

Zur Theorie der Kreisdiagramme.

Von

W. O. Schumann.

Bei der Ableitung und Auswertung der Kreisdiagramme macht sich in den letzten Jahren immer mehr das Bestreben geltend, unmittelbar aus dem komplexen Ausdruck das Diagramm mit all seinen Bestimmungsstücken zu entwickeln, ohne den Umweg über einige Inversionen oder längere geometrische Ähnlichkeitsbetrachtungen nehmen zu müssen¹⁾. Im folgenden möchte ich zeigen, wie man mit Zuhilfenahme einiger elementarer Tatsachen aus der Vektoranalysis und der vektoriellen Auffassung der komplexen Zahlen die wichtigsten Bestimmungsstücke des Kreises leicht ableiten kann.

Die allgemeinste Form, in der ein Kreis in der komplexen Ebene abhängig von einem reellen Parameter v gegeben sein kann, ist

$$z = \frac{\mathfrak{A}v + \mathfrak{B}}{\mathfrak{C}v + \mathfrak{D}} \quad (1)$$

wo \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} beliebige komplexe Konstanten bedeuten. Zwei Punkte des Kreises sind sofort bestimmt:

$$\begin{aligned} v = 0. & \quad z_k = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} \\ v = \infty. & \quad z_0 = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}. \end{aligned} \quad (2)$$

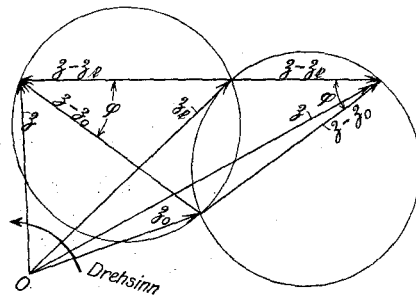


Bild 1.

Wünscht man den Kreis selbst zu bestimmen, so kann das zunächst geschehen, indem man nach dem Peripheriewinkel fragt, den die Sehnen über z_k z_0 nach einem beliebigen Kreispunkt einschließen. Ist z der laufende Punkt des Kreises so ergeben sich die von den Punkten z_0 und z_k auf ihn zulaufenden Sehnen zu

$$\begin{aligned} z - z_0 &= \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C} - \mathfrak{D}\mathfrak{A}}{(\mathfrak{C}v + \mathfrak{D})\mathfrak{C}} \\ z - z_k &= v \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}}{(\mathfrak{C}v + \mathfrak{D})\mathfrak{D}}. \end{aligned} \quad (3)$$

und

Das Verhältnis dieser beiden Vektoren ist

$$\frac{z - z_k}{z - z_0} = -v \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}. \quad (4)$$

¹⁾ Siehe z. B. O. Bloch, Die Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik, 1917, Zürich und W. Michael, Zur Geometrie der Ortskurven der graphischen Wechselstromtheorie, Diss. Zürich, 1919

Das Argument der komplexen Zahl $-\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}$ gibt den Winkel φ an, den die beiden Sehnen miteinander einschließen.

$$e^{j\varphi} = \frac{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}}}{\left| \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{D}} \right|} \quad (\pi > |\varphi| > 0). \quad (5)$$

Auf welcher Seite der Sehne der Mittelpunkt des Kreises liegt, ergibt sich aus einer einfachen geometrischen Betrachtung (Bild 1). Es sei das Argument von \mathfrak{z}_k größer als das von \mathfrak{z}_0 ($\varphi_k > \varphi_0$, Voreilungswinkel seien positiv gemessen). Dann eilt $\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0$ gegenüber $\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_k$ vor, wenn der Kreis von \mathfrak{z}_k ($v=0$) ausgehend in negativem Drehsinn umlaufen wird, der Winkel φ wird negativ, gleichgültig ob $|\varphi| \geq \frac{\pi}{2}$. Dasselbe gilt auch, wenn \mathfrak{z}_0 und \mathfrak{z}_k gleichphasig sind und $|\mathfrak{z}_k| > |\mathfrak{z}_0|$.

Wird der Kreis dagegen von \mathfrak{z}_k ausgehend im positiven Drehsinn durchlaufen, so eilt $\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_k$ gegen $\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0$ vor, der Winkel φ ist positiv. Ist $\varphi_k < \varphi_0$, so kehrt sich alles um. Je nach der Größe und dem Vorzeichen von φ und der relativen Lage von \mathfrak{z}_0 und \mathfrak{z}_k ist auch die Richtung nach dem Mittelpunkt festgelegt.

Die Berechnung des Kreisradius selbst ergibt sich aus einer vektoriellen Betrachtung. Ist \mathfrak{z} der Vektor vom Ursprung an einem Kreispunkt und s die von irgendeinem Kurvenpunkt aus gemessene Kurvenlänge, so ist

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dv} = t \cdot \frac{ds}{dv} \quad (6)$$

wo t den Tangenteneinheitsvektor an der Stelle \mathfrak{z} bedeutet (s. z. B. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung, S. 57 ff., Bloch, S. 98). Eine nochmalige Differentiation nach v ergibt

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} = t \frac{d^2s}{dv^2} + \frac{ds}{dv} \cdot \frac{dt}{dv} \quad (7)$$

Da

$$dt = d\theta \cdot n, \quad (8)$$

wenn n den Einheitsvektor in der Richtung der Normalen bedeutet und $d\theta$ den Kontingenzwinkel, und da

$$R d\theta = ds, \quad (9)$$

wo R der Krümmungsradius an der betreffenden Stelle und ds das Kurvenelement, wird

$$\frac{dt}{dv} = n \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{ds}{dv} \quad (10)$$

und schließlich aus (7)

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} = t \frac{d^2s}{dv^2} + n \frac{1}{R} \left(\frac{ds}{dv} \right)^2. \quad (11)$$

Wird nun das Vektorprodukt aus $\frac{d\mathfrak{z}}{dv}$ und $\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2}$ gebildet, so geben die Produkte von $[t, t]$ den Wert Null und man erhält

$$\left[\frac{d\mathfrak{z}}{dv}, \frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} \right] = [t, n] \cdot \frac{1}{R} \left(\frac{ds}{dv} \right)^3. \quad (12)$$

Dividieren wir noch durch die dritte Potenz des Absolutbetrages von $\frac{d\mathfrak{z}}{dv}$, so entsteht

$$\frac{1}{R} [t, n] = \frac{\left[\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}, \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2} \right]}{\left| \frac{d\mathfrak{Z}}{dv} \right|^3} \quad (13)$$

und damit ist der Krümmungsradius bestimmt. Ist das Vorzeichen des Ausdrucks rechts positiv, so wird die Kurve an der Stelle im Sinne der positiven Drehung durchlaufen, im andern Falle entgegengesetzt. Wenden wir nun Gleichung (13) auf Gleichung (1) an, so erhalten wir

$$\frac{d\mathfrak{Z}}{dv} = \frac{\mathfrak{U}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}^1}{(\mathfrak{C}v + \mathfrak{D})^2} \quad (14)$$

$$\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2} = -2 \frac{(\mathfrak{U}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C})}{(\mathfrak{C}v + \mathfrak{D})^3} \mathfrak{C}. \quad (15)$$

Das Vektorprodukt läßt sich bei komplexen Vektoren sehr einfach darstellen. Es sei

$$\mathfrak{U} = A e^{j\varphi} \quad \mathfrak{B} = B e^{j\psi} \quad (16)$$

und der zu \mathfrak{B} konjugierte Vektor

$$\mathfrak{B}_k = B e^{-j\psi}, \quad (17)$$

so ist das Vektorprodukt

$$[\mathfrak{U}\mathfrak{B}] = -\Im(\mathfrak{U}\mathfrak{B}_k) = -AB \sin(\varphi - \psi) \quad (18)$$

nach Größe und Richtung.

Damit wird

$$\left[\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}, \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2} \right] = \Im \left[-\frac{d\mathfrak{Z}}{dv} \left(\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2} \right)_k \right] = \Im \left\{ 2 \frac{(\mathfrak{U}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C})(\mathfrak{U}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C})_k \cdot \mathfrak{C}_k}{(\mathfrak{C}v + \mathfrak{D})^2 [(\mathfrak{C}v + \mathfrak{D})^3]_k} \right\}. \quad (19)$$

Nun ist

$$|\mathfrak{U}^3|_k = |A^3 e^{3j\varphi}|_k = A^3 e^{-3j\varphi} = (A e^{-j\varphi})^3 = |\mathfrak{U}_k|^3, \quad (20)$$

was demnach für gerade Potenzen nicht mehr zutrifft, und es ist

$$\mathfrak{U}^2 \mathfrak{U}_k^2 = A^2 e^{2j\varphi} \cdot A^2 \cdot e^{-2j\varphi} = A^4 = |\mathfrak{U}|^4, \quad (21)$$

so daß aus (19) folgt

$$\Im \left[-\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}, \left(\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2} \right)_k \right] = \Im \left\{ 2 \frac{|\mathfrak{U}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}|^2 \cdot \mathfrak{C}_k}{|\mathfrak{C}v + \mathfrak{D}|^4 (\mathfrak{C}v + \mathfrak{D})_k} \right\} \quad (22)$$

und schließlich

$$\frac{\left[\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}, \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2} \right]}{\left| \frac{d\mathfrak{Z}}{dv} \right|^3} = \Im \left\{ 2 \frac{|\mathfrak{C}v + \mathfrak{D}|^2 \cdot \mathfrak{C}_k}{|\mathfrak{U}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}| \cdot (\mathfrak{C}v + \mathfrak{D})_k} \right\}. \quad (23)$$

Nun wird, da

$$|\mathfrak{C}v + \mathfrak{D}|^2 = (\mathfrak{C}v + \mathfrak{D})(\mathfrak{C}v + \mathfrak{D})_k. \quad (24)$$

$$\frac{1}{R} [t, n] = \Im \left\{ 2 \frac{(\mathfrak{C}v + \mathfrak{D}) \mathfrak{C}_k}{|\mathfrak{U}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}|} \right\} \quad (25)$$

und da $\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{C}_k$ reell ist und zum imaginären Teil nichts liefert, entsteht schließlich

$$\frac{1}{R} [t, n] = \Im \left\{ 2 \frac{\mathfrak{C}_k \cdot \mathfrak{D}}{|\mathfrak{U}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}|} \right\}$$

$$\frac{1}{R} [t, n] = \frac{2}{|\mathfrak{U}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}|} \cdot \Im(\mathfrak{C}_k \mathfrak{D}). \quad (26)$$

¹⁾ Die Größen $\mathfrak{U}\mathfrak{B}$ bzw. \mathfrak{U}^2 sind als komplexe Zahlen hier vektoriell aufzufassen. Das skalare Produkt $(\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{B})$ ist durch $\Re(\mathfrak{U}\mathfrak{B}_k) = \Re(\mathfrak{U}_k \mathfrak{B})$ darzustellen.

Mit der Bestimmung des Radius ist auch der Radiusvektor nach dem Kreismittelpunkt bestimmt.

Fassen wir etwa einen bestimmten Kreispunkt ins Auge, z. B. den Punkt für $v = 0$, $\mathfrak{Z}_k = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$, so ist dort

$$\frac{d\mathfrak{Z}}{dv} = \frac{\mathfrak{U}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}^2}. \quad (27)$$

Vor dem Punkte \mathfrak{Z}_k haben wir einen Strahl von der Länge R zu ziehen, senkrecht auf der Tangentenrichtung in diesem Punkte. Die Tangentenrichtung ist durch das Argument von $\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}$ bestimmt. Haben wir eine Kurve, die mit wachsendem v im positiven Drehsinn durchlaufen wird ($\frac{1}{R} [tn] > 0$), so ist die Richtung von $\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}$ um 90° im Sinne der Voreilung zu drehen (Multiplikation mit $+j$), im andern Falle im Sinne der Nacheilung.

Wenn wir den Radiusvektor vom Ursprung mit \mathfrak{M} bezeichnen, ergibt sich danach für beide Fälle

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} + R j e^{j\psi}. \quad (28)$$

ψ bedeutet darin den Phasenwinkel von $\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}$. Für R lassen wir im Sinne der Gleichung (26) positive und negative Vorzeichen zu. Ist $\mathfrak{U} = A e^{j\psi}$, so ergibt sich der Phasenwinkel zu

$$e^{j\psi} = \frac{\mathfrak{U}}{|\mathfrak{U}|}. \quad (29)$$

Damit wird nach (26) und (27) mit (28)

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} + \frac{|\mathfrak{U}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}|}{2 \Im(\mathfrak{C}_k \mathfrak{D})} \cdot \frac{\mathfrak{U}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}}{|\mathfrak{U}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}|} \cdot \frac{|\mathfrak{D}^2|}{\mathfrak{D}^2} j. \quad (30)$$

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} + j \cdot \frac{\mathfrak{U}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}}{2 \Im(\mathfrak{C}_k \mathfrak{D})} \frac{|\mathfrak{D}|^2}{\mathfrak{D}^2} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} + j \frac{\mathfrak{U}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}}{2 \Im(\mathfrak{C}_k \mathfrak{D})} \cdot \frac{\mathfrak{D}_k}{\mathfrak{D}}. \quad (31)$$

Schließlich wünscht man im Diagramm noch eine einfache Konstruktion zu haben, die zu jedem v das zugehörige \mathfrak{Z} ergibt. Auch dies läßt sich einfach erreichen¹⁾. Da jeder Kreis als durch die Inversion einer Geraden entstanden gedacht werden kann, muß durch Verschiebung des Koordinatenursprungs immer eine Form möglich sein, wie folgende Gleichung angibt:

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{U}v + \mathfrak{B}}{\mathfrak{C}v + \mathfrak{D}} = \mathfrak{C} + \frac{\alpha}{\mathfrak{C}v + \mathfrak{D}} \quad (32)$$

\mathfrak{C} ist der Vektor der Verschiebung des Koordinatenursprungs, $|\alpha|$ die Inversionspotenz bei der Inversierung der Geraden $\mathfrak{C}v + \mathfrak{D}$ in bezug auf diesen neuen Ursprung. Dabei müssen \mathfrak{C} und α von v unabhängig sein. Aus (32) folgt

$$\mathfrak{U}v + \mathfrak{B} = \mathfrak{C}(\mathfrak{C}v + \mathfrak{D}) + \alpha. \quad (33)$$

Den obigen Bedingungen kann man Genüge leisten durch

$$\mathfrak{U}v = \mathfrak{C}\mathfrak{C}v, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{C}\mathfrak{D} + \alpha, \quad (34)$$

woraus folgt

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{C}} = \mathfrak{Z}_0. \quad (35)$$

und

¹⁾ Siehe auch Bloch, S. 44.

$$\alpha = \mathfrak{B} - \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{C}} \cdot \mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathfrak{J}_k - \mathfrak{J}_0). \quad (36)$$

Durch \mathfrak{C} ist der Pol bestimmt, von dem aus die Gerade $\mathfrak{C}v + \mathfrak{D}$ invertiert wird. Da mit der Inversion stets eine Spiegelung verbunden ist, wird man gleich die an der reellen Achse gespiegelte Gerade $\mathfrak{C}_k v + \mathfrak{D}_k$ in bezug auf den neuen Ursprung \mathfrak{C} einzeichnen, damit entsprechende Punkte auf Strahlen durch den Endpunkt von \mathfrak{C} liegen. Aus (36) ersieht man, daß allgemein zu der Inversion auch noch eine Drehung hinzukommt, die durch das Argument von α bestimmt ist. Im Diagramm kann man sie von vornherein berücksichtigen, indem man die gespiegelte Gerade um den Winkel χ nach vorwärts dreht, wenn χ das Argument von α bedeutet. Auf der Geraden gilt in bekannter Weise der lineare Maßstab für v . Man kann entweder die Gerade $\mathfrak{C}v + \mathfrak{D}$ mit Spiegelung und Drehung maßstäblich einzeichnen, oder man zieht sie in der vorgeschriebenen Richtung durch einen beliebigen Punkt des Kreises, z. B. \mathfrak{J}_k und bestimmt einen zweiten Punkt durch numerische Ausrechnung und Inversion aus dem Kreise. Durch die beiden Punkte auf der Geraden ist dann die Maßstabsskala für v festgelegt. Verlust- und Leistungsdarstellung ergeben sich dann aus dem Diagramm in bekannter Weise (s. z. B. Le Cocq, Rév. Gén. d'El. 85, 483, 1921, A. Blendel, Rév. G. E. 6, 1921).

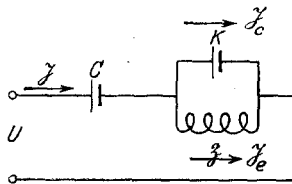


Bild 2.

Beispiel.

Als Beispiel wähle ich den von Petersen, ETZ. 1916, S. 129 angegebenen Stromkreis, Bild 2. Nach dem Bild ergibt sich in bekannter Weise

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{U} \omega C \frac{j \omega k \mathfrak{J} + 1}{\omega \mathfrak{J} (k + C) - j}$$

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{U}' \frac{j \omega k \mathfrak{J} + 1}{\omega \mathfrak{J} k \alpha - j}$$

wo $\alpha = \frac{k + C}{k}$ und $\mathfrak{U}' = \mathfrak{U} \omega C$.

$\mathfrak{J} = z e^{j\psi}$ möge sich nur in seiner Größe, aber nicht in seiner Phase ändern. Dann wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &= \mathfrak{U}' \frac{j \omega k e^{j\psi} z + 1}{\omega e^{j\psi} k \alpha z - j} \\ z = 0. & \quad \mathfrak{J}_k = \mathfrak{U}' j. \\ z = \infty. & \quad \mathfrak{J}_0 = \mathfrak{U}' \cdot \frac{j}{\alpha}. \end{aligned}$$

I. Der Peripheriewinkel über der Sehne $\mathfrak{J}_0 \mathfrak{J}_k$.

Nach Gleichung (4) ist

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_k}{\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_0} &= - \frac{z \mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = -j \omega k \alpha z e^{j\psi}, \\ &= \omega k \alpha z e^{-j\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)}. \end{aligned}$$

Der Argumentwinkel ist spitz und negativ. Der größere Teil des Kreises ist das Arbeitsgebiet ($z = 0$ bis $z = +\infty$). $\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_k$ eilt gegen $(\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_0)$ nach. Da \mathfrak{J}_k und \mathfrak{J}_0 gleichphasig sind und $|\mathfrak{J}_k| > |\mathfrak{J}_0|$, wird der Kreis von \mathfrak{J}_k ausgehend im negativen Drehsinn durchlaufen. Der Zentriwinkel ist dann $\pi - 2\psi$ und die der Sehne anliegenden Winkel der Radien nach dem Mittelpunkt haben die Größe ψ (s. Bild 3).

Das Inversionszentrum ist wie immer der Leerlaufstrom. Die Inversionspotenz ist reell, wenn wir \mathfrak{U}' als reellen Bezugsvektor wählen. Die zu invertierende Gerade hat die Gleichung

$$\mathfrak{C}z + \mathfrak{D} = \omega k \alpha e^{j\psi} z - j.$$

Sie schließt den Winkel ψ mit der reellen Ordinatenachse ein. Ihr Spiegelbild ist unter dem Winkel $\frac{\pi}{2} - \psi$ gegen die Abszissenachse geneigt. Dessen Gleichung ist

$$\omega k \alpha e^{-j\psi} z + j$$

(s. Bild 3, Gerade I). Liegt sie zur Konstruktion ungünstig, so kann man etwa die Gerade $\mathfrak{U}' \omega k \alpha e^{-j\psi} z + \mathfrak{U}' j$ (s. Bild 3) wählen und auf dieser die Werte für $z = 1, 2, 3$ usw. auftragen. Die Inversionspotenz wird dann $U'^2 \frac{\alpha - 1}{\alpha}$.

Zusatz: Wie mir Herr Professor P. Koebe freundlichst mitteilt, lassen sich Mittelpunkt und Radius des Kreises nach den allgemeinen Gesetzen der konformen Abbildung sehr einfach bestimmen. Faßt man v als komplexe Variable auf, so entspricht dem Punkte $v = -\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}}$ der unendlich ferne Punkt von \mathfrak{Z} , $\mathfrak{Z} = \infty$. Der konjugierte Wert v_k geht nun nach den Gesetzen der konformen Abbildung in den Kreismittelpunkt über. Es wird also

$$\mathfrak{M} = \frac{-\Re \frac{\mathfrak{D}_k}{\mathfrak{C}_k} + \mathfrak{B}}{-\mathfrak{C} \frac{\mathfrak{D}_k}{\mathfrak{C}_k} + \mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{B} \mathfrak{C}_k - \Re \mathfrak{D}_k}{\mathfrak{D} \mathfrak{C}_k - \mathfrak{C} \mathfrak{D}_k}. \quad (37)$$

Diese Formel geht in (31) über, wenn man berücksichtigt, daß

$$\mathfrak{D} \mathfrak{C}_k - \mathfrak{C} \mathfrak{D}_k = 2j \Im(\mathfrak{C}_k \mathfrak{D}) = -2j \Im(\mathfrak{C} \mathfrak{D}_k)$$

ist. Der Kreisradius ergibt sich dann durch den Abstand $\mathfrak{Z}_k - \mathfrak{M}$ (s. S. 143, oben):

$$R = \left| \frac{\mathfrak{B} \mathfrak{C}_k - \Re \mathfrak{D}_k}{\mathfrak{D} \mathfrak{C}_k - \mathfrak{C} \mathfrak{D}_k} - \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} \right|$$

$$R = \left| -\frac{\Re \mathfrak{D} - \mathfrak{B} \mathfrak{C}}{\mathfrak{D} \mathfrak{C}_k - \mathfrak{C} \mathfrak{D}_k} \cdot \left| \frac{\mathfrak{D}_k}{\mathfrak{D}} \right| \right|. \quad (38)$$

Da

$$\left| \frac{\mathfrak{D}_k}{\mathfrak{D}} \right| = 1$$

ist, und

$$|\mathfrak{D} \mathfrak{C}_k - \mathfrak{C} \mathfrak{D}_k| = 2 |\Im(\mathfrak{C}_k \mathfrak{D})|$$

ergibt sich daraus Gleichung (26), wenn man vom Vorzeichen absieht.