfüllt, falls $f(s)$ im Unendlichen in normaler Weise von höherer als $\frac{1}{2}$ ter Ordnung verschwindet und an der Stelle $s = 0$ in der Form $s^{\nu+\frac{1}{2}} u(s)$ darstellbar ist, wo $u(s)$ samt seinen beiden ersten Differentialquotienten endlich bleibt und $u'(0) = 0$ ist.

Elmshorn, April 1908.