

BEITRÄGE ZUR  
THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN

VON

H. SCHROETER

in Breslau.

(Auszug aus einem Schreiben an Herrn G. Mittag-Leffler.)

1.

In Ihrer Zeitschrift *Acta mathematica* Bd. I, S. 368, befindet sich eine Note: *Sur une relation donnée par M. Cayley dans la théorie des fonctions elliptiques, par Ch. Hermite*, worin Herr Hermite einen Beweis für die Cayley'sche Relation liefert, der sich stützt auf das Additionstheorem für die zweite Gattung der elliptischen Integrale  $[Z(x)]$ . Die Cayley'sche Relation kann indessen als eine unmittelbare Folge aus dem ursprünglichen Additionstheorem der eigentlichen elliptischen Functionen hergeleitet werden, und ich vermute, dass Cayley auf diesem Wege zu seiner Relation gelangt sein wird. Gestatten Sie mir, in wenigen Zeilen Ihnen diese Herleitung mitzutheilen:

Bekanntlich lässt das Additionstheorem für die elliptischen Functionen u. a. folgende Gestalt zu:<sup>(1)</sup>

$$\operatorname{cn}(u) \cdot \operatorname{cn}(v) = \operatorname{cn}(u + v) + \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v) \operatorname{dn}(u + v)$$

$$\operatorname{dn}(u) \cdot \operatorname{dn}(v) = \operatorname{dn}(u + v) + k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v) \operatorname{cn}(u + v).$$

---

<sup>(1)</sup> C. G. J. Jacobi, *Gesammelte Werke* II, p. 325.

*Acta mathematica.* 5. Imprimé 11 Août 1881.

Sind die vier Argumente  $u, v, r, s$  der Bedingung unterworfen:

$$u + v + r + s = 0,$$

also

$$(u + v) = -(r + s)$$

so haben wir

$$\operatorname{cn}(u + v) = \operatorname{cn}(r + s)$$

$$\operatorname{dn}(u + v) = \operatorname{dn}(r + s)$$

$$\operatorname{cn}(u) \operatorname{cn}(v) = \operatorname{cn}(u + v) + \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v) \operatorname{dn}(u + v)$$

$$\operatorname{cn}(r) \operatorname{cn}(s) = \operatorname{cn}(r + s) + \operatorname{sn}(r) \operatorname{sn}(s) \operatorname{dn}(r + s)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}(u) \operatorname{cn}(v) \operatorname{cn}(r) \operatorname{cn}(s) &= \operatorname{cn}^2(u + v) + \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v) \operatorname{sn}(r) \operatorname{sn}(s) \operatorname{dn}^2(u + v) \\ &+ \{\operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v) + \operatorname{sn}(r) \operatorname{sn}(s)\} \operatorname{cn}(u + v) \operatorname{dn}(u + v) \end{aligned}$$

$$\operatorname{dn}(u) \operatorname{dn}(v) = \operatorname{dn}(u + v) + k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v) \operatorname{cn}(u + v)$$

$$\operatorname{dn}(r) \operatorname{dn}(s) = \operatorname{dn}(r + s) + k^2 \operatorname{sn}(r) \operatorname{sn}(s) \operatorname{cn}(r + s)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}(u) \operatorname{dn}(v) \operatorname{dn}(r) \operatorname{dn}(s) &= \operatorname{dn}^2(u + v) + k^4 \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v) \operatorname{sn}(r) \operatorname{sn}(s) \operatorname{cn}^2(u + v) \\ &+ k^2 \{\operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v) + \operatorname{sn}(r) \operatorname{sn}(s)\} \operatorname{cn}(u + v) \operatorname{dn}(u + v). \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} &k^2 \operatorname{cn}(u) \operatorname{cn}(v) \operatorname{cn}(r) \operatorname{cn}(s) - \operatorname{dn}(u) \operatorname{dn}(v) \operatorname{dn}(r) \operatorname{dn}(s) \\ &= \{k^2 \operatorname{cn}^2(u + v) - \operatorname{dn}^2(u + v)\} \{1 - k^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v) \operatorname{sn}(r) \operatorname{sn}(s)\} \end{aligned}$$

und da

$$k^2 \operatorname{cn}^2(u + v) - \operatorname{dn}^2(u + v) = -k'k'$$

ist, so folgt die CAYLEY'sche Relation:

$$\begin{aligned} &-k^2 k'^2 \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v) \operatorname{sn}(r) \operatorname{sn}(s) + k^2 \operatorname{cn}(u) \operatorname{cn}(v) \operatorname{cn}(r) \operatorname{cn}(s) \\ &- \operatorname{dn}(u) \operatorname{dn}(v) \operatorname{dn}(r) \operatorname{dn}(s) + k'k' = 0. \end{aligned} \quad (u+v+r+s=0)$$

Andererseits springt es unmittelbar in die Augen, dass diese Relation als

specieller Fall aus dem bekannten Fundamental-Theorem für das Product von vier Thetafunctionen sich ergibt<sup>(1)</sup>:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \vartheta_1(w') \vartheta_1(x') \vartheta_1(y') \vartheta_1(z') \\ &= \vartheta_3(w) \vartheta_3(x) \vartheta_3(y) \vartheta_3(z) - \vartheta_2(w) \vartheta_2(x) \vartheta_2(y) \vartheta_2(z) - \vartheta(w) \vartheta(x) \vartheta(y) \vartheta(z) \\ &+ \vartheta_1(w) \vartheta_1(x) \vartheta_1(y) \vartheta_1(z) \end{aligned}$$

wo

$$w' = \frac{1}{2}(w + x + y + z)$$

$$x' = \frac{1}{2}(w + x - y - z)$$

$$y' = \frac{1}{2}(w - x + y - z)$$

$$z' = \frac{1}{2}(w - x - y + z)$$

ist, wenn man  $w' = \frac{1}{2}(w + x + y + z) = 0$  setzt und die Verhältnisse der Thetafunctionen durch die elliptischen Functionen ersetzt:

$$\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{k} \cdot \operatorname{sn}(u), \quad \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{\frac{k}{k'}} \operatorname{cn}(u), \quad \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \frac{1}{\sqrt{k'}} \operatorname{dn}(u).$$

Verbindet man mit der vorigen Thetaformel die zweite:

$$\begin{aligned} & 2 \vartheta(w') \vartheta(x') \vartheta(y') \vartheta(z') \\ &= \vartheta_3(w) \vartheta_3(x) \vartheta_3(y) \vartheta_3(z) + \vartheta(w) \vartheta(x) \vartheta(y) \vartheta(z) - \vartheta_2(w) \vartheta_2(x) \vartheta_2(y) \vartheta_2(z) \\ &- \vartheta_1(w) \vartheta_1(x) \vartheta_1(y) \vartheta_1(z) \end{aligned}$$

so ergibt der Quotient eine Formel für die elliptischen Functionen, welche für vier unbeschränkte Argumente  $u, v, r, s$  Gültigkeit hat und also lautet:

$$\begin{aligned} & k^2 \operatorname{sn}\left(\frac{u+v+r+s}{2}\right) \operatorname{sn}\left(\frac{u+v-r-s}{2}\right) \operatorname{sn}\left(\frac{u-v+r-s}{2}\right) \operatorname{sn}\left(\frac{u-v-r+s}{2}\right) \\ &= \frac{\operatorname{dn}(u) \operatorname{dn}(v) \operatorname{dn}(r) \operatorname{dn}(s) - k^2 \operatorname{cn}(u) \operatorname{cn}(v) \operatorname{cn}(r) \operatorname{cn}(s) + k^2 k' k' \cdot \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v) \operatorname{sn}(r) \operatorname{sn}(s) - k' k'}{\operatorname{dn}(u) \operatorname{dn}(v) \operatorname{dn}(r) \operatorname{dn}(s) - k^2 \operatorname{cn}(u) \operatorname{cn}(v) \operatorname{cn}(r) \operatorname{cn}(s) - k^2 k' k' \cdot \operatorname{sn}(u) \operatorname{sn}(v) \operatorname{sn}(r) \operatorname{sn}(s) + k' k'} \end{aligned}$$

u. s. w.

<sup>(1)</sup> C. G. J. JACOBI, Gesammelte Werke I, p. 507.

## 2.

Bei dieser Gelegenheit gestatten Sie mir, Ihre Aufmerksamkeit noch auf einen andern Punkt der Theorie der elliptischen Functionen zu lenken.

Ein eigenthümliches Interesse bieten nämlich ihrer einfachen Gestalt wegen die irrationalen Formen der Modulargleichungen für die Transformation der Ordnungen  $(3 \cdot 2^n - 1)$  der elliptischen Functionen, die sich gegenwärtig so gestalten:

$$\text{Transf. der } 5^{\text{ten}} \text{ Ordn.: } x\lambda + x_1\lambda_1 + 2\sqrt[3]{4x\lambda x_1\lambda_1} = 1 \quad \left( \begin{matrix} x^2 + x_1^2 = 1 \\ \lambda^2 + \lambda_1^2 = 1 \end{matrix} \right)$$

$$\text{Transf. der } 11^{\text{ten}} \text{ Ordn.: } \sqrt{x\lambda} + \sqrt{x_1\lambda_1} + 2\sqrt[6]{4x\lambda x_1\lambda_1} = 1$$

$$\text{Transf. der } 23^{\text{ten}} \text{ Ordn.: } \sqrt[4]{x\lambda} + \sqrt[4]{x_1\lambda_1} + \sqrt{2\sqrt[12]{4x\lambda x_1\lambda_1}} = 1$$

(letztere von AD. HURWITZ angegeben in F. KLEIN, Sitzungsberichte der Münchener Acad. der Wiss. 6 Dec. 1879 und aus der von mir in CRELLE's Journal Bd. 58, S. 378 angegebenen complicirteren Form leicht abzuleiten), welche eine gewisse Analogie darbieten mit den längst bekannten Modulargleichungen für die

$$\text{Transf. der } 3^{\text{ten}} \text{ Ordn.: } \sqrt{x\lambda} + \sqrt{x_1\lambda_1} = 1$$

$$\text{Transf. der } 7^{\text{ten}} \text{ Ordn.: } \sqrt[4]{x\lambda} + \sqrt[4]{x_1\lambda_1} = 1.$$

Es liegt nahe, nach diesen Formen ein allgemeineres zu Grunde liegendes Gesetz zu vermuthen, allein ein solches scheint doch hier nicht stattzufinden, sondern nur in diesen wenigen ersten Fällen gestalten sich die Modulargleichungen so ausserordentlich einfach; die von GAUSS<sup>(1)</sup> herührende Form der Modulargleichung für die Transf. der 5<sup>ten</sup> Ordn. scheint JACOBI nicht gekannt zu haben.<sup>(2)</sup>

Breslau, 21 Juni 1884.

---

<sup>(1)</sup> C. F. GAUSS, Werke Bd. III, S. 475. Vrgl. auch W. GOERING: *Untersuchungen über die Theilwerthe der JACOBI'schen Thetafunctionen und die im GAUSS'schen Nachlasse mitgetheilten Beziehungen derselben.* Mathematische Annalen, Bd. VII, S. 340.

<sup>(2)</sup> Vrgl. die Bemerkung JACOBI's im 37<sup>ten</sup> Bd. des CRELLE'schen Journals S. 249.

---