Vollständige Theorie der Riemann'schen ϑ-Function.

Von

E. B. Christoffel †.

Einleitung.

Die vorliegende Darstellung der Lehre von der ϑ-Function geht nicht den üblichen Weg. In der Theorie, so wie sie bis jetzt ausgebildet vorliegt, richtet sich die Untersuchung ausschliesslich auf die Summe der Jacobi'schen Reihe mit den Moduln und Argumenten Riemann's; sie liefert Lehrsätze über die Fälle, wo diese Summe identisch Null und wo sie es nicht ist, und über ihr Verhalten im letztern Falle, ohne grundsätzliche Scheidung der beiden Voraussetzungen, unter denen die ϑ-Function zur Verwendung kommen kann.

Ein solches Bedürfniss macht sich sofort geltend wenn man, über die Darstellung der algebraischen Functionen und ihrer Integrale hinausgehend, die ϑ-Function benutzt, um die Existenz ausgezeichneter Functionen darzuthun*). Das erste Beispiel, welches in dieser Beziehung aufgestellt worden ist, zeigt klar, um was es sich hierbei handelt.

Man bilde mit Riemann**) einen Ausdruck von der Form

$$\tau = e^{\Sigma \alpha_\mu u_\mu} \frac{\vartheta((u_\mu - f_\mu))}{\vartheta((u_\mu - e_\mu))},$$

und bestimme den Nenner so, dass τ in p vorgeschriebenen Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ zur ersten Ordnung unendlich wird, und hierauf die Constanten im Exponenten von e und die Parameter $f_1 f_2 \cdots f_p$ des Zählers so, dass τ an den Querschnitten vorgeschriebene Einheitswurzeln ausscheidet.

Die Existenz einer solchen Function τ ist dann für diejenigen Fälle gesichert, wo keiner der beiden Ausdrücke $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$, $\vartheta((u_\mu - f_\mu))$ identisch Null ist, was beim ersten von der Wahl seiner Nullpunkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ abhängt, beim andern von den Werthen der durch die Aufgabe geforderten

*) Riemann, Ueber das Verschwinden der ϑ-Functionen, Borchardt's Journal 65, Seite 172.

**) Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen, art. 27, Borchardt's Journal 54.

Parameter $f_1 f_2 \cdots f_p$. Das sind zwei durchaus verschiedene Fragen; ihre Entscheidung gründet sich auf Kriterien, im einen Falle für die Lagerung der Nullpunkte, im andern für die Werthe der Parameter, und in beiden Fällen kommt es sehr darauf an ob die Kriterien, welche für die Prüfung beider Fragen geboten werden, diese Prüfung auch gestatten.

Ich ziehe daraus vor allen Dingen den Schluss, dass die Theorie der ϑ-Functionen, wofern ihr eine unbeschränkte Verwendbarkeit gesichert werden soll, nach zwei Richtungen ausgebildet werden muss, einmal indem man die Function durch ihre Nullpunkte, das anderemal, indem man sie durch ihre Parameter bestimmt denkt.

Für eine lückenfreie Ausführung der Theorie in diesem Sinne dürfte es noch nicht zu spät sein. Dass eine solche auch die bekannten Resultate liefern muss, versteht sich von selbst; ich finde aber auch Resultate, welche darüber hinausgehen, unter Anderm den folgenden Zusatz:

> Wird der Begriff einer ϑ-Function nicht an ihre Ausdrucksform geknüpft, sondern an ihre massgebenden Eigenschaften, nämlich ihr Verhalten an den Querschnitten und im Innern der einfach zusammenhängenden Fläche T', der sie zugeordnet ist, so existirt eine solche Function unter allen Umständen, wie auch immer ihre Nullpunkte oder ihre Parameter vorgeschrieben werden mögen.

Daraus folgt z. B., dass die oben beschriebene *algebraische* Function τ unter allen Umständen existirt, auch wenn vermöge der Wahl ihrer Unstetigkeitspunkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ oder der durch die Aufgabe geforderten Parameter $f_1 f_2 \cdots f_p$ der Riemann'sche Ausdruck für die betreffende ϑ-Function versagt, nämlich identisch Null wird.

Freilich wird man bei dieser Auffassung der Function ϑ sich nicht an eine bevorzugte Ausdrucksform für dieselbe binden dürfen. Soll sie durch die Normalintegrale $u_1 u_2 \cdots u_p$ ausgedrückt werden, was in allen Fällen möglich ist, so wechselt in der That ihr Ausdruck durch eine unendliche Reihe je nach der Lagerung ihrer Nullpunkte oder der Wahl ihrer Parameter; verzichtet man aber darauf, sie in Function von $u_1 u_2 \cdots u_p$ auszudrücken, so kann man, wie das Alles im Folgenden ausgeführt werden werden wird, sie auch durch einen Ausdruck darstellen, welcher in allen Fällen dieselbe Form behält.

Dies führt zu unserm Ausgangspunkte zurück. Zum Zweck von Existenzbeweisen kann man über die ϑ-Function in dieser freilich nicht durch eine bevorzugte Ausdrucksform beschränkten Auffassung verfügen; für die wirkliche Darstellung algebraischer Functionen und ihrer Integrale dagegen verwende ich ausschliesslich die Riemann'sche Reihe, da diese Darstellung die einzige ist, in welche keine überflüssigen Irrationalitäten und namentlilch nur einerlei Irrationalitäten, nämlich die Werthe der Normalintegrale I. G. (nebst Differenzen derselben, den Periodicitätsmoduln) eingehen.

Nach dem Gesagten, wird eine kurze Uebersicht genügen, um den Gang meiner Untersuchungen darzulegen. Die Arbeit zerfällt in fünf Abschnitte.

Nach einer Vorbemerkung über die Convergenz der ϑ-Reihe so wie über die Stetigkeit und die Vollwerthigkeit ihrer Summe wird im I. Abschnitte der Fall vorgesehen, dass die Summe der Riemann'schen Reihe $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ vermöge der Wahl der Parameter $e_1 e_2 \cdots e_p$ identisch Null ist, und für diesen Fall ein Ausdruck $\vartheta_\varrho((u_\mu - e_\mu))$ nachgewiesen, welcher, ohne identisch zu verschwinden, eine ϑ-Function mit diesen Parametern darstellt. Dieser Ausdruck ist aber durch die Parameter nicht völlig bestimmt, da er ausser diesen noch andere verfügbare Constanten enthält. Im angegebenen Falle, wo $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ identisch Null ist, gibt es also für die nämlichen Parameter mehr als eine ϑ-Function, und es tritt nun die Frage auf, ob der Ausdruck ϑ_ϱ alle ϑ-Functionen mit den Parametern $e_1 e_2 \cdots e_p$ umfasst. Dies muss fürs Erste dahingestellt bleiben, aber der Nachweis dass die Function für jedes Parametersystem existirt, ist damit bereits geleistet.

In Folge dessen gewinnen die bekannten Sätze über die Anzahl der Nullpunkte und ihre Beziehung zu den Parametern bezüglich der letztern ganz unbeschränkte Gültigkeit, ebenso der, sonst nur mit anderweitigen Hülfsmitteln vollständig zu begründende Satz von der Möglichkeit, durch geeignete Wahl von p Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ die p Summen

$$u_\mu(\varepsilon_1) + u_\mu(\varepsilon_2) + \cdots + u_\mu(\varepsilon_p) \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p)$$

einem beliebigen Werthesysteme $v_1 v_2 \cdots v_p$ (im Sinne Riemanns) congruent zu machen.

Mit diesen Sätzen beginnt der II. Abschnitt, und dann wird mittelst der Nullpunkte irgend einer besondern, durch ihre Parameter gegebenen ϑ (oder ϑ_ϱ) ein Ausdruck

$$\log \vartheta = \log C + P(0|\varepsilon_1) + P(0|\varepsilon_2) + \cdots + P(0|\varepsilon_p) - L(0)$$

(oder $\vartheta = Cr(\varepsilon_1)\, r(\varepsilon_2) \cdots r(\varepsilon_p)$; vergl. die Note zu Nr. 8) für dieselbe hergeleitet, von welchem sich sofort herausstellt, dass er für jede beliebige Lagerung der Nullpunkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ eine ϑ-Function darstellt.

Damit ist der Nachweis vollendet, dass die ϑ-Function, charakterisirt durch ihr Verhalten in der einfach zusammenhängenden Fläche T' und an den Querschnitten, stets existirt, mögen ihr die Parameter oder die Nullpunkte vorgeschrieben werden, und wie auch immer das geschehen mag.

Nur bezüglich der Ausdrucksformen für den ersten von diesen beiden

Fällen ist noch eine Lücke auszufüllen, da die Frage, ob die Reihenausdrücke ϑ, ϑ_ϱ alle ϑ-Functionen umfassen, im I. Abschnitte nicht erledigt werden konnte.

Dies geschieht im III. Abschnitte. Als Ausdruck einer ϑ-Function findet sich die Riemann'sche Reihe ϑ, und wenn diese versagt, stets eine Secundärreihe ϑ_ϱ. Letztere tritt ein, wenn unter den p Nullpunkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_\mu$ sich ϱ nothwendige befinden, in welchem Falle ich $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ in erweitertem Sinne ein Punktsystem I. G. mit ϱ nothwendigen Punkten*) nenne. Das führt sofort zu einer *Schaar von ϑ-Functionen, welche alle die gleichen Parameter haben, also an den Querschnitten alle die gleichen Factoren ausscheiden.* Jede Function dieser Schaar hat zu Nullpunkten ein mit $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ corresiduales System $o_1 o_2 \cdots o_p$, darunter also jedesmal ϱ nothwendige Punkte $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$. Diese können nach Belieben vorgeschrieben werden; durch sie und die Parameter der Schaar ist der Ausdruck der besondern Function ϑ_ϱ bestimmt, welche in diesen ϱ nothwendigen und den übrigen $p - \varrho$ durch sie bestimmten Punkten des zu $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ corresidualen Systems Null wird.

Den Schluss dieses Abschnittes bildet eine Vervollständigung des Satzes aus Abschnitt II, Nr. 6, über die Erzeugung von p Parametern $v_1 v_2 \cdots v_p$ durch die Simultanwerthe der Normalintegrale II. G. in p geeigneten Punkten.

Der IV. Abschnitt weist die analytische Bedingung dafür nach, dass $u_1 u_2 \cdots u_p$ Simultanwerthe sind; sie ist nichts anderes, als die bekannte Gleichung Riemann's

$$\vartheta\left(\!\left(-\sum_{k=1}^{p-1} u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\right)\!\right) = 0,$$

von welcher zu Anfange des III. Abschnittes zwei einwandfreie Beweise gegeben werden.

Der V. Abschnitt beginnt mit der directen Auswerthung der Riemann'schen Constanten $K_1 K_2 \cdots K_p$ für die ultraelliptischen Functionen aller Genera $p > 1$, und entwickelt im Anschlusse hieran die allgemeinen Hülfsmittel zur Bestimmung dieser Constanten, welche wir durch Herrn Prym kennen gelernt haben, vervollständigt durch gehörige Berücksichtigung der Punktsysteme I. G. und die Secundärreihen ϑ_ϱ. —

---

*) Vergl. unten die Note zu Nr. 10. Der Begriff des Punktsystems I. G. im engern Sinne habe ich in meiner Abhandlung Ueber die canonische Form der Riemann'schen Integrale I. G. auseinandergesetzt. Brioschi's Ann. di Matematica 9, zu Anfang der Nr. 3.

Die Darstellung, welche Riemann selbst von seinen Entdeckungen gegeben hat, enthält Lücken; dieselben sind auch von anderer Seite bemerkt und, für die Theorie der Riemann'schen Reihe selbst, ausgefüllt worden*).

Dazu kommt ein anderer Punkt, den ich für wesentlicher halte. Man mag an die Lehre vom Verschwinden der ϑ-Function herantreten, von welcher Seite man will, überall greifen in dieselbe Bedingungen hinein, welche sich auf gewisse Lagerungen der Punkte beziehen, die an Stelle von Parametern eingeführt werden. Das betrifft in allen Fällen die Punktsysteme I. G., d. h. die Gruppen der Null- oder der Unstetigkeitspunkte der Functionen I. G. $\frac{dw_1}{dw_2}$, welche den eigentlichen Gegensatz zwischen den hier allein zu berücksichtigenden Fällen $p \gtreqless 2$ und den beiden Elementarfällen $p = 0$ und $p = 1$ begründen. Die einschlägigen Sätze über diese Punktsysteme, d. h. über die Gleichungen ersten Grades welche bewirken, dass der allgemeine Integrand I. G. in einem solchen System von Punkten verschwinde, ergeben sich mit der grössten Leichtigkeit, wenn man sie an der rechten Stelle (Abel'sches Theorem, Riemann-Roch'scher Satz) aufsucht und sie auf ihren *algebraischen* Inhalt beschränkt. Statt sie aus der Lehre von der ϑ-Function zu schöpfen, sind sie ihr zu Grunde zu legen, und liefern dann die Schlüssel für die merkwürdigen Erscheinungen, welche der Reihenausdruck dieser Function darbietet.

Die Theorie der Riemann'schen ϑ-Reihe allein wird mit diesen Hülfsmitteln sehr einfach: die Nummern 1, 2, 5 und 10—16 enthalten alle wesentlichen Punkte derselben. Ich habe mich nicht entschliessen können, meine Darstellung mit dieser, auf die ϑ-Reihe beschränkten Theorie zu beginnen, und dann erst die Untersuchungen folgen zu lassen, welche ich darüber hinaus für nöthig gehalten habe; die vorangehende Uebersicht lässt den Grund für die gewählte Anordnung deutlich erkennen.

Es ist hier am Orte, zwei Bezeichnungen vorauszuschicken, deren ich mich bediene und die ich für zweckmässig halte. Die eine betrifft die quadratische Form im Exponenten der allgemeinen Glieder der ϑ-Reihe; ich schreibe da

$$\sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu}\, m_\mu\, m_\nu = \Phi(m_1 \mid m_2 \mid \cdots \mid m_p) = \Phi((m)).$$

Die andere betrifft die Simultanperioden der Normalintegrale I. G. $u_1\, u_2 \cdots u_p$. Ich schreibe

*) Carl Neumann, Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen. Leipzig 1883.

$$\begin{aligned}
g_1\pi i + a_{11}h_1 + a_{12}h_2 + \cdots + a_{1p}h_p &= (gh)_1,\\
g_2\pi i + a_{21}h_1 + a_{22}h_2 + \cdots + a_{2p}h_p &= (gh)_2,\\
&\ \ \vdots\\
g_\mu\pi i + a_{\mu1}h_1 + a_{\mu2}h_2 + \cdots + a_{\mu p}h_p &= (gh)_\mu,\\
&\ \ \vdots\\
g_p\pi i + a_{p1}h_1 + a_{p2}h_2 + \cdots + a_{pp}h_p &= (gh)_p,
\end{aligned}$$

so dass $(gh)_1, (gh)_2, \cdots (gh)_p$ für ganzzahlige Werthe von $g_1 g_2 \cdots g_p\, h_1 h_2 \cdots h_p$ die allgemeinen Ausdrücke für die Simultanperioden von $u_1 u_2 \cdots u_p$ sind.

Die übrigen Bezeichnungen Riemann's bezüglich der Fläche T und ihrer Querschnitte, sowie der verschiedenen Integralfunctionen werde ich ungeändert beibehalten.

Ich schliesse diese Einleitung mit einer Vorbemerkung über

Die Convergenz der Jacobi'schen ϑ-Reihe mit den Moduln Riemann's und die Stetigkeit und die Vollwerthigkeit ihrer Summe.

Den Ausdruck der p-fach unendlichen Jacobi'schen Reihe mit den Argumenten $w_1 w_2 \cdots w_p$ schreibe ich wie folgt

$$\vartheta = \sum e^{\Phi((m)) + 2\Sigma m w},$$

wo $\Sigma m w = m_1 w_1 + m_2 w_2 + \cdots + m_p w_p$ ist, und $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ die Riemann'schen Moduln sind. Die Summationen nach $m_1 m_2 \cdots m_p$ gehen, jede für sich, durch alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$.

Um die zu ϑ gehörige Modulreihe zu bilden, trennen wir im Exponenten des allgemeinen Gliedes das Reelle vom Imaginären:

$$w_\mu = u_\mu + i v_\mu \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \cdots p$$

und, wenn $x_1 x_2 \cdots x_p$ auf reelle Werthe beschränkt werden:

$$\Phi((x)) = -\varphi((x)) - i\psi((x)).$$

Dann lautet die verlangte Modulreihe:

$$\Theta = \sum e^{-\varphi((m)) + 2\Sigma m u},$$

und wo sie convergirt, ist bekanntlich die ursprüngliche Reihe nicht bloss convergent, sondern ihre Summe überdies unabhängig von der Anordnung der Summationen. —

Bezüglich der reellen quadratischen Form $\varphi((x))$ beweist Riemann den Satz dass (bei reellen Argumenten) φ eine vollständige positive Form ist, d. h. so lange sie nicht verschwindet, bleibt sie positiv, und sie wird $=0$ nur in dem Falle, wo alle Argumente zugleich verschwinden.

Solange die Summe der Quadrate dieser letztern, also die $\Sigma x^2 = 1$ bleibt, kann demnach φ nicht auf Null rücken. Ist α die untere Grenze für φ, oder eine kleinere positive Zahl, so bleibt $\varphi((x)) > \alpha$. Nimmt man nun $x_\mu = \frac{m_\mu}{r}$ für $\mu = 1, 2, \cdots p$ und $r^2 = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_p^2$, so folgt $\varphi\left(\left(\frac{m}{r}\right)\right) > \alpha$, und durch Multiplication mit r^2:

$$\varphi((m)) > \alpha \sum m^2 \quad \text{und} \quad \alpha > 0$$

für jede beliebige Gruppe reeller Zahlen $m_1 m_2 \cdots m_p$, also

$$e^{-\varphi((m))} < e^{-\alpha \sum m^2},$$

endlich

$$\Theta < \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_p^2) + 2(m_1 u_1 + m_2 u_2 + \cdots + m_p u_p)}.$$

Dies ist das Product aus p Reihen der Form

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha m^2 + 2mu};$$

diese Reihe convergirt, solange u nicht unendlich wird. Um dies auszuschliessen, beschränke ich u auf endliche Grenzen $\pm\, \omega$, dann sei

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha m^2 + 2mu} = f(u) \quad \text{für} \quad -\omega < u < \omega,$$

während ω positiv ist und von beliebiger Grösse sein kann, wofern es nur ohne Unbestimmtheit angegeben wird. Es folgt

$$\Theta < f(u_1)\, f(u_2) \cdots f(u_p)$$

wofern

$$-\omega_1 < u_1 < \omega_1, \; -\omega_2 < u_2 < \omega_2, \cdots - \omega_p < u_p < \omega_p$$

ist. Wir haben also das Resultat:

Die Jacobi'sche Reihe

$$\vartheta = \sum e^{\Phi((m)) + 2\sum m w}$$

mit den Riemann'schen Moduln $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ convergirt und ihre Summe ist von der Anordnung der Summationen unabhängig, solange die Argumente $w_1 w_2 \cdots w_p$ $(w_\mu = u_\mu + i v_\mu)$ einem durch die Ungleichheiten

$$-\omega_1 < u_1 < \omega_1, \; -\omega_2 < u_2 < \omega_2, \cdots - \omega_p < u_p < \omega_p$$

bestimmten Grössengebiete E angehören.

Diesen Convergenzbeweis habe ich im Sommer 1890 in einer Vorlesung über die ultraelliptischen Functionen (aller Genera $p > 2$) vorgetragen: um die nämliche Zeit (ich glaube etwas später) erschien die elegante

Arbeit des Herrn Krazer über die Transformationen der allgemeinen ϑ-Reihe, in welcher (gleich zu Anfange) als Grundlage zu einem einfachen Convergenzbeweise das aus dem Riemann'schen Satze ebenfalls leicht folgende Princip mitgetheilt wurde, dass die quadratische Form (bei reellen Argumenten) unter allen Umständen unendlich wird, sobald nicht alle Argumente bei endlichen Werthen bleiben. Wie der Beweis sich gestaltet, wird nicht ausgeführt, mit dem obigen kann er nicht identisch sein. —

Setzen wir

$$e^{2w_1} = \zeta_1, \; e^{2w_2} = \zeta_2, \cdots e^{2w_p} = \zeta_p,$$

so verwandelt ϑ sich in eine p-fache Potenzreihe

$$\vartheta = \sum e^{\Phi((m))} \zeta_1^{m_1} \zeta_2^{m_2} \cdots \zeta_p^{m_p}$$

mit dem Convergenzgebiete

$$\text{E.} \qquad e^{-2\omega_1} < \text{Mod.}\, \zeta_1 < e^{2\omega_1}, \cdots e^{-2\omega_p} < \text{Mod.}\, \zeta_p < e^{2\omega_p}.$$

Nach der Lehre von den Potenzreihen ist daher ϑ innerhalb E stetige Function von $\zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_p$, und das Gleiche gilt von jedem endlichen Ausdrucke

$$A = \sum_{-q_1}^{r_1} \sum_{-q_2}^{r_2} \cdots \sum_{-q_p}^{r_p} e^{\Phi((m))} \zeta_1^{m_1} \zeta_2^{m_2} \cdots \zeta_p^{m_p}.$$

Die Stetigkeit wird aber hierbei so verstanden, dass z. B. A innerhalb E stetige Function von ζ_1 heisst, wenn in jedem Theile ΔE von E die Maximalschwankung an A (sein grösster Schwankungsmodul) unter jede beliebig kleine vorzuschreibende Grenze ε gebracht werden kann, indem man die Maximalschwankung von ζ_1 unter eine, aus ε zu berechnende Grenze bringt, wofern diese letztere Grenze nicht unendlich klein gefordert ist.

In diesem Sinne ist dann weiter $\zeta_1 = e^{2w_1}$ als Summe einer Potenzreihe stetige Function von w_1, mithin auch A stetige Function von w_1.

Der Beweis springt in die Augen: Schwindet die Mschw. von A zugleich mit der Mschw. von ζ_1, und diese zugleich mit derjenigen von w_1, so schwindet die Mschw. von A und zugleich mit der Mschw. von w_1.

Es folgt:

Innerhalb E sind ϑ und sämmtliche Ausdrücke A stetige Functionen von w_1, von $w_2, \cdots$ und von w_p,

wofern die Stetigkeit so verstanden wird, wie soeben auseinandergesetzt wurde.

Und nun folgt aus den Sätzen meiner Abhandlung über Stetigkeit und Vollwerthigkeit analytischer Ausdrücke (Ann. Bd. 53, S. 465) dass ϑ innerhalb E vollwerthige Function von $w_1 w_2 \cdots w_p$ ist.

D. h. Zu jedem Argumentensystem $w_1 w_2 \cdots w_p$ innerhalb E gehört ein völlig bestimmter Werth von ϑ, den man durch einen ausführbaren Anfang der Rechnung mit beliebiger Genauigkeit gewinnen kann, gleichviel ob man die Argumente $w_1 \cdots w_p$ durch Annäherungen einführt oder, wenn ihr arithmetischer Charakter das zulässt, sie direct einsetzt. Innerhalb E wird durch eine einwandfreie Buchstabenrechnung mit dem Ausdrucke der ϑ-Reihe der Charakter des Ergebnisses als eine Werthbestimmung auf keiner Stufe aufgehoben oder in anfechtbarer Weise abgeändert, mit andern Worten, innerhalb E rechnet man mit den Argumenten von ϑ wie mit vollendeten Zahlen.

I.

Die ϑ-Function, bestimmt durch ihre Parameter; die primäre Reihe und die Secundärreihen.

1. Ich knüpfe an Riemann's Abhandlung über die Theorie der Abel'schen Functionen an. Durch z bezeichne ich die unabhängige Variable, durch s die grundlegende Irrationalität der Classe, durch T die aus n z-Ebenen zusammengesetzte Fläche, welcher s eindeutig und zugleich der Stetigkeit gemäss zugeordnet ist; durch $c_\lambda a_\lambda b_\lambda$ $(\lambda = 1\ 2 \cdots p)$ bezeichne ich die p Querschnittbündel, durch welche die Fläche in eine einfach-zusammenhängende T' verwandelt wird, durch $u_1 u_2 \cdots u_p$ die hierzu gehörigen Normalintegrale I. G.

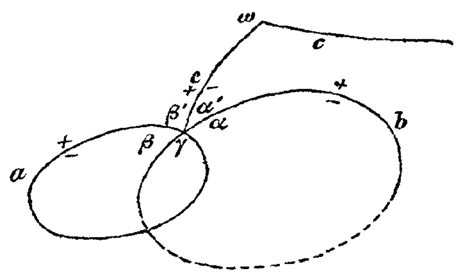

Fig. 1.

Die Schnittpaare $a_\lambda \cdot b_\lambda$ $(\lambda = 1 \cdots p)$ werden zuerst angelegt, und die Ränder so als $\overset{+}{a}\ \overset{-}{a},\ \overset{+}{b}\ \overset{-}{b}$ bezeichnet, dass ein positiver Umlauf um die Fläche von $\overset{+}{a}$ auf $\overset{+}{b}$, und von $\overset{-}{a}$ auf $\overset{-}{b}$ hinüber führt. Zu diesen Schnittpaaren führen dann noch die Schnitte c_λ $(\lambda = 1 \cdots p)$ aus einem beliebigen Punkte ω nach einer beliebigen Stelle, wofür wir wie üblich die von $\overset{+}{a}_\lambda \overset{+}{b}_\lambda$ gebildete Ecke nehmen. Dort bilden sich also fünf Ecken $\alpha' \beta \gamma \alpha \beta'$ so, dass ein positiver Umlauf um T' dort dem Wege

$$(\overset{-}{c})\,\alpha'\,(\overset{+}{b})\,\beta\,(\overset{-}{a})\,\gamma\,(\overset{-}{b})\,\alpha\,(\overset{+}{a})\,\beta'\,(\overset{+}{c})$$

folgt.

Auf diese Fläche beschränkt sind dann die Integrale $u_1 u_2 \cdots u_p$ eindeutig und stetig, und es ist

$$\text{an } a_\lambda\text{:}\ \overset{+}{u}_\mu - \overset{-}{u}_\mu = \binom{\lambda}{\mu}\pi i; \quad \text{an } b_\lambda\text{:}\ \overset{+}{u}_\mu - \overset{-}{u}_\mu = a_{\lambda\mu}; \quad \text{an } c_\lambda\text{:}\ \overset{+}{u}_\mu - \overset{-}{u}_\mu = 0.$$

Sodann ist

$$\vartheta(v_1|v_2|\cdots|v_p) = \vartheta((v_\mu)) = \sum e^{\Phi((m))+2\sum m_\mu v_\mu},$$

wo nach jedem m über alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu summiren ist. Ersetzt man hier jedes v_μ durch $v_\mu + g_\mu \pi i$, wo g_μ, und jedes m_λ durch $m_\lambda + h_\lambda$, wo jedes h_λ ganze Zahl ist, so ändert das die Summe der Reihe nicht, und giebt die Formel

$$e^{\Phi((h))+2\sum h_\mu v_\mu}\,\vartheta((v_\mu + (gh)_\mu)) = \vartheta((v_\mu)),$$

wo die in der Einleitung erläuterten Bezeichnungen beide benutzt sind.

2. Durch o bezeichne ich den veränderlichen Punkt z, s in der Fläche T, und durch $u_\mu(o)$ den Werth des auf die Fläche T' beschränkten μ^{ten} Normalintegrals I. G. in diesem Punkte. Mit Hinzuziehung von p Parametern $e_1 e_2 \cdots e_p$ wird die unendliche Reihe

$$\vartheta((u_\mu(o) \cdots e_\mu)) = \sum e^{\Phi((m))+2\sum m_\mu(u_\mu(o)-e_\mu)}$$

gebildet; ist ihre Summe nicht Null für alle Lagen des Punktes o, so stellt diese Reihe eine Function ϑ von z dar, welche die folgenden Eigenschaften hat:

(1) ϑ ist in der einfach zusammenhängenden Fläche T' eindeutig und stetig:

$$\begin{array}{lllll}
(2) & \text{an } a_\lambda \text{ ist:} & \overset{+}{u}_\mu = \overset{-}{u}_\mu + \binom{\lambda}{\mu}\pi i & \text{also} & \overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta}, \\
& \text{„ } b_\lambda \text{ „ :} & \overset{+}{u}_\mu = \overset{-}{u}_\mu + a_{\lambda\mu} & \text{„} & \overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta}\cdot e^{-a_{\mu\lambda}-2\overset{-}{u}_\lambda+2e_\lambda}, \\
& \text{„ } c_\lambda \text{ „ :} & \overset{+}{u}_\mu = \overset{-}{u}_\mu & \text{„} & \overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta}.
\end{array}$$

3. Zum Ausgangspunkte nehme ich mit Riemann*) den Satz, dass es unter allen Umständen Parameter $f_1, f_2 \cdots f_p$ giebt, bei denen $\vartheta_1 = \vartheta(u_\mu - f_\mu)$ nicht identisch Null ist und in Folge dessen, falls $\vartheta_0 = \vartheta((u_\mu - e_\mu))$ vermöge der Wahl seiner Parameter $e_1 e_2 \cdots e_p$ identisch Null ist, seine partiellen Derivirten von einer endlichen, durch die Parameter völlig bestimmten Ordnung an, nicht alle identisch Null sind.

Dabei gelten als partielle Derivirten von ϑ_0 die Werthe der partiellen Derivirten von $\vartheta((v_\mu))$ für $v_1 = u_1 - e_1$, $v_2 = u_2 - e_2, \cdots, v_p = u_p - e_p$.

Der erste Theil des Satzes folgt daraus, dass in der Entwicklung von ϑ_1 nach Potenzen von $e^{f_1}, e^{f_2}, \cdots, e^{f_p}$ nicht alle Coefficienten $= 0$ sind, der zweite daraus, dass in Folge dessen auch in der Entwicklung

*) Ueber das Verschwinden der ϑ-Functionen, art. 2. Crelle's Journal 65.

von ϑ_1 nach Potenzen von $e_1 - f_1, e_2 - f_2, \cdots, e_p - f_p$ die Coefficienten, nämlich die partiellen Derivirten von ϑ_0, nicht alle $= 0$ sein können.

Um dies weiter zu verfolgen, bilde man die neuen Parameter

$$e_1' = e_1 - \zeta x_1, \quad e_2' = e_2 - \zeta x_2, \cdots, e_p' = e_p - \zeta x_p$$

für

$$x_1 = e_1 - f_1, \quad x_2 = e_2 - f_2, \quad \cdots, x_p = e_p - f_p,$$

und den Ausdruck

$$\vartheta' = \vartheta((u_\mu - e_\mu')) = \sum e^{\Phi((m)) + 2\sum m(u-e)} \cdot e^{2\zeta \sum_\mu m_\mu x_\mu}.$$

Die Form dieses Ausdruckes zeigt, dass ϑ' als Function von ζ einwerthig und, so lange ζ endlich bleibt, auch stetig ist. Sie ist nicht identisch Null, da sie für $\zeta = 1$, also ohne Unstetigkeit in ϑ_1 übergeht. Aber für $\zeta = 0$ wird auch $\vartheta' = 0$, abermals ohne Unstetigkeit, also zu endlicher Ordnung, welche r heissen möge.

In der Entwicklung von ϑ' nach Potenzen von ζ:

$$\vartheta' = A_0 + 2\zeta \cdot A_1 + \frac{(2\zeta)^2}{1 \cdot 2} A_2 + \cdots,$$

wo

$$A_\varkappa = \sum e^{\Phi((m)) + 2\sum m(u-e)} [m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_p x_p]^\varkappa$$

ist, fehlt das Anfangsglied $A_0 = \vartheta_0$ nach Voraussetzung. Ausserdem sind $A_1, A_2, \cdots, A_{r-1}$ gleich Null, *wenigstens bei den vorstehenden Werthen von* $x_1 x_2 \cdots x_p$, aber A_r ist nicht $= 0$. Daraus folgt zunächst, dass die partiellen Derivirten r^{ter} Ordnung von ϑ_0 nicht alle $= 0$ sind. Ist ferner $n < r$, also $A_n = 0$, so folgt nicht, dass die partiellen Derivirten n^{ter} Ordnung alle $= 0$ sind; denn wenn sie es nicht alle sind, so kann A_n gleichwohl vermöge der Werthe von $x_1 x_2 \cdots x_p$ gleich Null sein. Aber eins ist sicher, dass es eine Ordnung $\leqq r$ gibt, bis zu welcher alle partiellen Derivirten $= 0$ sind, während die Derivation dieser Ordnung selbst es nicht oder doch nicht alle sind.

Sei

$$\varrho$$

die niedrigste Ordnung, für welche nicht alle partiellen Derivirten von ϑ_0 verschwinden, so dass, falls $\varrho > 1$ ist, alle partiellen Derivirten von der ersten bis zur $(\varrho - 1)^{\text{ten}}$, aber nicht alle von der ϱ^{ten} Ordnung gleich Null sind, und letzteres auch gilt, wenn $\varrho = 1$ ist. Es ist sicher gestellt, dass ϱ, welches durch die Parameter $e_1 e_2 \cdots e_p$ bestimmt ist, einen endlichen Werth hat, d. h. in keinem Falle unendlich gross vorausgesetzt werden darf.

Jetzt bilde man ϑ' für *willkürliche* Werthe von $x_1 x_2 \cdots x_p$; in seiner Entwicklung sind $A_0 A_1 \cdots A_{\varrho-1}$ alle $= 0$, aber A_ϱ ist es nicht, es bleibt

$$\vartheta' = \frac{(2\zeta)^\varrho}{\varrho!} A_\varrho + \frac{(2\zeta)^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!} A_{\varrho+1} + \cdots.$$

Ordnet man A_ϱ nach Potenzen von $x_1 x_2 \cdots x_p$, so sind, worauf von hier an zu achten ist, die Coefficienten bis auf den fehlenden Factor 2^ϱ die partiellen Derivirten ϱ^{ter} Ordnung von ϑ_0, und sie sind nicht alle $= 0$.

Wir untersuchen sie als Functionen von z. Der Reihenausdruck von A_ϱ (oben $A_\varkappa$) zeigt, dass A_ϱ als Function von z der Fläche T' eindeutig zugeordnet und in ihr von jeder Unstetigkeit frei ist. Sodann ist

$$\text{an } a_\lambda\text{: } \overset{+}{\vartheta}{}' = \overset{-}{\vartheta}{}'; \quad \text{an } b_\lambda\text{: } \overset{+}{\vartheta}{}' = \overset{-}{\vartheta}{}' \cdot e^{-a_{\lambda\lambda} - 2\bar{u}_\lambda + 2e_\lambda}; \quad \text{an } c_\lambda\text{: } \overset{+}{\vartheta}{}' = \overset{-}{\vartheta}{}';$$

ausserdem für $\zeta = 0$:

$$\lim \frac{\varrho!\,\vartheta'}{(2\zeta)^\varrho} = A_\varrho, \quad \text{und} \quad \lim e_\lambda' = e_\lambda.$$

also ist

$$\text{an } a_\lambda\text{: } \overset{+}{A}_\varrho = \overset{-}{A}_\varrho; \quad \text{an } b_\lambda\text{: } \overset{+}{A}_\varrho = \overset{-}{A}_\varrho \cdot e^{-a_{\lambda\lambda} - 2\bar{u}_\lambda + 2e_\lambda}; \quad \text{an } c_\lambda\text{: } \overset{+}{A}_\varrho = \overset{-}{A}_\varrho,$$

d. h., wenn man dies mit Nr. 2 vergleicht, A_ϱ hat für alle Werthe von $x_1 x_2 \cdots x_p$ die charakteristischen Eigenschaften einer ϑ-Function mit den Parametern $e_1 e_2 \cdots e_p$, also gilt das von allen partiellen Derivirten ϱ^{ter} Ordnung von ϑ_0, soweit sie nicht identisch Null sind. Das ist zunächst der folgende Lehrsatz:

I. Versteht man unter einer, der Fläche T zugeordneten ϑ-Function nicht ausschliesslich die Summe der Riemann'schen Reihe, sondern, *mit Ausschluss identisch verschwindender Ausdrücke*, jede Function ϑ von z, welche

A. in der einfach zusammenhängenden Fläche T' eindeutig und stetig ist, und

B. an a_λ: $\overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta}$; an b_λ: $\overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta} \cdot e^{-a_{\lambda\lambda} - 2\bar{u}_\lambda + 2e_\lambda}$; an c_λ: $\overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta}$

giebt, und nennt dies eine ϑ-Function mit den Parametern $e_1 e_2 \cdots e_p$, so existirt eine solche Function stets, wie auch ihre Parameter vorgeschrieben werden mögen.

4. Diese Eigenschaften behält A_ϱ auch, wenn die Producte aus Potenzen von $x_1 x_2 \cdots x_p$, mit denen im Ausdrucke von A_ϱ die Derivirten von ϑ_0 multiplicirt sind, durch willkürliche Constanten ersetzt werden. Dann tritt in der Reihenentwicklung von A_ϱ an die Stelle der Potenz

$$(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_p x_p)^\varrho$$

eine ganze homogene Function ϱ^{ter} Ordnung von $m_1 m_2 \cdots m_p$, deren Coefficienten nach z constant sind, und welche

$$G_\varrho(m_1|m_2|\cdots|m_p) = G_\varrho((m))$$

heissen möge. An die Stelle von A_ϱ tritt der Ausdruck

$$\vartheta_\varrho((u_\mu - e_\mu)) = \sum e^{\Phi((m)) + 2\sum m(u-e)}\, G_\varrho((m));$$

ich nenne ihn eine *Secundärreihe ϱ^{ter} Ordnung*, und im Gegensatze dazu $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ *die Primärreihe.* Das giebt den folgenden Satz:

II. Giebt es Parameter $e_1 e_2 \cdots e_p$, für welche die Summe der Primärreihe $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ als Function von z identisch Null ist, so bestimmt ein solches Parametersystem eine Ordnung ϱ in der Weise, dass die partiellen Derivirten ϱ^{ter} Ordnung von $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ nicht alle identisch Null sind, wohl aber, wenn $\varrho > 1$ ist, alle partiellen Derivirten der vorangehenden Ordnungen es sind. In diesem Falle kann man die Homogenform ϱ^{ter} Ordnung $G_\varrho((m))$ so wählen, dass die Summe der Secundärreihe ϱ^{ter} Ordnung:

$$\vartheta_\varrho((u_\mu - e_\mu)) = \sum e^{\Phi((m)) + 2\Sigma m(u-e)} G_\varrho((m))$$

als Function von z nicht identisch verschwindet, und dann ist ϑ_ϱ eine ϑ-Function mit den Parametern $e_1 e_2 \cdots e_p$.

Es muss zunächst dahingestellt bleiben, ob auch umgekehrt jede ϑ-function mit solchen Parametern sich durch eine Secundärreihe ausdrücken lässt, wozu vor allen Dingen der Nachweis gehört, dass der hier vorgesehene Fall, wo ϑ_0 identisch Null ist, wirklich vorkommt. Dass die unter dieser Voraussetzung nachgewiesenen Ausdrucksformen ϑ, ϑ_ϱ für alle Fälle ausreichen, wird sich in der Folge durch die wirkliche Bestimmung von G_ϱ aus vorgeschriebenen Bedingungen ergeben. Dabei stellt sich dann auch die wahre Bedeutung der Ordnung ϱ heraus, nebst einem ausführbaren Kriterium zur Ermittelung dieser Zahl, wofür die directe Untersuchung von ϑ_0 und seinen partiellen Derivirten nicht gelten kann.

Es erübrigt an dieser Stelle nur noch, zwei Eigenschaften der Secundärreihen einzuschalten, von denen die eine für beliebige Argumente $v_1 v_2 \cdots v_p$, die andere nur für die speciellen Werthe $u_1 - e_1$, $u_2 - e_2$, $\cdots$, $u_p - e_p$ derselben gilt.

Haben $e_1' e_2' \cdots e_p'$ dieselbe Bedeutung wie in den vorangehenden Nummern, so ist

$$\vartheta((u_\mu - e_\mu' + (gh)_\mu)) = \vartheta((u_\mu - e_\mu')) \, e^{-\Phi((h)) - 2\Sigma h_\mu (u_\mu - e_\mu')}.$$

Schreibt man nun $A_\varrho((u_\mu - e_\mu))$ an Stelle von A_ϱ, so giebt dies, mit $\frac{\varrho!}{(2\zeta)^\varrho}$ multiplicirt, für $\zeta = 0$:

$$A_\varrho((u_\mu - e_\mu + (gh)_\mu)) = A_\varrho((u_\mu - e_\mu)) \cdot e^{-\Phi((h)) - 2\Sigma h_\mu (u - e_\mu)},$$

also, wenn man hier $(m_1 x_1 + \cdots + m_p x_p)^\varrho$ als symbolische Form für $G_\varrho((m))$ benutzt:

$$\text{(a)} \qquad \vartheta_\varrho\left(\left(u_\mu - e_\mu + (gh)_\mu\right)\right) = \vartheta_\varrho\left(\left(u_\mu - e_\mu\right)\right) e^{-\Phi((h)) - 2\sum h_\mu (u - e_\mu)},$$

genau wie bei der Primärreihe für beliebige Argumente v_μ an Stelle von $u_\mu - e_\mu$. Da ferner die Summe der Reihe

$$\vartheta_\varkappa\left(\left(v_\mu\right)\right) = \sum e^{\Phi((m)) + 2\sum m v} G_\varkappa\left(\left(m\right)\right)$$

sich nicht ändert, wenn jedes m durch $-m$ ersetzt wird, so folgt:

$$\text{(b)} \qquad (-1)^\varkappa \vartheta_\varkappa\left(\left(-v_\mu\right)\right) = \vartheta_\varkappa\left(\left(v_\mu\right)\right).$$

II.

Die ϑ-Function, bestimmt durch ihre Nullpunkte.

5. Nun habe ϑ, welches auch sein Ausdruck sein möge, die im Lehrsatze I, Nr. 3 zusammengestellten Eigenschaften. Da ϑ in der Fläche T' von jeder Unstetigkeit frei ist, so kann es, wenn es überhaupt verschwindet, nur zu endlichen Ordnungen Null werden. In Folge dessen ist die Summe der Ordnungen, zu denen ϑ in der Fläche T' Null wird, das positiv um T' erstreckte Integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(T')} d\log\vartheta$, was sich wie bekannt $= p$ findet.

III. Die Anzahl der vereinigt oder getrennt liegenden Punkte von T', in denen die Function ϑ zur ersten Ordnung Null wird, ist p.

Seien $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ diese Punkte. Wir bilden das Integral $P = \int u_\mu(o)\, d\log\vartheta$ und beschränken, um einen eindeutigen Integranden zu erhalten, die Veränderlichkeit von z auf die Fläche T'. In dieser Fläche hat dann P nur logarithmische Unstetigkeiten, sie finden statt in den Nullpunkten von ϑ und ihre Gewichte sind die Werthe von u_μ in diesen Punkten. Die Summe dieser Gewichte ist also

$$u_\mu(\varepsilon_1) + u_\mu(\varepsilon_2) + \cdots + u_\mu(\varepsilon_p) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(T')} u_\mu\, d\log\vartheta.$$

Nun folgt aus Lehrs. I. B, wenn alle g, h ganze Zahlen sind*):

---

*) Der Periodicitätsmodul des $\lg\vartheta$ an c_λ setzt voraus, dass die Ränder von c_λ so als $\overset{-}{c}$, $\overset{+}{c}$ bezeichnet sind, dass bei einem positiven Umlauf um T' der Weg von $\overset{-}{c_\lambda}$ aus zunächst über die vier Ränder von a_λ, b_λ führt und sich dann auf $\overset{+}{c_\lambda}$ fortsetzt. Dann ist an c_λ der Periodicitätsmodul, da $\lg\vartheta$ gleich

$$\int \left|\begin{matrix}\beta\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda (d\lg\overset{+}{\vartheta} - d\lg\overset{-}{\vartheta}) + \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda (d\lg\overset{-}{\vartheta} - d\lg\overset{+}{\vartheta}) = 2\pi i,$$

gleichviel in welcher Ecke von a_λ, b_λ der Schnitt c_λ mündet.

$$\text{an } a_\lambda:\ lg\overset{+}{\vartheta} - \lg\overset{-}{\vartheta} = 2h_\lambda \pi i, \qquad d\lg\overset{+}{\vartheta} - d\lg\overset{-}{\vartheta} = 0,$$

$$\text{„ } b_\lambda:\ \lg\overset{+}{\vartheta} - \lg\overset{-}{\vartheta} = -2g_\lambda \pi i - a_{\lambda\lambda} - 2\overset{-}{u}_\lambda + 2e_\lambda;\quad d\lg\overset{+}{\vartheta} - d\lg\overset{-}{\vartheta} = -2du_\lambda,$$

$$\text{„ } c_\lambda:\ \lg\overset{+}{\vartheta} - \lg\overset{-}{\vartheta} = 2\pi i, \qquad d\lg\overset{+}{\vartheta} - d\lg\overset{-}{\vartheta} = 0.$$

Die Rechnung wird am besten so ausgeführt, dass man überall $\overset{-}{u}_\mu$ durch $\overset{+}{u}_\mu$ und den Periodicitätsmodul ersetzt, und die Integrationen $(\lambda = \mu)$, welche sich ausführen lassen, auch bewerkstelligt. Dann ergiebt sich

$$\sum_{\varkappa=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) = e_\mu - (gh)_\mu + \frac{1}{2}[\pi i + a_{\mu\mu}] + \frac{1}{\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu} \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \overset{-}{u}_\mu\, du_\lambda,$$

also der Satz:

IV. Zwischen den Parametern $e_1 e_2 \cdots e_p$ der Function ϑ und ihren Nullpunkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ bestehen die p Relationen

$$\text{C.} \qquad e_\mu = \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) - K_\mu + (gh)_\mu \qquad (\mu = 1 2 \cdots p),$$

wo 1) $K_1 K_2 \cdots K_p$ die Riemann'schen Constanten

$$\text{D.} \qquad K_\mu = \frac{1}{2}[\pi i + a_{\mu\mu}] + \frac{1}{\pi i}\int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \overset{+}{u}_\mu\, du_\lambda$$

bedeuten, und 2) die $2p$ ganzen Zahlen g, h dadurch gegeben sind, dass

$$\text{E.}\quad \text{an } a_\lambda:\ \log\overset{+}{\vartheta} - \log\overset{-}{\vartheta} = 2h_\lambda \pi i,$$

$$\text{„ } b_\lambda:\ \log\overset{+}{\vartheta} - \log\overset{-}{\vartheta} = -2g_\lambda \pi i - a_{\lambda\lambda} - 2\overset{-}{u}_\lambda + 2e_\lambda$$

ist.

6. Eine ϑ-Function mit den, für die vorstehenden Sätze erforderlichen Eigenschaften A. B. Lehrs. I. existirt aber stets, wenigstens in einer der Ausdrucksformen ϑ, ϑ_ϱ, wie auch immer die p Parameter $e_1 e_2 \cdots e_p$ vorgeschrieben werden mögen.

Folglich lässt sich jedes Parametersystem $e_1 e_2 \cdots e_p$ in die vorstehende Form C. bringen.

Setzt man aber $e_\mu + K_\mu = v_\mu$, für $\mu = 1 2 \cdots p$, so sind $v_1 v_2 \cdots v_p$ ebenso willkürlich, wie $e_1 e_2 \cdots e_p$, die man aus ihnen berechnen kann; es folgt:

V. Durch geeignete Wahl von p Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ in der Fläche T' und den Simultanperioden $(gh)_1, (gh)_2, \cdots, (gh)_p$ können die p Ausdrücke

$$\sum_1^p u_1(\varepsilon_\varkappa) + (gh)_1; \quad \sum_1^p u_2(\varepsilon_\varkappa) + (gh)_2; \cdots \sum_1^p u_p(\varepsilon_\varkappa) + (gh)_p$$

jedes beliebige Werthesystem

$$v_1 v_2 \cdots v_p$$

hervorbringen.

Eine Vervollständigung dieses Satzes wird sich weiter unten ergeben (Abschnitt III, Nr. 20).

7. Das Vorstehende gilt unabhängig von jeder Voraussetzung über die Ausdrucksform, durch welche die hier benutzte Function ϑ darzustellen ist. Wir führen zur Vereinfachung an ihrer Stelle eine andere ϑ-Function ein, welche für den Augenblick durch Θ bezeichnet werden möge, und zwar so dass

$$\lg \Theta = \lg \vartheta - 2 \sum_\mu h_\mu u_\mu + \text{const.}$$

wird. Das ändert nur die Querschnittseigenschaften, es wird nämlich

$$\text{an } a\text{:} \quad \log \overset{+}{\Theta} - \log \overset{-}{\Theta} = 0,$$

$$\text{„ } b\text{:} \quad \log \overset{+}{\Theta} - \log \overset{-}{\Theta} = -2 g_\lambda \pi i - a_{\lambda\lambda} - 2\bar{u}_\lambda + 2 e_\lambda - 2 \sum_\mu h_\mu a_{\lambda\mu},$$

während

$$\text{„ } c\text{:} \quad \log \overset{+}{\Theta} - \log \overset{-}{\Theta} = 2\pi i$$

bleibt. Führt man aus C. den Werth von e_λ ein, so wird das, was in der zweiten Formel rechts steht,

$$= - a_{\lambda\lambda} - 2\bar{u}_\lambda + 2 \left[\sum_1^p u_\lambda(\varepsilon_\varkappa) - K_\lambda \right],$$

so dass die auf die neue Function Θ bezüglichen Formeln aus denen des IV. Satzes erhalten werden, wenn man dort die ganzen Zahlen g, h unterdrückt.

Ist insbesondere die hier benutzte Function ϑ durch die Primär- oder eine Secundärreihe ϑ gegeben, also, für $v_\mu = u_\mu - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu$,

$$\vartheta = \vartheta((u_\mu - e_\mu)) = \vartheta((v_\mu - (gh)_\mu)),$$

so folgt aus a. Nr. 4

$$\vartheta = e^{-\Phi((\lambda))+2\Sigma h_\mu v_\mu}\,\vartheta((v_\mu)),$$

also

$$\log\vartheta((v_\mu)) = \log\vartheta - 2\sum h_\mu u_\mu + \text{const.},$$

mithin ist dann Θ die Primär- oder Secundärreihe $\vartheta((v_\mu))$, d. h.

$$\Theta = \vartheta((u_\mu - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu)).$$

8. War also ϑ ursprünglich durch die Primär- oder eine Secundärreihe $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ gegeben, so tritt jetzt an seine Stelle der vereinfachte Ausdruck

$$\vartheta = \vartheta((u_\mu - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\mu) + K_\mu)),$$

und es ist

$$\begin{aligned}
&\text{an } a_\lambda: && \log\overset{+}{\vartheta} - \log\overset{-}{\vartheta} = 0,\\
&\;\text{,,}\;\; b_\lambda: && \log\overset{+}{\vartheta} - \log\overset{-}{\vartheta} = -a_{\lambda\lambda} - 2\Big[u_\lambda - \sum_1^p u_\lambda(\varepsilon_\varkappa) + K_\lambda\Big],\\
&\;\text{,,}\;\; c_\lambda: && \log\overset{+}{\vartheta} - \log\overset{-}{\vartheta} = 2\pi i.
\end{aligned}$$

Hier sind an Stelle der Parameter $e_1 e_2 \cdots e_p$ der Function ihre Nullpunkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ eingeführt, aber es darf nicht ausser Acht gelassen werden dass, während jene ganz nach Belieben vorausgesetzt werden dürfen, Bestimmungen ähnlicher Art über die Lagerung der letztern noch ausstehen. Aber das was hier vorliegt, reicht aus zur Herleitung eines Ausdrucks, welcher zunächst die vorstehende Function, dann aber für beliebig vorzuschreibende Lagen der p Nullpunkte eine ϑ-Function darstellt. Ist im Nullpunkte $\varepsilon_\varkappa$ der vorstehenden ϑ-Function $z = \zeta_\varkappa$, so ist dort $\log\vartheta = \log(z - \zeta_\varkappa) +$ funct. cont., und es sind $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ die einzigen Punkte der Fläche T', in denen $\log\vartheta = \infty$ wird.

Diese nämliche Unstetigkeit für einen beliebigen Punkt ε, und ausser ihr nur noch solche, die von der Lage des Punktes ε unabhängig sind, besitzt die von mir eingeführte Integralfunction $R(o\,|\,\varepsilon)$*), welche folgende Eigenschaften hat: Ist ζ der Werth von z im Punkte ε, und sind $\infty_1 \infty_2 \cdots \infty_n$ die unendlich fernen Punkte (Gebiete) der n-blättrigen Fläche T, so ist

*) Vergl. Brioschi, Annali di Mat. X, Seite 97 u. f., wo ich zwei Ausdrücke für $R(\varepsilon) = -R(0\,|\,\varepsilon)$ mitgetheilt habe.

$$(1)\qquad \text{in } \varepsilon: \qquad R = \log(z - \zeta) + \text{funct. cont.},$$

$$\text{in } \infty_1 \infty_2 \cdots \infty_n: \quad R = \frac{1}{n}\log z + \text{funct. cont.}$$
$$= \frac{1}{n}\log(z-\zeta) + \text{funct. cont.},$$

und das sind die einzigen Punkte, in denen $R = \infty$ wird.

2) Um R eindeutig zu machen, zieht man in T' aus einem beliebigen Punkte Ω Schnitte $l\, l_1 \cdots l_n$ nach $\varepsilon\, \infty_1 \cdots \infty_n$. In der so modificirten Fläche T'' ist R eindeutig und stetig; werden bei jedem Schnitte l die Ränder so als $\overset{+}{l}$ und $\overset{-}{l}$ bezeichnet, dass ein positiver Umlauf um den Endpunkt vom —Rande zum +Rande führt, so ist

$$\begin{array}{c|cccccc} \text{an} & a_\lambda & b_\lambda & c_\lambda & l & l_1 l_2 \cdots l_n, \\ \overset{+}{R} - \overset{-}{R} & \mathfrak{A}_\lambda & \mathfrak{B}_\lambda & o & 2\pi i & -\frac{2\pi i}{n}, \end{array}$$

wo $\mathfrak{A}_\lambda$, $\mathfrak{B}_\lambda$ constante Periodicitätsmoduln sind, zwischen denen die p Relationen

$$\mathfrak{B}_\mu = \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \mathfrak{A}_\lambda a_{\lambda\mu} + 2u_\mu(\varepsilon) - \frac{2}{n}\sum_{\varkappa=1}^{n} u_\mu(\infty_\varkappa)$$

bestehen.

Nun seien $o_1 o_2 \cdots o_n$ die n Punkte der Fläche T, die zum Argumente z gehören. Aus den Unstetigkeiten von R findet sich, dass die einwerthige Function von z:

$$\frac{d}{dz}\sum_{\varkappa=1}^{n} R(o_\varkappa \,|\, \varepsilon) = \frac{1}{z-\zeta}$$

ist, also ist

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} R(o_\varkappa \,|\, \varepsilon) = \log(z-\zeta) + C,$$

und C constant, so lange es stetig ist.

Für unsern Zweck ist ein genaues Verständniss dieser Formel unerlässlich. Während in der Fläche T, jedesmal dem gehörigen Blatte entlang, aber nicht durch alle n Blätter zugleich, die Schnitte c, a, b, $l\, l_1 \cdots l_n$ geführt werden, führe man die gleichen Schnitte noch aus in einer einfachen z-Ebene, der Hülfsebene H. Die Fläche T verwandelt sich in eine (zweifach) zusammenhängende Fläche T'', H dagegen zerfällt in Stücken, und in jedem dieser Stücke hat C überall denselben Werth, aber beim Uebergange aus einem Stücke in ein anderes ändert C seinen Werth um den Periodicitätsmodul des Ausdruckes

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} R(o_\varkappa \,|\, \varepsilon) - \log(z-\zeta) = C:$$

Nun enthält R sowie jedes Normalintegral I. G. u_μ noch eine additive, verfügbare Constante, und es handelt sich um eine geeignete Wahl dieser Constanten.

Die Schnitte $l_1 l_2 \cdots l_n$, welche für alle Functionen R die gleichen sind, führe man so, dass sie von hinreichender Ferne an bis in's Unendliche einander bedecken. Von dort an ergiebt das in der Hülfsebene H nur noch einen einzigen Schnitt, und an diesem ist C stetig, da beim Uebergange über denselben alle $R(o_\varkappa \mid \varepsilon) = \frac{1}{n} \log(z-\zeta) +$ funct. cont. sich um gleichviel vermehren, und die Vermehrung des Subtrahenden $\log(z-\zeta)$ n-mal so gross ist.

Bei dieser Wahl der Schnitte $l_1 l_2 \cdots l_n$ hat also C in den fernen Gebieten von H überall den gleichen Werth, und nun wähle ich (bei gehöriger Deutung in $\log(z-\zeta)$) *die additive Constante von R so, dass dort $C = 0$ wird.* Dann folgt *für diesen Theil* der Hülfsebene H:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} R(o_\varkappa \mid \varepsilon) = \log(z-\zeta),$$

also für $z = \infty$

$$\lim\Big[\sum_{\varkappa=1}^{n} R(o_\varkappa \mid \varepsilon) - \log z\Big] = 0. \tag{1}$$

Ebenso wähle ich für jedes Normalintegral I. G. u_μ die additive Constante so, dass

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} u_\mu(\infty_\varkappa) = 0, \qquad (\mu = 1\, 2 \cdots p) \tag{2}$$

wird, was

$$2u_\varkappa(\varepsilon) = \mathfrak{B}_\mu(\varepsilon) - \frac{1}{\pi i} \sum_{\varkappa=1}^{p} \mathfrak{A}_\lambda(\varepsilon)\, a_{\lambda\mu}$$

giebt. Sodann führe ich statt R das Normalintegral P ein:

$$P(o \mid \varepsilon) = R(o \mid \varepsilon) - \frac{1}{\pi i} \sum_{\mu} \mathfrak{A}_\mu \cdot u_\mu(o); \tag{3}$$

es folgt

α) P wird unendlich nur in $\varepsilon, \infty_1 \infty_2 \cdots \infty_n$ und zwar ist:

in ε: $P = \log(z-\zeta) +$ funct. cont.;

in $\infty_1 \infty_2 \cdots \infty_n$ ist: $P = \frac{1}{n} \log z +$ funct. cont.

β) In der Fläche T'' ist P eindeutig und stetig, aber es ist

$$\begin{array}{c|ccccc} \text{an} & a_\lambda & b_\lambda & c_\lambda & l & l_1 l_2 \cdots l_n, \\ \overset{+}{P} - \overset{-}{P} & o & 2u_\lambda(\varepsilon) & o & 2\pi i & -\frac{2\pi i}{n}. \end{array}$$

γ) Für $z = \infty$ wird

$$\lim \left[\sum_1^n P(o_\varkappa | \varepsilon) - \log z \right] = 0.$$

Hieraus folgt, dass das Integral III. Gattung

(4) $$\Pi(o) = P(o|o_1) - P(o|o_2)$$

im Unendlichen stetig bleibt und die

(5) $$\sum_{\varkappa=1}^n \Pi(\infty_\varkappa) = 0$$

ist. —

Dies vorausgeschickt, bilde ich die Function

(6) $$L(o) = \sum_{\varkappa=1}^p P(o|\varepsilon_\varkappa) - \log \vartheta;$$

es folgt

1) L wird unendlich nur in $\infty_1 \infty_2 \cdots \infty_n$, und zwar ist dort

$$L = \frac{p}{n} \log z + \text{funct. cont.}$$

2) Um L eindeutig zu machen, betrachte man es als das Integral des in T' eindeutigen Ausdruckes $\frac{dL}{dz}$; man hat dann T' nur in eine einfach zusammenhängende Fläche T_1' zu verwandeln, in welcher die fortgesetzte Umkreisung derjenigen Punkte gesperrt ist, in denen das Integral, nämlich L selbst, eine logarithmische Unstetigkeit besitzt. Das wird erreicht, indem man die nach $\infty_1 \infty_2 \cdots \infty_n$ führenden und zuletzt einander bedeckenden Schnitte $l_1 l_2 \cdots l_n$ statt in einem beliebigen Punkte Ω, von hier an im Ausgangspunkte ω der p Querschnittbündel c, a, b beginnen lässt.

3) In dieser Fläche T_1' ist also $L(o)$ eindeutig und stetig, und da

an	a_λ	b_λ	c_λ	$l_1 l_2 \cdots l_n$
$\overset{+}{P}(o\|\varepsilon_\varkappa) - \overset{-}{P}$	o	$2u_\lambda(\varepsilon_\varkappa)$	o	$-\frac{1}{n} \cdot 2\pi i$
$\log\overset{+}{\vartheta} - \log\overset{-}{\vartheta}$	o	$-a_{\lambda\lambda} - 2\bar{u}_\lambda - 2K_\lambda + 2\sum_1^p u_\lambda(\varepsilon_\varkappa)$	$2\pi i$	o

ist, so ist an den gleichen Schnitten

$\overset{+}{L} - \overset{-}{L}$	o	$a_{\lambda\lambda} + 2\bar{u}_\lambda + 2K_\lambda$	$-2\pi i$	$-\frac{p}{n} 2\pi i$.

Um hiervon sofort Anwendung zu machen, sei ϑ_1 irgend eine andere ϑ-Function mit den Nullpunkten $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_p$ und $L_1 = \Sigma P(o|\delta_\varkappa) - \log \vartheta_1$:

die Differenz $L_1 - L$ ist der Fläche T selbst eindeutig zugeordnet und nie unstetig, also eine Constante. *Folglich ist die Function L selbst bis auf eine additive Constante für jede Lagerung der Nullpunkte von ϑ, also für alle ϑ-Functionen dieselbe.*

Berechnet man daher für p *beliebig angenommene Punkte* $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ eine Function Θ aus der Formel $L(o) = \Sigma P(o|\varepsilon_\varkappa) - \log \Theta$, so erweist Θ sich als eine der Fläche T zugeordnete ϑ-Function mit den Nullpunkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$; eine solche Function existirt also stets, wie auch ihre Nullpunkte vorgeschrieben werden mögen.

Das reicht für den Beweis dieses wichtigen Satzes aus; wir ziehen es vor, den Ausdruck der Function L in eine solche Form zu bringen, dass die entscheidende Eigenschaft, von der Lagerung der Punkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$, genauer von der ihrem ursprünglichen Ausdrucke (6) zu Grunde liegenden Function ϑ nur in einer additiven Constante abzuhängen, an ihm selber sichtbar wird.

Sei $\Pi = \Pi(o)$ das obige Integral III. G. und z_1, z_2 seien die Werthe von z in seinen Unstetigkeitspunkten o_1, o_2, ferner sei

$$P = \int L(o)\, d\Pi,$$

wo wir z auf die Fläche T_1' beschränken, um einen eindeutigen Integranden zu erhalten. Innerhalb dieser Fläche wird $P = \infty$ nur in o_1 und o_2, und zwar ist

$$\text{in } o_1\colon\ \lim (z - z_1) \frac{dP}{dz} = L(o_1), \qquad \text{in } o_2\colon\ \lim (z - z_2) \frac{dP}{dz} = -L(o_2);$$

also sind die Unstetigkeiten von P in diesen Punkten logarithmische mit den Gewichten $L(o_1)$ und $-L(o_2)$. Es folgt

$$L(o_1) - L(o_2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(T_1')} L\, d\Pi.$$

Bezeichnet man durch $(a_\lambda), (b_\lambda), \cdots$ die Beiträge, welche die einzelnen Schnitte liefern, so dass die auszuführende Formel lautet:

$$L(o_1) - L(o_2) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \sum [(a_\lambda) + (b_\lambda) + (c_\lambda)] + \sum (l_\varkappa) \right\},$$

und beachtet man, dass $\frac{d\Pi}{dz}$ wie T verzweigt, also an jedem Schnitte $d\overset{+}{\Pi} = d\overset{-}{\Pi} = d\Pi$ ist, so ergiebt sich

$$\alpha) \qquad (a_\lambda) = \int \left| \begin{matrix} \beta \\ a \\ \gamma \end{matrix} \right|_\lambda (\overset{+}{L} - \overset{-}{L})\, d\Pi = 0,$$

$$\beta) \qquad (b_\lambda) = \int \left| \begin{matrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{matrix} \right|_\lambda (\overset{-}{L} - \overset{+}{L})\, d\Pi = \int \left| \begin{matrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{matrix} \right|_\lambda (-a_{\lambda\lambda} - 2K_\lambda - 2\overset{-}{u}_\lambda)\, d\Pi.$$

Aber an a_λ ist $\overset{+}{\Pi} - \overset{-}{\Pi} = 0$, also $\int \begin{vmatrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{vmatrix}_\lambda d\Pi = 0$, es bleibt:

$$(b_\lambda) = -2\int \begin{vmatrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{vmatrix}_\lambda \overset{-}{u}_\lambda\, d\Pi = -2\int \begin{vmatrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{vmatrix}_\lambda [d(\overset{-}{u}_\lambda \overset{+}{\Pi}) - \overset{+}{\Pi}\, du_\lambda],$$

d. i.

$$(b)_\lambda = -2[u_\lambda(\alpha_\lambda)\,\Pi(\alpha_\lambda') - u_\lambda(\gamma_\lambda)\,\Pi(\beta_\lambda)] + 2\int \begin{vmatrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{vmatrix}_\lambda \overset{+}{\Pi}\, du_\lambda.$$

Nun ist $\Pi(\beta_\lambda) = \Pi(\alpha_\lambda')$, $u_\lambda(\alpha_\lambda) - u_\lambda(\gamma_\lambda) = \pi i$, also

$$u_\lambda(\alpha_\lambda)\,\Pi(\alpha_\lambda') - u_\lambda(\gamma_\lambda)\,\Pi(\beta_\lambda) = [u_\lambda(\alpha_\lambda) - u_\lambda(\gamma_\lambda)]\,\Pi(\alpha_\lambda') = \pi i\,\Pi(\alpha_\lambda'),$$

und so folgt

$$(b_\lambda) = 2\int \begin{vmatrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{vmatrix}_\lambda \overset{+}{\Pi}\, du_\lambda - 2\pi i\,\Pi(\alpha_\lambda').$$

γ)
$$(c_\lambda) = \int \begin{vmatrix} \alpha' \\ c \\ \omega \end{vmatrix}_\lambda (\overset{-}{L} - \overset{+}{L})\, d\Pi = 2\pi i[\Pi(\alpha_\lambda') - \Pi(\omega)].$$

Das giebt für's Erste

$$\sum[(a_\lambda) + (b_\lambda) + (c_\lambda)] = 2\sum\int \begin{vmatrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{vmatrix}_\lambda \overset{+}{\Pi}\, du_\lambda - p\cdot 2\pi i\,\Pi(\omega).$$

Dazu kommt

δ)
$$(l_\varkappa) = \int \begin{vmatrix} \infty \\ l \\ \omega \end{vmatrix}_\varkappa (\overset{+}{L} - \overset{-}{L})\, d\Pi = -\frac{p}{n}\cdot 2\pi i[\Pi(\infty_\varkappa) - \Pi(\omega)].$$

Nun ist

(5)
$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \Pi(\infty_\varkappa) = 0,$$

also folgt

$$\sum (l_\varkappa) = p\cdot 2\pi i\,\Pi(\omega).$$

Führt man die Werthe beider Summen in die auszuführende Formel ein, so hebt $\Pi(\omega)$ sich weg, und es bleibt

$$L(o_1) - L(o_2) = \frac{1}{\pi i}\sum\int \begin{vmatrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{vmatrix}_\lambda \overset{+}{\Pi}\, du_\lambda.$$

Hier wird für Π sein Ausdruck $P(o\,|\,o_1) - P(o\,|\,o_2)$ aus (4) eingesetzt; ist dann, für einen Augenblick,

$$L(o) - \frac{1}{\pi i}\sum\int \begin{vmatrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{vmatrix}_\lambda P(\overset{+}{\omega}\,|\,o)\, du_\lambda(\omega) = \Delta(o),$$

so haben wir $\Delta(o_1) = \Delta(o_2)$, also hat die Function $\Delta(o)$ in der Fläche T_1' überall denselben Werth. Bezeichnet man diesen durch $-\log C$, so ist C eine Constante. Jetzt giebt die Formel (6)

$$\log\vartheta = \sum_{\varkappa=1}^{p} P(o\,|\,\varepsilon_\varkappa) + \log C - \frac{1}{\pi i}\sum_{\lambda=1}^{p}\int\left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \overset{+}{P}(\omega\,|\,o)\,du_\lambda(\omega);$$

ich schreibe, mit etwas geänderter Bezeichnung:

$$L(o) = \frac{1}{\pi i}\sum_{\lambda=1}^{p}\int\left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \overset{+}{P}(\omega\,|\,o)\,du_\lambda(\omega), \tag{7}$$

und erhalte den Satz

(8) Diese Function von z wird unendlich nur in $\infty_1\,\infty_2\cdots\infty_n$, jedesmal ist

$$L = \frac{p}{n}\log z + \text{funct. cont.}$$

In der einfach zusammenhängenden Fläche T_1' ist sie eindeutig und stetig, und es ist

$$\begin{array}{c||c|c|c|c} \text{an} & a_\lambda & b_\lambda & c_\lambda & l_1\, l_2 \cdots l_n \\ \overset{+}{L} - \overset{-}{L} & o & a_{\lambda\lambda} + 2\overset{-}{u}_\lambda + 2K_\lambda & -2\pi i & -\frac{p}{n}\cdot 2\pi i \end{array}.$$

Weiter folgt, zunächst für die vorgelegte ϑ-Function und die *aus ihrem Ausdrucke zu ermittelnden Nullpunkte* $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_p$ *derselben:*

$$\vartheta = C e^{\Sigma P(o\,|\,\varepsilon_\varkappa) - L(o)}; \tag{9}$$

aber nun erkennt man auf den ersten Blick aus den Eigenschaften der Function P und der, mit Hülfe der speciellen Nullpunkte $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_p$ gewonnenen, aber von ihnen ganz unabhängigen Function L*), dass der vorstehende Ausdruck (9) *für alle Lagerungen der Punkte* $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_p$ die charakteristischen Eigenschaften der ϑ-Function hat, nämlich

1) dass ϑ in der einfach zusammenhängenden Fläche T' eindeutig und stetig ist, und nur in $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_p$ verschwindet, jedesmal zur ersten Ordnung;

---

*) Setzt man $\log r = P(o\,|\,\varepsilon) - \frac{1}{p}[L(o) + L(\varepsilon)]$, so ist r als Function von z in der einfach zusammenhängenden Fläche T' eindeutig und stetig, ausserhalb ε von Null verschieden und in ε Null zur ersten Ordnung. Dies ist die Function, welche vermöge ihrer ausgezeichneten Querschnittseigenschaften den Uebergang zwischen den algebraischen Functionen der Classe und den ϑ-Functionen *wirklich* vermittelt. Vergl. auch Riemann's Th. d. A. F. Artikel 3.

2) dass

$$\begin{array}{c||c|c|c}
\text{an} & a_\lambda & b_\lambda & c_\lambda \\
\log\overset{+}{\vartheta} - \log\overset{-}{\vartheta} & o & -a_{\lambda\lambda} - 2\left[\overline{u}_\lambda - \sum_1^p u_\lambda(\varepsilon_\lambda) + K_\lambda\right] & 2\pi i
\end{array}$$

also

$$3)\quad \text{an } a_\lambda\colon\ \overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta};\qquad \text{an } b_\lambda\colon\ \overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta}\cdot e^{-a_{\lambda\lambda} - 2\overline{u}_\lambda + 2e_\lambda};\qquad \text{an } c_\lambda\colon\ \overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta}$$

ist, für

$$e_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^p u_\lambda(e_\varkappa) - K_\lambda.$$

Damit ist folgender Satz bewiesen:

VI. Die Riemann'sche ϑ-Function existirt stets, wie auch ihre p Nullpunkte vorgeschrieben werden mögen, und sie ist durch diese bis auf einen constanten Factor bestimmt. Sind es die Punkte $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$, so kann man die ϑ-Function stets durch den Ausdruck

$$\vartheta = Ce^{P(o\,|\,\varepsilon_1) + P(o\,|\,\varepsilon_2) + \cdots + P(o\,|\,\varepsilon_p) - L(o)}$$

darstellen, wo C von z unabhängig ist, und dann ist, für $\mu = 1 \cdot 2 \cdots p$

$$e_\mu = \sum_{\varkappa=1}^p u_\mu(\varepsilon_\lambda) - K_\mu$$

der μ^{te} Parameter dieser Function.

9. Fassen wir dies mit dem Lehrsatze I der Nr. 3 zusammen, so haben wir den

1. Fundamentalsatz.

VII. Die Riemann'sche ϑ-Function existirt stets, sei es dass ihr die Parameter $e_1\,e_2 \cdots e_p$ oder die Nullpunkte $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ vorgeschrieben werden, und wie das auch immer geschehen mag. Zwischen jenen und diesen besteht unter allen Umständen die Beziehung, dass für $\mu = 1\ 2 \cdots p$

$$e_\mu = u_\mu(\varepsilon_1) + u_\mu(\varepsilon_2) + \cdots + u_\mu(\varepsilon_p) - K_\mu + (gh)_\mu$$

ist, wo alle g, h ganze Zahlen, und $K_1\,K_2 \cdots K_p$ die Riemann'schen Constanten sind.

Von hier an handelt es sich nur noch um geeignete Ausdrucksformen für die ϑ-Function. Sie ergeben sich durch die Ausscheidung derjenigen Fälle, wo die Summe der primären Reihe identisch Null ist und den vollständigen Nachweis derjenigen Reihenausdrücke (Secundärreihen), welche dann an ihre Stelle treten.

III.

Die Reihenentwicklungen der ϑ-Function.

10. Die nun folgende Untersuchung bezieht sich zunächst auf Ausdrücke von der Form:

$$\vartheta(o|\varepsilon) = \vartheta\left(\left(u_\mu(o) - \sum_{k=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu\right)\right),$$

unter ϑ die Primärreihe, also die Riemann'sche Reihe selbst verstanden. Aus dem Vorangehenden geht fürs Erste nur hervor, dass es Parameter, also auch Punktgruppen $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ giebt, für welche dieser Ausdruck als Function von z nicht identisch Null ist, und für diesen Fall kennen wir den Ausdruck jedes Parameters $\Sigma u_\mu(\varepsilon_\varkappa) - K_\mu$ durch die p Nullpunkte der Function. Der Fall, wo dieser Ausdruck identisch Null ist, ist im I. Abschnitte vorgesehen worden; dass er wirklich vorkommt, muss noch bewiesen werden.

Hülfssatz. Bilden die p Punkte $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ kein Punktsystem I. G.*), so ist der Ausdruck $\vartheta(o|\varepsilon)$ entweder identisch Null, oder $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ sind seine Nullpunkte.

Ist nämlich ϑ nicht identisch Null, und sind dann $\delta_1\,\delta_2 \cdots \delta_p$ seine Nullpunkte, so ist der μ^{te} Parameter $= \Sigma u_\mu(\delta_\varkappa) - K_\mu + (gh)_\mu$, also ist für $\mu = 1, 2, \cdots p$

$$\sum_{k=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) = \sum_{k=1}^{p} u_\mu(\delta_\varkappa) + (gh)_\mu .$$

Wären $\delta_1\,\delta_2 \cdots \delta_p$ andere Punkte als $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$, so wären beides Punktsysteme I. G., was bei $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ ausgeschlossen wurde. Also sind letztere, falls ϑ nicht identisch Null ist, die Nullpunkte von ϑ. Lässt man o mit ε_q zusammenfallen, so folgt in beiden Fällen

$$(1) \qquad \vartheta\left(\left(-\sum_{k=1}^{p-1} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu\right)\right) = 0 .$$

Das ist unter der Voraussetzung bewiesen, dass $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1}$ mit ε_p zusammen kein Punktsystem I. G. bilden; es reicht aus, zu fordern, dass

*) Man bilde die q Gleichungen welche bewirken, dass der allgemeine Integrand I. G. in q Punkten $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_q$ zur Ordnung Eins verschwindet. Diese Punkte heissen im Folgenden ein Punktsystem I. G., wenn unter diesen q Gleichungen sich 1) überzählige befinden und 2) die Anzahl der wesentlichen $\overline{\overline{<}}\, p-1$ ist. Jene entsprechen den „nothwendigen“, diese den „wesentlichen“ Punkten des Systems.

sie für sich allein kein solches bilden sollen. Denn wenn w' der unter dieser Voraussetzung bis auf einen constanten Factor völlig bestimmte Integrand I. G. ist, welcher in $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1}$ verschwindet, so darf man für ε_p nur einen Punkt nehmen, in welchem w' nicht $= 0$ wird, um die ursprüngliche Voraussetzung zu erfüllen.

11. Es ist nun zu beweisen, dass die vorstehende Gleichung (1) auch noch gilt, wenn sich unter diesen $p-1$ Punkten nothwendige befinden, also $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1}$ ein Punktsystem I. G. bilden.

Die Wichtigkeit dieses Lehrsatzes wird es rechtfertigen, wenn wir zwei Beweise desselben geben. Sind $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\alpha \cdots \varepsilon_{p-\varrho-1}\, \varepsilon'_{p-\varrho} \cdots \varepsilon'_\beta \cdots \varepsilon'_{p-1}$ ein Punktsystem I. G. mit den $p-\varrho-1$ wesentlichen Punkten ε_α und den ϱ nothwendigen Punkten ε'_β, so möge für jedes Punktsystem dieser Art

$$\vartheta\left(\!\!\left(-\sum_1^{p-\varrho-1} u_\mu(\varepsilon_\alpha) - \sum_{p-\varrho}^{p-1} u_\mu(\varepsilon'_\beta) + K_\mu\right)\!\!\right) \text{ als eine } E_\varrho$$

bezeichnet werden.

Es ist also bewiesen, dass jede $E_0 = 0$ ist. Ich werde voraussetzen, dass jede $E_{\varrho-1} = 0$ ist, was für $\varrho = 1$ richtig ist, und zeigen, dass darum auch jede $E_\varrho = 0$ folgt: das ist der erste Beweis des Satzes. Zu diesem Zweck bilde ich, unter ϑ stets *die Primärreihe* verstanden,

$$\vartheta = \vartheta\left(\!\!\left(u_\mu(0) - u_\mu(\omega) - \sum_1^{p-\varrho-1} u_\mu(\varepsilon_\alpha) - \sum_{p-\varrho}^{p-1} u_\mu(\varepsilon'_\beta) + K_\mu\right)\!\!\right),$$

wo ω ebenso wie 0 ein variabler Punkt ist, so dass ϑ, wenn 0 mit ω zusammenfällt, in die vorgelegte E_ϱ, aber wenn 0 mit einem der ϱ Punkte ε'_β zusammenfällt, in eine $E_{\varrho-1}$ übergeht, also nach Voraussetzung $= 0$ wird. Dies letztere setzt voraus, dass die $p-\varrho-1$ Punkte ε_α auch mit ω zusammen ein System wesentlicher Punkte bilden; bei der Wahl von ω sind also diejenigen Lagen auszuschliessen, in denen ω selbst ein zu den Punkten ε_α gehöriger nothwendiger Punkt sein würde. Nun findet der Hülfssatz statt, dass ϑ als Function von z entweder identisch Null ist, oder $\omega\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-\varrho-1}\, \varepsilon'_{p-\varrho} \cdots \varepsilon'_{p-1}$ seine Nullpunkte sind: in beiden Fällen folgt die zu beweisende Gleichung $E_\varrho = 0$, wenn man 0 mit ω zusammenfallen lässt.

Ist nämlich ϑ nicht identisch Null, so hat es ausser den bereits nachgewiesenen ϱ Nullpunkten ε'_β noch $p-\varrho$ andere, welche $\eta_1 \cdots \eta_k \cdots \eta_{p-\varrho}$ heissen mögen, und dann ist der μ^{te} Parameter

$$u_\mu(\omega) + \sum u_\mu(\varepsilon_\alpha) + \sum u_\mu(\varepsilon'_\beta) - K_\mu = \sum u_\mu(\varepsilon'_\beta) + \sum u_\mu(\eta_k) - K_\mu + (gh)_\mu,$$

also folgt

$$u_\mu(\omega) + \sum u_\mu(\varepsilon_\alpha) = \sum u_\mu(\eta_\varkappa) + (gh)_\mu,$$

für $\mu = 1, 2, \cdots p$. Wären $\eta_1 \cdots \eta_{p-\varrho}$ andere Punkte als $\omega\ \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{p-\varrho-1}$, so wären beide Gruppen Punktsysteme I. G., was bei letzteren ausgeschlossen ist.

Also wird in allen Fällen $\vartheta = 0$, wenn 0 mit ω zusammenfällt, d. h. ist jede $E_{\varrho-1} = 0$, so ist auch die vorgelegte $E_\varrho = 0$. Da aber jede $E_0 = 0$ ist, so ist es auch jede E_1, jede E_2 u. s. w. bis zur grössten Anzahl nothwendiger Punkte, die unter $p-1$ Punkten vorkommen können; die Gleichung (1) gilt also auch, wenn $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1}$ irgend ein Punktsystem I. G. bilden, so haben wir den

2. Fundamentalsatz.

VIII. Dass für jede Lagerung der $p-1$ Punkte $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1}$ der Ausdruck

$$\vartheta\left(\left(-\sum_{\varkappa=1}^{p-1} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu\right)\right) = 0$$

ist.

Dieser Satz hat eine tiefere Bedeutung, die wir im IV. Abschnitte nachweisen werden.

12. Nach dem vorstehenden formalen Beweise halte ich es für unerlässlich zu zeigen, dass und wie die Richtigkeit des vervollständigten Satzes aus der Stetigkeit der Reihensumme ϑ folgt.

Um den Werth von E_ϱ zu finden, schliesse man jeden nothwendigen Punkt ε'_β in ein endliches Gebiet (ε'_β) ein, welches ausser ihm keinen zweiten nothwendigen Punkt enthält, und nehme beim Ausdrucke E_0 den entsprechenden Punkt ε_β in diesem Gebiete (ε'_β) an. Lässt man nun jeden Punkt ε_β in diesem Gebiete (ε'_β) schwanken, so bleibt $E_0 = 0$, so lange kein Punkt ε_β mit dem zugeordneten ε'_β zusammenfällt; wäre E_ϱ nicht $= 0$, so wäre E_0 unstetig, weil seine Maximalschwankung in diesen Gebieten nicht $= 0$ würde, wenn für jeden derselben die grösste Ortsänderung von ε_β, d. h. die Maximalschwankung des zugehörigen Werthes von z zum Verschwinden gebracht wird.

13. Daraus folgt nun, dass $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ unter allen Umständen Nullpunkte des Ausdruckes $\vartheta(0\,|\,\varepsilon)$ sind. Bilden sie aber ein Punktsystem I. G., so giebt es auch noch andere Gruppen von p Punkten $\delta_1\,\delta_2 \cdots \delta_p$, so dass für $\mu = 1, 2, \cdots p$

$$\sum_{k=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) = \sum_{k=1}^{p} u_\mu(\delta_\varkappa) + (gh)_\mu$$

wird, und dann ist $\vartheta(0|\varepsilon)$ proportional zu $\vartheta(0|\delta)$, also wird $\vartheta(0|\varepsilon)$ auch $= 0$ in $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_p$, und ist demnach identisch Null, da es andernfalls nicht mehr als p Nullpunkte besitzt.

IX. Bilden $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ ein Punktsystem I. G., so ist die Summe der Primärreihe

$$\vartheta\left(\!\left(u_\mu(0) - \sum_{\varkappa=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu\right)\!\right)$$

identisch Null.

14. Damit ist bewiesen, dass der im I. Abschnitte vorgesehene Fall, wo die Summe $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ der Primärreihe identisch Null ist, wirklich vorkommt, und es folgt zugleich, dass die einzigen Fälle, wo dies nicht eintritt, unter denjenigen zu suchen sind, wo die Parameter sich in die Form

$$e_\mu = \sum_{k=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) - K_\mu + (gh)_\mu$$

bringen lassen, ohne dass $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ ein Punktsystem I. G. bilden.

15. Zum ursprünglichen Satze, dass es (Parameter, also auch) Punktgruppen (ε) giebt, für welche $\vartheta(0|\varepsilon)$ nicht identisch Null ist, kommt also jetzt der Satz hinzu, dass es auch solche giebt, für welche $\vartheta(0|\varepsilon)$ identisch verschwindet. Sei

$$\vartheta(0|\varepsilon) = \vartheta\left(\!\left(u_\mu(0) - \sum_{1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu\right)\!\right)$$

identisch Null, aber

$$\vartheta(0|\delta) = \vartheta\left(\!\left(u_\mu(0) - \sum_{1}^{p} u_\mu(\delta_\varkappa) + K_\mu\right)\!\right)$$

sei es nicht.

Wir sind nach dem Vorangehenden sicher, dass $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_p$ kein Punktsystem I. G. bilden, sodann kann es sein, dass $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ ein solches bilden, wir werden jetzt beweisen, dass letzteres wirklich der Fall ist.

Mit Benutzung eines Riemann'schen Gedankens*) bilde ich folgende Reihe von Ausdrücken:

---

*) Ueber das Verschwinden der ϑ-Functionen, art. 3.

$$\Delta_0 = \vartheta\left(\!\left(u_\mu(o) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\right)\!\right),$$

$$\Delta_1 = \vartheta\left(\!\left(u_\mu(o) + u_\mu(o_1) - u_\mu(\delta_{i_1}) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\right)\!\right),$$

$$\text{— — — —}$$

$$\Delta_q = \vartheta\left(\!\left(\sum_0^q u_\mu(o_k) - \sum_1^q u_\mu(\delta_{i_k}) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\right)\!\right),$$

$$\text{= — — —}$$

$$\Delta_p = \vartheta\left(\!\left(\sum_0^p u_\mu(o_k) - \sum_1^p u_\mu(\delta_k) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\right)\!\right).$$

Bei der Bildung von Δ_q ist für $\delta_{i_1}\delta_{i_2}\cdots\delta_{i_q}$ irgend eine Gruppe von q Punkten aus $\delta_1\delta_2\cdots\delta_p$ zu nehmen; das ist auf p_q Arten möglich, und so gross ist die Anzahl verschiedener Ausdrücke, welche unter Δ_q zu verstehen sind. Dann ist noch zu bemerken, dass $o\,o_1\cdots o_p$ unabhängig variable Punkte bedeuten.

Der erste Ausdruck Δ_0 ist nach Voraussetzung $=0$. Sodann ist klar, dass man aus einer Gruppe Δ_q die vorangehende Δ_{q-1} erhält, wenn man den letzten variablen Punkt o_q in jeder einzelnen Δ_q nacheinander mit $\delta_{i_1}\cdots\delta_{i_q}$ zusammenfallen lässt. Sind also sämmtliche Δ_q identisch Null, so sind es auch alle vorangehenden Gruppen $\Delta_{q-1}, \Delta_{q-2}, \cdots \Delta_1, \Delta_0$. *Aber nicht alle folgenden sind es**), denn Δ_p ist nicht identisch Null, wie sofort folgt, wenn man $o_1 o_2 \cdots o_p$ mit $\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_p$ zusammenfallen lässt, wodurch Δ_p ohne Unstetigkeit in den nicht identisch verschwindenden Ausdruck $\vartheta(o\,|\,\delta)$ übergeht.

Daraus folgt, dass es in der Reihe $1, 2, \cdots p$ *eine völlig bestimmte Zahl* ϱ giebt derart, dass 1) für $q<\varrho$ alle Ausdrücke Δ_q identisch Null sind, aber 2) nicht sämmtliche Functionen der Gruppe Δ_ϱ identisch verschwinden. Sei insbesondere

$$\Delta_\varrho = \vartheta\left(\!\left(\sum_0^\varrho u_\mu(o_k) - \sum_1^\varrho u_\mu(\delta_k) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\right)\!\right)$$

nicht identisch Null. Dann wird es, wenn jetzt o der variable Punkt ist, $=0$ in $\delta_1\delta_2\cdots\delta_\varrho$ weil es, wenn o mit einem von diesen Punkten zusammenfällt, sich auf eine $\Delta_{\varrho-1}$ reducirt.

Seien $o_{\varrho+1}\cdots o_p$ die übrigen Nullpunkte von Δ_ϱ. *Sie sind durch den Ausdruck von* Δ_ϱ *völlig bestimmt*, d. h. soweit dieser unmittelbar zu

*) Vergleiche den § 2 in der Abhandlung des Herrn C. Neumann.

erkennen giebt, bestimmt durch die Lagerung von $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_\varrho$, von $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ und $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$, *und diese letztern sind frei wählbar.*

Für die Parameter von Δ_ϱ ergiebt sich

$$-\sum_1^\varrho u_\mu(o_k) + \sum_1^\varrho u_\mu(\delta_k) + \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) - K_\mu$$

$$= \sum_1^\varrho u_\mu(\delta_k) + \sum_{\varrho+1}^p u_\mu(o_k) - K_\mu + (gh)_\mu,$$

zur Bestimmung von $o_{\varrho+1} \cdots o_p$ erhält man also die Gleichungen des Abel'schen Theorems:

$$\text{(a)} \qquad \sum_{k=1}^p u_\mu(\varepsilon_k) = \sum_{k=1}^p u_\mu(o_k) + (gh)_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p),$$

die gesuchten Punkte $o_{\varrho+1} \cdots o_p$ erweisen sich als unabhängig von der Lage der Punkte $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_\varrho$.

Durch diese p Gleichungen sind also, wie wir ausdrücklich wiederholen müssen, die $p - \varrho$ Punkte $o_{\varrho+1} \cdots o_p$ völlig bestimmt, während $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$ verfügbar bleiben. Denn sie geben

$$\Delta_\varrho = \vartheta\left(\left(u_\mu(o) + \sum_1^p u_\mu(o_k) - \sum_1^\varrho u_\mu(\delta_k) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\right)\right)$$

proportional zu

$$\vartheta\left(\left(u_\mu(o) - \sum_1^\varrho u_\mu(\delta_k) - \sum_{\varrho+1}^p u_\mu(o_k) + K_\mu\right)\right);$$

könnte man $o_{\varrho+1} \cdots o_p$ auf mehr als eine Art so wählen, dass den Gleichungen (a) Genüge geschieht, so hätte Δ_ϱ mehr als p Nullpunkte ohne identisch Null zu sein.

Nun ist die Gruppe $o_1 o_2 \cdots o_p$ nicht identisch mit der Gruppe $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$; denn selbst wenn beide Gruppen einzelne Punkte mit einander gemein haben, so enthält die erstere doch auch solche Punkte, die in der andern fehlen, nämlich $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$.

1) Also sind beide Gruppen Punktsysteme I. G., sie sind corresidual, und die eine enthält demnach ebensoviel nothwendige Punkte wie die andere.

2) Aber von der ersten Gruppe können wir die nothwendigen Punkte selber nachweisen, das giebt dann für die andere Gruppe die Anzahl ihrer nothwendigen Punkte. Da nämlich die p Gleichungen (a) ϱ Punkte der ersten Gruppe $(o_1 o_2 \cdots o_\varrho)$ unabhängig variabel lassen, und durch sie die $p - \varrho$ übrigen $(o_{\varrho+1} \cdots o_p)$ völlig bestimmen, so sind diese letztern

wesentliche Punkte und zu ihnen gehören jene als nothwendige. D. h. unterwirft man den allgemeinen Integranden I. G. w' der Bedingung, in den $p-\varrho$ Punkten $o_{\varrho+1}\cdots o_p$ zur ersten Ordnung zu verschwinden, so sind diese $p-\varrho$ Gleichungen von einander unabhängig, aber sie ziehen das Verschwinden von w' in $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$ als nothwendige Folge nach sich.

3) Unter den obigen Voraussetzungen über die Functionengruppen $\Delta_{\varrho-1}$ und Δ_ϱ bilden also auch $\varepsilon_1 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p$ ein Punktsystem I. G., welches aus $p-\varrho$ wesentlichen und ϱ nothwendigen Punkten besteht*).

Beschränken wir uns für einen Augenblick auf das, was unsern nächsten Zweck betrifft, so haben wir aus 1) den Satz:

X. Ist der Ausdruck

$$\vartheta\left(\left(u_\mu(o) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\mu) + K_\mu\right)\right)$$

identisch Null, so bilden $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ ein Punktsystem I. G.

16. Aber das ist die Umkehrung des Satzes IX, Nr. 13; beide vereinigt geben den

3. Fundamentalsatz.

XI. Damit

$$\vartheta\left(\left(u_\mu(o) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\right)\right)$$

identisch verschwinde, ist erforderlich und hinreichend, dass $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ ein Punktsystem I. G. bilden.

Oder auch der

4. Fundamentalsatz.

XII. Der Ausdruck

$$\vartheta\left(\left(u_\mu(o) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\right)\right)$$

ist stets und nur dann nicht identisch Null, wenn sich unter den p Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ kein nothwendiger befindet, und dann sind dies die Nullpunkte der ϑ-Function.

17. Nun lässt sich (Nr. 6) jedes Parametersystem $e_1 e_2 \cdots e_p$ in die Form

---

*) Ich muss es einer andern Gelegenheit vorbehalten, auf die hier benutzten und, nachdem ich den wahren Inhalt herausgestellt habe, sehr leicht zu beweisenden Sätze über Punktsysteme I. G. im Zusammenhange (Abel'sches Theorem, Riemann-Roch'scher Satz) zurückzukommen.

$$e_\mu = \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) - K_\mu + (gh)_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p)$$

bringen. Bilden $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ kein Punktsystem I. G., so ist $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ nach dem Vorstehenden nicht identisch Null, und $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ sind seine Nullpunkte. Bilden sie ein solches, to tritt der in den Nummern 3 und 4 vorgesehene Fall ein, wo $\vartheta((u_\mu - e_\mu)$ identisch Null ist, und es Secundärreihen zu einer durch die Parameter völlig bestimmten, an der angeführten Stelle durch ϱ bezeichneten Ordnung giebt, welche eine ϑ-Function mit diesen Parametern darstellen. Die Nullpunkte $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_p$ einer solchen bilden dann (Nr. 10) ein mit $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ corresiduales System. So oft also vermöge der Wahl der Parameter Secundärreihen statthaben, bilden ihre Nullpunkte stets ein Punktsystem I. G.

Aber es findet auch der umgekehrte Satz statt, dass zu jedem Punktsystem I. G. $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ eine Secundärreihe gehört, von welcher jenes die Nullpunkte sind, und wir sind jetzt im Stande, diese Reihe wirklich herzustellen.

Sei

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$$

ein gegebenes Punktsystem I. G., und ϱ die Anzahl seiner nothwendigen Punkte, also $\varrho \gtreqless 1$.

An Stelle der Reihe von $p+1$ Functionengruppen Δ der Nr. 15 bilde ich folgende $p+1$ Primärreihen:

$$F_q = \vartheta\left(\left(\sum_{k=0}^{q} u_\mu(o_k) - \sum_{k=1}^{q} u_\mu(\omega_k) - \sum_{k=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\right)\right)$$

für $q = 0, 1, \cdots p$. Wie am angegebenen Orte sind $o\, o_1 \cdots o_p$ unabhängig variable Punkte; aber während dort die Punkte $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_p$ noch in fester Lage vorausgesetzt werden mussten, sind sie hier durch unabhängig variable Punkte $\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_p$ ersetzt.

Wiederum ist der erste Ausdruck F_0, in der Reihe $F_0 F_1 \cdots F_p$, identisch Null; ist es auch F_q, so sind es alle vorangehenden, aber nicht alle folgenden sind es, denn F_p ist nicht für alle Lagen der $2p+1$ variabeln Punkte $o\, o_1 \cdots o_p\ \omega_1 \cdots \omega_\nu$ Null da es, wenn $o_1 o_2 \cdots o_p$ nach $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ rücken, sich in eine Primärreihe verwandelt, deren Summe nach XII. nicht identisch Null ist. Daraus folgt, wie in Nr. 15 der Schluss, dass es zwischen o und p eine Zahl σ giebt, so dass F_σ nicht identisch Null ist, wohl aber $F_{\sigma-1}$ und jedes vorangehende F_q. Die Resultate, welche dort gefunden wurden, liefern jetzt den Werth von σ und damit die Umkehrung jener Sätze.

In der That verschwindet F_σ als Function von z in $\omega_1\,\omega_2\cdots\omega_\sigma$ und nach Nr. 15 in denjenigen völlig bestimmten $p-\sigma$ Punkten $o_{\sigma+1}\cdots o_p$, welche durch $o_1\cdots o_\sigma$ zu einem mit $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_p$ corresidualen System ergänzt werden; in diesem sind aber $o_1\,o_2\cdots o_\sigma$ und nur diese willkürlich wählbar, also sind sie die nothwendigen Punkte dieses Systems. Da aber die Anzahl der nothwendigen Punkte für beide corresiduale Systeme die nämliche ist, folgt $\sigma=\varrho$.

Wir müssen alles, was hiermit bewiesen ist, zusammenstellen.

Vorausgesetzt ist, dass $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_p$ ein Punktsystem I. G. mit ϱ nothwendigen Punkten bilden. Es folgt

1) dass, unter ϑ die Primärreihe verstanden,

$$F_\varrho=\vartheta\Big(\Big(\sum_0^\varrho u_\mu(o_k)-\sum_1^\varrho u_\mu(\omega_k)-\sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k)+K_\mu\Big)\Big)$$

nicht identisch Null, sondern eine ϑ-Function ist;

2) dass es als Function von z Null wird in den ϱ unabhängig variabeln Punkten $\omega_1\,\omega_2\cdots\omega_\varrho$ und denjenigen $p-\varrho$ Punkten $o_{\varrho+1}\cdots o_p$, welche vermöge der Gleichungen

$$\text{(a)}\qquad \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k)=\sum_1^p u_\mu(o_k)+(gh)_\mu\qquad(\mu=1,2,\cdots p)$$

durch die ϱ Punkte $o_1\,o_2\cdots o_\varrho$ zu einem mit $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_p$ corresidualen System ergänzt werden;

3) dass ferner $F_\varrho=0$ wird, wenn irgend einer der ϱ variabeln Punkte $\omega_1\,\omega_2\cdots\omega_\varrho$ mit irgend einem der $\varrho+1$ Punkte $o\,o_1\cdots o_\varrho$ zusammenfällt und

4) dass F_ϱ in allen diesen Fällen nur zur ersten Ordnung Null wird.

Es handelt sich um die Folgerungen, welche sich aus diesen vier Grundeigenschaften der ϑ-Function F_ϱ ergeben. Dabei möge der Werth von z für den Punkt o_k durch z_k, für den Punkt ω_k durch ζ_k bezeichnet werden.

Wir entwickeln F_ϱ als Function von ζ_ϱ nach Potenzen von $\zeta_\varrho-z_\varrho$, indem wir dabei in der Fläche T den Punkt o_ϱ zum Entwicklungscentrum nehmen. Da F_ϱ in demselben zur ersten Ordnung verschwindet, so hat die Entwicklung die Form

$$F_\varrho=2(z_\varrho-\zeta_\varrho)\,F'_{\varrho-1}+\frac{(2(z_\varrho-\zeta_\varrho))^2}{1\cdot 2}\,F''_{\varrho-1}+\cdots,$$

und es ist $F'_{\varrho-1}$ als Function der übrigen Variabeln $z\,z_1\cdots z_\varrho\;\zeta_1\cdots\zeta_{\varrho-1}$ nicht identisch Null. Schreiben wir zur Abkürzung

$$v_\mu = \sum_0^{\varrho-1} u_\mu(o_k) - \sum_1^{\varrho-1} u_\mu(\omega_k) - \sum_1^{p} u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu$$

also

$$F_\varrho = \sum e^{\Phi((m))+2\Sigma m_\mu v_\mu} \cdot e^{2\Sigma m_\mu \{u_\mu(o_\varrho)-u_\mu(\omega_\varrho)\}},$$

so folgt

$$F'_{\varrho-1} = \sum e^{\Phi((m))+2\Sigma m_\mu v_\mu} \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_\varrho),$$

wenn $u'_\mu(o)$ den Werth von $\frac{du_\mu}{dz}$ im Punkte o bedeutet.

Das ist eine Secundärreihe erster Ordnung mit den Argumenten $v_1 v_2 \cdots v_p$:

$$F'_{\varrho-1} = \vartheta_1((v_\mu)) = \vartheta_1\Big(\Big(\sum_0^{\varrho-1} u_\mu(o_k) - \sum_1^{\varrho-1} u_\mu(\omega_k) - \sum_1^{p} u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\Big)\Big),$$

und es ist nun zunächst festzustellen, dass dies in Ansehung seiner Argumente, also vom Punkte o_ϱ abgesehen, eine ϑ-Function ist. In der That folgen die hierzu erforderlichen Eigenschaften (A. B. Lehrs. I, Nr. 3) innerhalb der Fläche T' aus der Form des Reihenausdrucks und, wie in Nr. 3 für A_ϱ, die Querschnittseigenschaften aus denen von F_ϱ, wenn man beachtet dass

$$F'_{\varrho-1} = \lim \frac{F_\varrho}{2(z_\varrho - \zeta_\varrho)}$$

ist, wenn ω_ϱ nach o_ϱ rückt.

Es handelt sich nun um den Nachweis, dass auch diese ϑ-Function die oben zusammengestellten vier Grundeigenschaften besitzt, nur dass $\varrho - 1$ an die Stelle von ϱ tritt.

Die erste derselben, dass $F'_{\varrho-1}$ ϑ-Function und nicht identisch Null ist, wurde bereits bewiesen. Sodann hat $F'_{\varrho-1}$, ebenso wie jeder andere Entwicklungscoefficient $F''_{\varrho-1}, \cdots$ als Function von z mit F_ϱ alle diejenigen Nullpunkte gemein, die von ζ_ϱ unabhängig sind, und dasselbe gilt von $F'_{\varrho-1}$ als Function einer der übrigen Variabeln $z_1 \cdots z_{\varrho-1}$ $\zeta_1 \cdots \zeta_{\varrho-1}$.

In allen diesen Fällen wird die Reihensumme F_ϱ nur zur ersten Ordnung Null, unter den Entwicklungscoefficienten $F'_{\varrho-1}, F''_{\varrho-1}, \cdots$ muss es also in jedem einzelnen Falle solche geben, die ebenfalls nur zu dieser niedrigsten Ordnung verschwinden. Dass $F'_{\varrho-1}$ in jedem Falle zu diesen letztern gehört, ist eine der übrigen Grundeigenschaften und muss bewiesen werden.

Als Function von z hat die ϑ-Function $F'_{\varrho-1}$ die Parameter

$$-\sum_1^{\varrho-1} u_\mu(o_k) + \sum_1^{\varrho-1} u_\mu(\omega_k) + \sum_1^{p} u_\mu(\varepsilon_k) - K_\mu,$$

was mit Benutzung der Gleichungen

$$\text{(a)} \qquad \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) = \sum_1^p u_\mu(o_k) + (gh)_\mu$$

in

$$\sum_1^{\varrho-1} u_\mu(\omega_k) + \sum_\varrho^p u_\mu(o_k) + (gh)_\mu - K_\mu$$

übergeht. Sodann ist von den p Nullpunkten $\omega_1 \cdots \omega_\varrho\ o_{\varrho+1} \cdots o_p$ der Function F_ϱ nur einer von ζ_ϱ abhängig, nämlich der Punkt ω_ϱ; die $p-1$ übrigen sind also auch Nullpunkte aller Entwicklungscoefficienten, also auch von $F'_{\varrho-1}$ als Function von z.

Ist η der noch fehlende, so ist der vorstehende μ^{te} Parameter von $F'_{\varrho-1}$ auch

$$= \sum_1^{\varrho-1} u_\mu(\omega_k) + u_\mu(\eta) + \sum_{\varrho+1}^p u_\mu(o_k) - K_\mu + (g'h')_\mu,$$

es folgt

$$u_\mu(\eta) = u_\mu(o_\varrho) + (g-g' \mid h-h')_\mu,$$

für $\mu = 1, 2, \cdots p$. Also ist der gesuchte Punkt η kein anderer als der Punkt o_ϱ selber, weil es sonst eine wie die Fläche T verzweigte Function erster Ordnung von z gäbe, die nämlich in η Null, in o_ϱ unendlich zur Ordnung 1 wird und sonst stetig bleibt, was nur für $p=0$ möglich ist, und die Existenz von Integralen I. G. ausschliesst.

Wir finden, dass $F'_{\varrho-1}$ als Function von z Null wird in den $\varrho-1$ unabhängig variabeln Punkten $\omega_1\,\omega_2 \cdots \omega_{\varrho-1}$, dem Punkt ω_ϱ und den $p-\varrho$ Punkten $o_{\varrho+1} \cdots o_p$, wenn diese so bestimmt werden, dass $o_\varrho\, o_{\varrho+1} \cdots o_p$ mit den $\varrho-1$ Punkten $o_1\, o_2 \cdots o_{\varrho-1}$ vermöge der Gleichungen (a) ein mit $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ corresiduales System bilden, und es ist zu beachten, dass hierbei die Anzahl der nothwendigen Punkte beider Systeme nicht in Betracht gekommen ist. Da dies p getrennt liegende Nullpunkte sind, so wird $F'_{\varrho-1}$ in ihnen nur zur ersten Ordnung Null.

Jetzt folgt ohne Weiteres, dass $F'_{\varrho-1}$ auch verschwindet, wenn umgekehrt einer der $\varrho-1$ Punkte $\omega_1 \cdots \omega_{\varrho-1}$ mit einem der ϱ Punkte $o\, o_1 \cdots o_{\varrho-1}$ zusammenfällt also, wie soeben für den Fall, dass einer der letztern variabel ist, bewiesen wurde, jedesmal nur zur ersten Ordnung verschwindet.

Bei der ϑ-Function

$$F'_{\varrho-1} = \vartheta_1\left(\!\left(\sum_0^{\varrho-1} u_\mu(o_k) - \sum_1^{\varrho-1} u_\mu(\omega_k) + \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu \right)\!\right)$$

sind also die gleichen Grundeigenschaften vorhanden, wie bei der ursprünglichen ϑ-Function F_ϱ, nur dass in ihren Argumenten die Anzahl der variabeln Punkte o von $\varrho+1$ auf ϱ, der Punkte ω von ϱ auf $\varrho-1$ gesunken ist.

Bei der Uebertragung der Grundeigenschaften von F_ϱ auf

$$F'_{\varrho-1} = \lim \frac{F_\varrho}{2(z_\varrho - \zeta_\varrho)}$$

ist bezüglich der Punktsysteme $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ und $o_1 o_2 \cdots o_p$ nur die, durch die Gleichungen (a) ausgedrückte Corresidualität derselben, nicht die Anzahl ihrer nothwendigen Punkte benutzt worden. In Folge dessen übertragen sie sich auch von der ϑ-Function $F'_{\varrho-1}$ auf

$$F''_{\varrho-2} = \lim \frac{F'_{\varrho-1}}{2(z_{\varrho-1} - \zeta_{\varrho-1})},$$

wenn $\omega_{\varrho-1}$ nach $o_{\varrho-1}$ rückt. Das giebt, wenn jetzt zur Abkürzung

$$v_\mu = \sum_0^{\varrho-2} u_\mu(o_k) - \sum_1^{\varrho-2} u_\mu(\omega_k) - \sum_1^{p} u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu$$

geschrieben wird,

$$F''_{\varrho-2} = \sum e^{\Phi((m))+2\Sigma m_\mu v_\mu} \sum m_\mu u'_\mu(o_\varrho) \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_{\varrho-1}),$$

dies ist also eine Secundärreihe zweiter Ordnung mit den Argumenten $v_1 v_2 \cdots v_p$:

$$F''_{\varrho-2} = \vartheta_2((v_\mu)) = \vartheta_2\Big(\Big(\sum_0^{\varrho-2} u_\mu(o_k) - \sum_1^{\varrho-2} u_\mu(\omega_k) - \sum_1^{p} u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\Big)\Big);$$

das ist nicht identisch Null, drückt in Ansehung seiner Argumente, also abgesehen von den beiden Punkten o_ϱ und $o_{\varrho-1}$, eine ϑ-Function aus, als Function von z wird $F''_{\varrho-2}=0$ in den $\varrho-2$ variabeln Punkten $\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_{\varrho-2}$ und denjenigen $p-\varrho+2$ Punkten $o_{\varrho-1} o_\varrho \cdots o_p$, welche bei der vorgeschriebenen Lage von $o_{\varrho-1}$ und o_ϱ, vermöge der Gleichungen

$$\text{(a)} \qquad \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) = \sum_1^p u_\mu(o_k) + (gh)_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p)$$

mit $o_1 o_2 \cdots o_{\varrho-2}$ zusammen ein zu $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ corresiduales System bilden, ferner wird diese Function $=0$, so oft einer der Punkte $\omega_1 \cdots \omega_{\varrho-2}$ mit einem der Punkte $o\, o_1 \cdots o_{\varrho-2}$ zusammenfällt, und in allen diesen Fällen wird sie $=0$ zur Ordnung Eins.

Diese Schlussweise setzt sich fort, und führt schliesslich zum Ausdrucke

$$F_0^{(\varrho)} = \sum e^{\Phi((m))+2\Sigma m_\mu v_\mu} \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_\varrho) \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_{\varrho-1}) \cdots \sum m_\mu u'_\mu(o_1)$$

für

$$e_\mu = u_\mu(o) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu;$$

das ist eine Secundärreihe ϱ^{ter} Ordnung mit den Argumenten $v_1 v_2 \cdots p_p$:

$$F_0^{(\varrho)} = \vartheta_\varrho((v_\mu)) = \vartheta_\varrho((u_\varrho(o) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu))$$

und den Parametern

$$e_\mu = \sum_{k=1}^p u_\mu(\varepsilon_k) - K_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p).$$

Ihre Summe ist Function einer einzigen Variablen z und nicht identisch Null. Sie drückt, als Function von z, eine ϑ-Function aus, und $o_1 o_2 \cdots o_p$ sind ihre Nullpunkte. Diese Punkte repräsentiren jedes zu $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ corresiduale System, da die ϱ nothwendigen Punkte $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$ unabhängig variabel sind.

Nimmt man für $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ zunächst diese p Punkte $o_1 o_2 \cdots o_p$ selber, so ergiebt sich der Satz

XIII. Auch wenn die Nullpunkte $o_1 o_2 \cdots o_p$ der ϑ-Function ein Punktsystem I. G. bilden, kann man diese Function in Reihenform ausdrücken. Ist ϱ die Anzahl der nothwendigen Punkte dieses Systems, und sind das die Punkte $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$, so erhält man als Ausdruck für die verlangte ϑ-Function die Secundärreihe ϱ^{ter} Ordnung:

$$\vartheta_\varrho = \sum e^{\Phi((m)) + 2\sum m_\mu \left| u_\mu(o) - \sum_1^p u_\mu(o_k) + K_\mu \right|} \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_1)$$
$$\cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_2) \cdots \sum m_\mu u'_\mu(o_\varrho),$$

wo im algebraischen Factor unter dem Summenzeichen jeder Integrand I. G. u'_μ auch durch die Function φ_μ ersetzt werden darf, welche seinen Zähler bildet.

18. Führt man aber im Ausdrucke von $F_0^{(\varrho)}$ an Stelle der Punkte ε Parameter ein:

$$e_\mu = \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) - K_\mu + (gh)_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p),$$

und beachtet bezüglich der Simultanperioden $(gh)_\mu$ die Formel (a) Nr. 4, so ergiebt sich der folgende Satz:

XIV. Kann man die p Constanten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ auf irgend eine Art in die Form bringen

$$e_\mu = \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) - K_\mu + (gh)_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p),$$

so dass $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ ein Punktsystem I. G. mit ϱ nothwendigen Punkten bilden, so giebt es unendlich viele ϑ-Functionen mit den Parametern $e_1 e_2 \cdots e_p$. Ihr allgemeiner Ausdruck ist die Secundärreihe ϱ^{ter} Ordnung

$$\vartheta_\varrho((u_\mu - e_\mu)) = \sum e^{\Phi((m)) + 2\Sigma m_\mu (u_\mu - e_\mu)} . \sum m_\mu u'_\mu(o_1)$$
$$\cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_2) \cdots \sum m_\mu u'_\mu(o_\varrho),$$

welche ausser dem Punkte o noch von ϱ unabhängig variabeln Punkten $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$ abhängt. Die Nullpunkte dieser Function bilden dasjenige zu $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ corresiduale System, dessen ϱ nothwendige Punkte $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$ sind.

Es ist nicht ausgeschlossen, dass alle diese corresidualen Systeme von p Punkten einzelne Punkte mit einander gemein haben, dann sind dies gemeinsame Nullpunkte aller ϑ-Functionen der Schaar. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn es in der Classe gar keine Function von der Ordnung p giebt. Benutzt man ϑ-Functionen dieser Art, so stellt der Quotient zweier ϑ-Functionen mit den gleichen Parametern eine algebraische Function r der Classe dar, was niemals möglich ist, wenn nur primäre Reihen zur Verwendung kommen.*)

19. Setzen wir allgemein

$$\vartheta_\sigma = \sum e^{\Phi((m)) + 2\Sigma m_\mu (u_\mu - e_\mu)} . \sum m_\mu u'_\mu(o_1) \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_2) \cdots \sum m_\mu u'_\mu(o_\sigma),$$

wo $e_1 e_2 \cdots e_p$ dieselbe Bedeutung haben wie im vorigen Satze, so lässt sich leicht zeigen, dass unter den Voraussetzungen dieses Satzes nicht bloss $\vartheta((u_\mu - e_\mu)) = \vartheta_0$, sondern auch $\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots \vartheta_{\varrho-1}$ gleich Null sind, und zwar für alle Lagen der Punkte $o\, o_1 \cdots o_{\varrho-1}$, während ϑ_ϱ nicht identisch Null ist. In der That geht

$$F^{(\sigma)}_{\varrho-\sigma} = \sum e^{\Phi((m)) + 2\Sigma m_\mu u_\mu} . \sum m_\mu u'_\mu(o_\varrho) \cdot \sum m_\mu u'_\mu)o_{\varrho-1}) \cdots \sum m_\mu u'_\mu(o_{\varrho+1-\sigma}),$$

für

$$v_\mu = u_\mu(o) + \sum_{k=1}^{p-\sigma} |u_\mu(o_k) - u_\mu(\omega_k)| - e_\mu,$$

*) Vergl. Riemann, Theorie d. Ab.-F. art. 27; der vorstehende Ausdruck ϑ_ϱ tritt auch schon bei Riemann auf, aber in ganz anderem Zusammenhange und mit andern Argumenten r_μ statt $u_\mu - e_\mu$. Ueber d. V. s. dh. 5 Formel 4.

in einen Ausdruck von der Form ϑ_σ über, wenn man $\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_{\varrho-\sigma}$ nach $o_1 o_2 \cdots o_{\varrho-\sigma}$ rücken lässt, nur dass die variabeln Punkte $o_1 o_2 \cdots o_\sigma$ von ϑ_σ hier durch $o_\varrho o_{\varrho-\sigma} \cdots o_{\varrho+1-\sigma}$ ersetzt sind. Aber für $\sigma = 1, 2, \cdots \varrho - 1$ ist von diesem Ausdrucke $F^{(\sigma)}_{\varrho-\sigma}$ bewiesen, dass er verschwindet, wenn ein Punkt ω mit einem Punkte o zusammenfällt, also sind $\vartheta_0 \vartheta_1 \cdots \vartheta_{\varrho-1}$ alle identisch Null, während ϑ_ϱ es nicht ist.

Der Umstand, dass dies nicht bloss für alle Lagen von o, sondern auch von $o_1 o_2 \cdots o_{\varrho-1}$ gilt, führt nun zum Beweise des Satzes, dass unter den obigen Voraussetzungen über die Parameter $e_1 e_2 \cdots e_p$ für

$$v_1 = u_1 - e_1, \; v_2 = u_2 - e_2, \cdots v_p = u_p - e_p$$

ausser der Summe $\vartheta((v_\mu))$ der Primärreihe auch ihre sämmtlichen partiellen Derivirten von der 1^{ten} bis zur $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, aber nicht alle Derivirten ϱ^{ter} Ordnung verschwinden, was die Umkehrung der Sätze aus Nr. 3, 4, und 6 liefert.

Ist nämlich $\varrho > 1$, so ist $\vartheta_1 = 0$ für alle Lagen von o_1. Aber $u_1'(o_1), u_2'(o_1), \cdots u_p'(o_1)$ sind linear unabhängig*) und ϑ_1 ist in ihnen linear und homogen, also sind ihre Coefficienten $= 0$, das sind bis auf den fehlenden Factor 2 die partiellen Derivirten erster Ordnung von ϑ_0. Ist $1 < \sigma < \varrho$, so sind im Ausdrucke von ϑ_σ aus dem nämlichen Grunde $= 0$, 1) die Coefficienten von $u_1'(o_1), u_2'(o_1), \cdots u_p'(o_1)$; 2) in ihnen die Coefficienten von $u_1'(o_2), u_2'(o_2), \cdots u_p'(o_2)$, u. s. w., d. h. für die vorstehenden Werthe von $v_1 v_2 \cdots v_p$ verschwinden auch alle partiellen Derivirten σ^{ter} Ordnung von $\vartheta((v_\mu))$. Dass die Derivirten ϱ^{ter} Ordnung nicht alle $= 0$ sind, versteht sich von selbst, da sonst $\vartheta_\varrho = 0$ wäre.

20. Dies mit den Sätzen der Nummern 3 und 4 zusammengehalten zeigt, dass, wenn $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ identisch Null ist, die Ordnung ϱ der Secundärreihe, welche dann an die Stelle der Primärreihe tritt, sich auf zwei Arten bestimmt, einmal durch das Verhalten der partiellen Derivirten von $\vartheta((v_\mu))$ für die speciellen Argumente $v_\mu = u_\mu - e_\mu$, andererseits aus der Beschaffenheit irgend einer Gruppe von p Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$, für welche

C. $$e_\mu = \sum_{k=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\mu) - K_\mu + (gh)_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p)$$

ist.

In Folge dessen sind wir in der Lage, den wichtigen Lehrsatz der Nr. 6, dass jedes System von p Zahlen $e_1 e_2 \cdots e_p$ sich in die vorstehende Form C. bringen lässt, durch folgende Zusätze zu vervollständigen.

---

*) Vergl. Riemann, Ueber das Verschwinden der ϑ-Functionen, art. 4.

1) Befindet sich unter den p Punkten ε kein nothwendiger, d. h. lassen $e_1 e_2 \cdots e_p$ sich nur auf eine Art in die vorstehende Form C. bringen, so ist die Summe der Primärreihe $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ nicht identisch Null, und $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ sind ihre Nullpunkte.

Ist umgekehrt $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ nicht identisch Null, so lassen sich ihre Parameter nur auf eine Art in die obige Form bringen, unter den Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ befindet sich kein nothwendiger und sie sind die Nullpunkte von ϑ.

2) Bilden die p Punkte ε ein Punktsystem I. G. mit ϱ nothwendigen Punkten, so ist die Summe der Primärreihe $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ nebst ihren ersten bis $(\varrho - 1)^{\text{ten}}$ partiellen Derivirten identisch Null, die ϱ^{ten} Derivirten sind es nicht alle, und bei diesen Nullpunkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ tritt an die Stelle der Primärreihe eine Secundärreihe ϱ^{ter} Ordnung (Lehrs. XIII).

Ist umgekehrt $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ nebst seinen ersten bis $(\varrho - 1)^{\text{ten}}$, aber nicht allen ϱ^{ten} partiellen Derivirten identisch Null, so lassen sich die Parameter $e_1 e_2 \cdots e_p$ auf unendlich viel Arten in die obige Form C. bringen, indem man ϱ von den Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ beliebige Lagen $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$ vorschreiben kann, wodurch dann die Lagen $o_{\varrho+1} \cdots o_p$ der $p - \varrho$ übrigen bestimmt sind. Solche p Punkte bilden ein Punktsystem I. G. vom Ueberschusse ϱ, und $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$ sind die nothwendigen Punkte desselben. Alle diese, zu den gleichen Parametern gehörigen Punktsysteme sind corresidual. Zu solchen Parametern gehört eine Schaar von ϑ-Functionen, nämlich zu jeder Lagerung der nothwendigen Punkte $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$ eine, von welcher diese und die zugehörigen $o_{\varrho+1} \cdots o_p$ die Nullpunkte sind. Ihr Ausdruck ist durch die Parameter $e_1 e_2 \cdots e_p$ und die nothwendigen Punkte $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$ bestimmt (Lehrs. XIV).

Wie sich das auf die Constanten

$$V_1 = e_1 + K_1, \; V_2 = e_2 + K_2, \cdots V_p = e_p + K_p$$

des V. Lehrsatzes Nr. 6 überträgt, braucht nicht weiter ausgeführt zu werden.

IV.

Analytische Bedingung dafür, dass $u_1 u_2 \cdots u_p$ Simultanwerthe sind.

21. Dies alles gründet sich auf den 2. Fundamentalsatz (Nr. 11) dass, unter ϑ die Primärreihe verstanden, der Ausdruck

$$E = \vartheta\left(\left(- \sum_{k=1}^{p-1} u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\right)\right)$$

stets $= 0$ ist. Aber dieser Satz haftet an folgenden Voraussetzungen:

1) dass $u_1(o), u_2(o), \cdots u_p(o)$ *für jede Lage* des Punktes o *Simultanwerthe* bedeuten, d. h. dass sie mit irgend welchen Anfangswerthen zunächst der einfach zusammenhängenden Fläche T' zugeordnet sind, und von dieser aus über das Querschnittsystem hinweg nur auf demselben Integrationswege fortgesetzt werden, wodurch sich für denselben Punkt o die ursprünglichen Werthe $u_1\ u_2 \cdots u_p$, vermehrt um *Simultanperioden* $(gh)_1, (gh)_2, \cdots (gh)_p$ ergeben.

2) Dass die Riemann'schen Constanten (Nr. 5, Lehrs. IV)

$$K_\mu = \frac{1}{2}[\pi i + a_{\mu\mu}] + \frac{1}{\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu} \int \begin{vmatrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{vmatrix}_\lambda \overset{+}{u}_\mu \, du_\lambda$$

aus diesen Simultanwerthen $\overset{+}{u}_\mu$ berechnet sind.

Als nächste Folgerung hieraus ergiebt sich, dass die Argumente

$$v_\mu = -u_\mu(\varepsilon_1) - u_\mu(\varepsilon_2) \cdots - u_\mu(\varepsilon_{p-1}) + K_\mu$$

von E von den Anfangswerthen der Integrale $u_1\, u_2 \cdots u_p$ unabhängig sind. Vermehrt man nämlich u_μ um eine *Constante* c_μ, so vermehrt K_μ sich um

$$\frac{1}{\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu} \int \begin{vmatrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{vmatrix}_\lambda c_\mu \, du_\lambda = (p-1)\, c_\mu ,$$

also wird v_μ dadurch nicht geändert*).

Aendert man insbesondere die Normalintegrale um Simultanperioden, so hat das auf die Argumente von E gar keinen Einfluss.

Riemann benutzt dies zu einer endgültigen Bestimmung des Integrals I. G., indem er an ihrer Stelle die Differenzen $u_\mu - \frac{K_\mu}{p-1}$ einführt so dass, wenn man diese durch $w_1\, w_2 \cdots w_p$ bezeichnet,

$$E = \vartheta\left(\!\left(-w_\mu(\varepsilon_1) - w_\mu(\varepsilon_2) \cdots - w_\mu(\varepsilon_{p-1})\right)\!\right)$$

wird.

Für die folgende Ueberlegung ist eine Aenderung der Voraussetzungen nöthig, und um diese deutlicher hervortreten zu lassen, ist es besser, die Constanten $K_1\, K_2 \cdots K_p$ in Evidenz zu erhalten.

Ich setze voraus

a. dass $u_1\, u_2 \cdots u_p$ Simultanwerthe und zwar diejenigen sind, aus denen $K_1\, K_2 \cdots K_p$ ein für allemal genau oder bis auf Simultanperioden berechnet sind, was für die Formation der ϑ-Reihe ausreicht. Diese Aufgabe, in welcher sich alles concentrirt, was in der Lehre von den ϑ-Functionen an Schwierigkeiten noch zu überwinden übrig bleibt, ist

---

*) Riemann, Theorie der Ab. F. art. 22.

für die ultraelliptischen Functionen aller Genera p von Herrn Prym*) gelöst worden.

b. Dagegen werden wir bei den Werthen der Normalintegrale in den Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1}$ die Beschränkung auf Simultanwerthe aufheben. Zu dem Zweck mögen, von Simultanwerthen $u_1 u_2 \cdots u_p$ aus, die Integrationen bis zu irgend einem Punkte ε fortgesetzt werden, der zur Verfügung bleibt. Verlaufen diese p Wege bei allen Normalintegralen in der Fläche T', so liefern sie Simultanwerthe, nämlich $u_1(\varepsilon)$, $u_2(\varepsilon)$, $\cdots u_p(\varepsilon)$; überschreiten sie das Querschnittsystem, so kommen zu diesen Simultanwerthen Perioden, und zwar sind das 1) Simultanperioden $(gh)_1$, $(gh)_2$, $\cdots (gh)_p$, wenn die p Integrale auf demselben Wege über T' hinaus fortgesetzt werden, sind es dagegen 2) für $u_1 u_2 \cdots u_p$ wesentlich verschiedene Wege, so liefern diese p Integrationen zwar wieder die Simultanwerthe $u_1(\varepsilon)$, $u_2(\varepsilon)$, $\cdots u_p(\varepsilon)$, vermehrt um Perioden, aber das sind dann nicht mehr nothwendig Simultanperioden. Zur Unterscheidung will ich sie, wenn diese p Wege aus T' nach dem Punkte ε führen, durch $P_1(\varepsilon)$, $P_2(\varepsilon)$, $\cdots P_p(\varepsilon)$ bezeichnen. Dann sind die Werthe der Normalintegrale, zu denen man durch diese Integrationen gelangt, folgende:

$$v_1(\varepsilon) = u_1(\varepsilon) + P_1(\varepsilon),\quad v_2(\varepsilon) = u_2(\varepsilon) + P_2(\varepsilon),\quad \cdots v_p(\varepsilon) = u_p(\varepsilon) + P_p(\varepsilon);$$

diese additiven Perioden drücken sich *mittelst ganzer Zahlen* g, h wie folgt aus:

$$P_\mu(\varepsilon) = g_\mu \pi i + h_1^{(\mu)} a_{1\mu} + h_2^{(\mu)} a_{2\mu} + \cdots + h_p^{(\mu)} a_{p\mu},$$

wo aber für die ganzen Zahlen h alle Beschränkungen aufgehoben sind, nämlich 1) die Beschränkung, dass $h_1^{(\mu)} h_2^{(\mu)} \cdots h_p^{(\mu)}$ für jedes μ dieselbe Zahlenreihe sein soll, und 2) die Beschränkung, dass diese Zahlen für $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1}$ an Stelle von ε dieselben sein sollen. Die Werthe g_μ kommen nicht in Betracht, da es Periode zu jedem Argument ist.

c. Wird nun in dieser Weise bei den Argumenten von E die Beschränkung der Normalintegrale auf Simultanwerthe für alle Punkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1}$ aufgehoben, während die Bedeutung von $u_1 u_2 \cdots u_p$ als Simultanwerthe und die Werthe der aus ihnen ein für allemal berechneten Riemann'schen Constanten K_1, K_2, $\cdots K_p$ beibehalten werden, so tritt an die Stelle von E der Ausdruck

$$E' = \vartheta\left(\left(-\sum_{k=1}^{p-1} v_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\right)\right)$$

d. i.

*) Prym, Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche, Seite 35 und 18. Zürich 1866.

$$E' = \vartheta\left(\left(-\sum_1^{p-1} u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu - P_\mu(\varepsilon_1) - P_\mu(\varepsilon_2) \cdots - P_\mu(\varepsilon_{p-1})\right)\right),$$

und wir untersuchen nun was daraus folgt, wenn dieser Ausdruck für alle Lagen von $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1}$ verschwindet.

Ich nehme noch einen Punkt ε_p hinzu, und bilde

$$\vartheta = \vartheta\left(\left(u_\mu(o) - u_\mu(\varepsilon_p) - \sum_1^{p-1} v_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\right)\right)$$

d. i.

$$\vartheta = \vartheta\left(\left(u_\mu(o) - \sum_1^{p} u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu - P_\mu(\varepsilon_1) - P_\mu(\varepsilon_2) \cdots - P_\mu(\varepsilon_{p-1})\right)\right).$$

Ist das 1) nicht identisch Null, so folgt, dass $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ seine Nullpunkte sind, mithin seine Parameter

$$\sum_1^{p} u_\mu(\varepsilon_k) - K_\mu + P_\mu(\varepsilon_1) + P_\mu(\varepsilon_2) + \cdots + P_\mu(\varepsilon_{p-1}) = e_\mu$$

sich mittelst Simultanperioden $(gh)_\mu$ in der Form

$$\sum_1^{p} u_\mu(\varepsilon_k) - K_\mu + (gh)_\mu$$

ausdrücken. Das giebt $P_\mu(\varepsilon_1) + P_\mu(\varepsilon_2) + \cdots + P_\mu(\varepsilon_{p-1}) = (gh)_\mu$ für $\mu = 1, 2, \cdots p$. 2) Die Bedingung, dass ϑ nicht identisch verschwinde, kann man aber stets erfüllen, da die p Punkte $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p$ durchaus zur Verfügung stehen. In der That kann man nach Lehrsatz V der Nr. 6 durch geeignete Wahl dieser Punkte bewirken, dass vorstehende Ausdrücke $e_1\,e_2 \cdots e_p$ beliebig vorgeschriebenen Parametern $v_1\,v_2 \cdots v_p$ gleich werden, insbesondere also auch so, dass ϑ nicht identisch Null wird.

Ist also $E' = 0$ bei jeder Annahme über die Punkte $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1}$, so sind die p Ausdrücke

$$P_\mu(\varepsilon_1) + P_\mu(\varepsilon_2) + \cdots + P_\mu(\varepsilon_{p-}\ ) \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p)$$

stets Simultanperioden $(gh)_\mu$.

Um auf dem kürzesten Wege zum Schlusse zu kommen, lassen wir $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1}$ in einem Punkte ε zusammenfallen, es folgt für $\mu = 1, 2, \cdots p$

$$(p-1)\,P_\mu(\varepsilon) = (gh)_\mu.$$

Da aber alle $P_\mu(\varepsilon) = g_\mu \pi i + h_1^{(\mu)} a_{1\mu} + h_2^{(\mu)} a_{2\mu} + \cdots + h_p^{(\mu)} a_{p\mu}$ ganzzahlige Coefficienten haben, so geht die Division mit $p-1$ in jedes einzelne g, h auf. Ist

$$g_\mu = (p-1)G_\mu, \quad h_\mu = (p-1)H_\mu,$$

so folgt

$$P_\mu(\varepsilon) = (GH)_\mu,$$

d. h. $P_1(\varepsilon)\, P_2(\varepsilon) \cdots P_p(\varepsilon)$ sind Simultanperioden, und zwar für jede Lage des Punktes ε, mithin sind $v_1(\varepsilon)\, v_2(\varepsilon) \cdots v_p(\varepsilon)$ für jede Lage von ε Simultanwerthe, wenn auch nicht mehr beschränkt auf die einfach zusammenhängende Fläche T'.

Wir haben demnach den folgenden Satz, welcher eine Ergänzung des 2. Fundamentalsatzes bildet:

XV. Für jedes Normalintegral u_μ werde über die in ihm enthaltene additive Constante ein für allemal verfügt, und aus irgend einem System von Simultanwerthen dieser Integrale seien auch die Riemann'schen Constanten $K_1\, K_2 \cdots K_p$ ein für allemal berechnet. Unter diesen Voraussetzungen darf man fordern, dass der Ausdruck

$$\vartheta(\!(- u_\mu(\varepsilon_1) - u_\mu(\varepsilon_2) - \cdots - u_\mu(\varepsilon_{p-1}) + K_\mu)\!)$$

für alle Lagen der $p-1$ Punkte $\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1}$ verschwinde, und hat dann die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass $u_1\, u_2 \cdots n_p$ stets Simultanwerthe sind.

Diese Bedingungen sind nothwendig, denn wenn $u_1\, u_2 \cdots u_p$ Simultanwerthe sind, darf man den Ausdruck nach dem 2. Fundamentalsatze nicht von Null verschieden voraussetzen, und nach dem, was soeben bewiesen wurde, reicht sie auch aus, damit $u_1\, u_2 \cdots u_p$ Simultanwerthe sind, was dann, durch Addition von Simultanperioden, zu Systemen von Simultanwerthen führt.

V.

Die Riemann'schen Constanten.

22. Die vollständige Herstellung des Ausdruckes einer (primären oder secundären) ϑ-Reihe bei vorgeschriebenen Nullpunkten ist nun auf die Ermittelung der Riemann'schen Constanten

$$K_\mu = \frac{1}{2}(\pi i + a_{\mu\mu}) + \frac{1}{\pi i} \sum_{\lambda \lessgtr \mu} \int \left| \begin{matrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{matrix} \right|_\lambda^+ u_\mu\, du_\lambda \quad (\mu = 1, 2, \cdots p)$$

zurückgeführt.

Es ist mir (1889) gelungen, die hier verlangten Integrationen für die ultraelliptischen Functionen aller Genera $p > 1$ direct auszuführen. Dadurch wurde es mir möglich, in der bereits oben (Einleitung, Convergenzbeweis) erwähnten Vorlesung vom Jahre 1890 die Theorie der ultraelliptischen Functionen aller Genera vollständig durchzuführen, ohne dafür irgend einen Satz aus der allgemeinen Theorie der Abel'schen Functionen heranziehen zu müssen.

Ich beginne mit diesem besondern Falle, und lasse dann erst die allgemeinen Hülfsmittel folgen, welche, an einen Riemann'schen Gedanken*) anknüpfend, es Herrn Prym möglich gemacht haben, schon vor 35 Jahren die gleiche Aufgabe für die ultraelliptischen Functionen $p > 1$ zu lösen. Ich kann diese Gelegenheit nicht vorübergehen lassen, ohne die unbeschreiblichen Verdienste in Erinnerung zu bringen, welche Herr Prym sich durch seine damaligen Publicationen um das Verständniss Riemann's erworben hat.

23. *Die Riemann'schen Constanten für die ultraelliptischen Functionen; Querschnittsystem Neumanns.***) Die Irrationalität dieser Theorie sei

$$S = \sqrt{f(z)}, \quad f(z) = z - \alpha \cdot z - \alpha_1 \cdot z - \alpha_2 \cdots z - \alpha_{2p+1},$$

$\alpha\,\alpha_1 \cdots \alpha_{2p+1}$ seien die $2p+2$ Verzweigungspunkte $\Delta\,\Delta_1 \cdots \Delta_p$ die Doppellinien der Fläche T, und zwar reiche Δ von α bis α_1, Δ_1 von α_2 bis $\alpha_3, \cdots \Delta_\lambda$ von $\alpha_{2\lambda}$ bis $\alpha_{2\lambda+1}, \cdots \Delta_p$ von α_{2p} bis α_{2p+1}. Die Fläche T

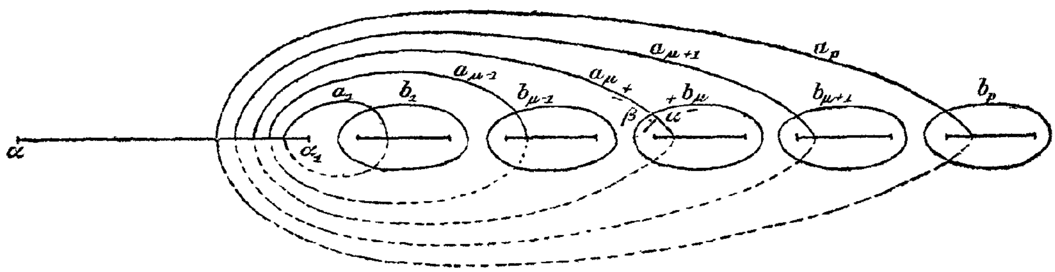

Fig. 2.

besteht aus zwei Blättern E_1 und E_2: sie sind in den Doppellinien über Kreuz aneinander geheftet.

Das Neumann'sche Querschnittsystem, an welches sich erhebliche Vereinfachungen knüpfen, entsteht wie folgt. Zuerst werden über E_1 Ringschnitte $b_1\,b_2 \cdots b_p$ um $\Delta_1\,\Delta_2 \cdots \Delta_p$ gelegt, dann einer nach dem andern, zu jedem ein Querschnitt $a_1\,a_2 \cdots a_p$ in der Weise, dass zunächst a_1, dann $a_2, \cdots$, dann $a_\lambda, \cdots$ und zuletzt a_p über E_1 hinweg von Δ durch $b_1\,b_2 \cdots b_\lambda \cdots b_p$ nach $\Delta_1\,\Delta_2 \cdots \Delta_\lambda \cdots \Delta_p$ führt, und dann auf E_2 übergehend, dort zum ringförmigen Abschluss gebracht wird.

Um eine einfach zusammenhängende Fläche zu erhalten, bedarf es

---

*) Theorie d. Ab. F. Art. 23.

**) Carl Neumann: Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. Leipzig 1865. VIII. Vorlesung, 5. Abschnitt. Die vorstehende Skizze entspricht *im Wesentlichen* dem Schnittsystem Neumann's.

noch eines Schnittsystems c, welches sich aber für unsern augenblicklichen Zweck als überflüssig erweist.

Bei den Integralen I. G. nehme ich zur untern Grenze den Verzweigungspunkt α: in der durch das Schnittsystem a, b begrenzten Fläche T, ist dann jedes Integral I. G. eindeutig und stetig, und die Summe der Werthe, die es auf E_1 und E_2 im Unendlichen annimmt, gleich Null. Die Normalintegrale I. G. bezeichne ich wie folgt:

$$u_\mu(o) = \int_\alpha^z \frac{\Phi_\mu(z)\,dz}{s} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p),$$

o ist der veränderliche Punkt z, s und $\Phi_\mu(z)$ eine ganze Function von z, deren Grad $\overline{\gtrless} p - 1$ ist. Was die Periodicitätsmoduln betrifft, braucht nicht wiederholt zu werden.

Dazu kommt nun die Function $R(o|\varepsilon)$, welche ich an Stelle des Riemann'schen Integrals III. G. in die allgemeine Theorie der Abel'schen Functionen eingeführt habe. Haben z, s im Punkte ε die Werthe ζ, σ, so ist für den Fall der ultraelliptischen Functionen

$$R(o|\varepsilon) = \int \frac{s+\sigma}{z-\zeta} \cdot \frac{dz}{2s},$$

und wenn $\mathfrak{A}_\lambda(\varepsilon)$, $\mathfrak{B}_\lambda(\varepsilon)$ seine Periodicitätsmoduln an a_λ, b_λ sind,

$$\mathfrak{A}_\lambda(\varepsilon) = \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \frac{s+\sigma}{z-\zeta} \cdot \frac{dz}{2s}, \quad \mathfrak{B}_\lambda(\varepsilon) = \int \left|\begin{matrix}\beta\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \frac{s+\sigma}{z-\zeta} \cdot \frac{dz}{2s}$$

mit der Beschränkung, dass kein Integrationsweg b_λ, a_λ durch den Punkt ε gehen darf. Das giebt, für $\mu = 1, 2, \cdots p$:

$$\mathfrak{B}_\mu(\varepsilon) = 2u_\mu(\varepsilon) + \frac{1}{\pi i} \sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu} \mathfrak{A}_\nu(\varepsilon).$$

Dies benutze ich umgekehrt, um einen völlig ausgeführten Ausdruck für die Normalintegrale I. G. zu gewinnen:

$$2u_\mu(\varepsilon) = \mathfrak{B}_\mu(\varepsilon) - \frac{1}{\pi i} \sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu} \mathfrak{A}_\nu(\varepsilon)$$

oder

$$2u_\mu(\varepsilon) = \int \left|\begin{matrix}\beta\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\mu \frac{s+\sigma}{z-\zeta} \cdot \frac{dz}{2s} - \frac{1}{\pi i} \sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu} \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\nu \frac{s+\sigma}{z-\zeta} \cdot \frac{dz}{2s}.$$

Vergleicht man dies mit dem ursprünglichen Ausdrucke

$$u_\mu(\varepsilon) = \int_\alpha^\zeta \frac{\Phi_\mu(\zeta)\,dz}{\sigma},$$

so sieht man, dass die Variable ζ hier obere Grenze der Integration ist, während sie im neuen, völlig ausgeführten Ausdrucke, *Parameter unter dem Integralzeichen ist.*

Der neue Ausdruck für $u_\mu(\varepsilon)$ setzt aber voraus, dass kein Querschnitt a_μ, b_ν durch ε geht, oder dass der Punkt ε keinem Integrationswege a_μ, b_ν angehört: der Ausdruck für K_μ:

$$K_\mu = \frac{1}{2}(\pi i + a_{\mu\mu}) + \frac{1}{2\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu} \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda 2\overset{+}{u}_\mu \, du_\lambda$$

dagegen fordert, dass der variable Punkt dem $+$ Rande von b_λ folgt. Beiden zugleich genügen wir, indem wir im Ausdrucke für K_μ jeden Integrationsweg b_λ $(\lambda \lessgtr \mu)$ zu einem *ihn einschliessenden* b'_λ erweitern, und ihn bei der Integration vom Punkte ε durchlaufen lassen.

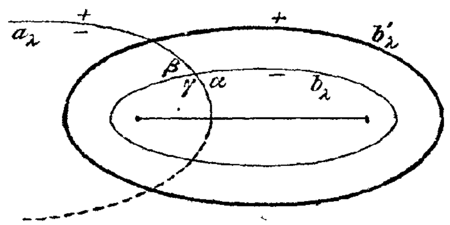

Fig. 3.

Das giebt dann

$$K_\mu = \frac{1}{2}(\pi i + a_{\mu\mu}) + \frac{1}{2\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu} \int \left|\begin{matrix}\alpha'\\ b'\\ \gamma'\end{matrix}\right|_\lambda 2u_\mu(\varepsilon)\, du_\lambda(\varepsilon)$$

d. i.

$$K_\mu = \frac{1}{2}(\pi i + a_{\mu\mu}) + \frac{1}{4\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu} \int \left|\begin{matrix}\alpha'\\ b'\\ \gamma'\end{matrix}\right|_\lambda$$

$$\left\{\int \left|\begin{matrix}\beta\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\mu \frac{s+\sigma}{z-\zeta}\cdot\frac{dz}{s} - \frac{1}{\pi i}\sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu}\int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\nu \frac{s+\sigma}{z-\zeta}\cdot\frac{dz}{s}\right\} du_\lambda(\varepsilon),$$

wo die Reihenfolge der Integrationen umkehrbar ist, da beim Integranden jede Unstetigkeit ausgeschlossen ist. Dabei fällt ins Gewicht, dass b'_μ als Integrationsweg nicht vorkommt.

Da

$$\frac{s+\sigma}{z-\zeta}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{z-\zeta} + \sigma\cdot\frac{1}{s(z-\zeta)} \quad \text{und} \quad du_\lambda(\varepsilon) = \frac{\Phi_\lambda(\zeta)\,d\zeta}{\sigma}$$

ist, so ist auch

$$\frac{s+\sigma}{z-\zeta}\cdot\frac{dz}{s}\,du_\lambda(\varepsilon) = du_\lambda(\varepsilon)\cdot\frac{dz}{z-\zeta} - \frac{dz}{s}\cdot\frac{\Phi_\lambda(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

und das giebt

$$K_\mu = \frac{1}{2}(\pi i + a_{\mu\mu}) + \frac{1}{4\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu}\int \begin{vmatrix} \alpha' \\ b' \\ \gamma' \end{vmatrix}_\lambda du_\lambda(\varepsilon)\int \begin{vmatrix} \beta \\ a \\ \gamma \end{vmatrix}_\mu \frac{dz}{z-\zeta}$$

$$-\frac{1}{4\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu}\int \begin{vmatrix} \beta \\ a \\ \gamma \end{vmatrix}_\mu \frac{dz}{s}\int \begin{vmatrix} \alpha' \\ b' \\ \gamma' \end{vmatrix}_\lambda \frac{\Phi_\lambda(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

$$-\frac{1}{4\pi i\cdot\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu}\sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu}\int \begin{vmatrix} \alpha' \\ b' \\ \gamma' \end{vmatrix}_\lambda du_\lambda(\varepsilon)\int \begin{vmatrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{vmatrix}_\nu \frac{dz}{z-\zeta}$$

$$+\frac{1}{4\pi i\cdot\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu}\sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu}\int \begin{vmatrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{vmatrix}_\nu \frac{dz}{s}\int \begin{vmatrix} \alpha' \\ b' \\ \gamma' \end{vmatrix}_\lambda \frac{\Phi_\lambda(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Neben der zweiblättrigen Fläche Π benutze ich noch eine einfache z-Ebene, die Hülfsebene H, in welcher oben der Plan des Querschnittsystems vorgezeichnet ist.

Dort erweist sich das

$$\int \begin{vmatrix} \beta \\ a \\ \gamma \end{vmatrix}_\mu \frac{dz}{z-\zeta} = -2\pi i \quad \text{oder} \quad = 0,$$

jenachdem ζ von a_μ ein- oder ausgeschlossen ist. Es ist aber ζ Punkt von b'_λ, d. h., weil b'_μ fehlt, von $b'_1 \cdots b'_{\mu-1}\, b'_{\mu+1} \cdots b'_p$. Von a_μ eingeschlossen ist ζ, also ε nur für $\lambda = 1, 2, \cdots \mu - 1$, es folgt

$$\frac{1}{4\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu}\int \begin{vmatrix} \alpha' \\ b' \\ \gamma' \end{vmatrix}_\lambda du_\lambda(\varepsilon)\int \begin{vmatrix} \beta \\ a \\ \gamma \end{vmatrix}_\mu \frac{dz}{z-\zeta} = -\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{\mu-1}\int \begin{vmatrix} \alpha' \\ b' \\ \gamma' \end{vmatrix}_\lambda du_\lambda$$

$$= -\frac{\pi i}{2}(\mu - 1).$$

In der zweiten Summe ist z Punkt von a_μ, also, weil $\lambda \lessgtr \mu$ ist, niemals von b'_λ eingeschlossen. Die zweite Summe im Ausdrucke K_μ ist also $= 0\cdot$ Das nämliche folgt für die dritte Summe, da ζ als Punkt von b'_λ niemals von b_ν eingeschlossen sein kann. Es bleibt nur die vierte Summe. Dort ist z Punkt von b_ν, und von b'_λ nur eingeschlossen, wenn $\nu = \lambda$ ist. Die vierte Summe ist also

$$= \frac{1}{4\pi i\cdot\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu} a_{\mu\lambda}\int \begin{vmatrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{vmatrix}_\lambda \frac{dz}{s}\int \begin{vmatrix} \alpha' \\ b' \\ \gamma' \end{vmatrix}_\lambda \frac{\Phi_\lambda(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu} a_{\mu\lambda}\int \begin{vmatrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{vmatrix}_\lambda \frac{\Phi_\lambda(z)\,dz}{s} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda \lessgtr \mu} a_{\mu\lambda}.$$

Alles zusammengenommen haben wir

$$K_\mu = \frac{1}{2}(\pi i + a_{\mu\mu}) - \frac{\pi i}{2}(\mu - 1) + \frac{1}{2}\sum_{\lambda \lesseqgtr \mu} a_{\mu\lambda}$$

oder endlich

$$K_\mu = \pi i - \frac{1}{2}\mu\pi i + \sum_{\lambda=1}^{p} a_{\mu\lambda},$$

wofür wir auch schreiben können:

$$K_\mu = (1-\mu)\pi i + \frac{1}{2}(GH)_\mu,$$

wenn

$$G_\mu = \mu \quad \text{und} \quad H_1 = H_2 = \cdots = H_p = 1$$

gesetzt wird.

24. *Allgemeine Theorie der Riemann'schen Constanten.* Sei

$$\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{2p-2}$$

ein vollständiges Punktsystem I. G. Dasselbe lässt sich auf mindestens eine Art in zwei Gruppen, jede von $p-1$ Punkten so zerfällen, dass jede Gruppe für sich allein nur wesentliche Punkte enthält, und dann enthält jede von beiden Gruppen alle diejenigen Punkte, welche zur andern als nothwendige gehören. Sei $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_\alpha \cdots \varepsilon_{p-1}$ die eine, $\varepsilon_p \cdots \varepsilon_\beta \cdots \varepsilon_{2p-2}$ die andere Gruppe und

$$\vartheta = \vartheta\Big(\!\Big(u_\mu(o) - u_\mu(\omega) - \sum_\alpha u_\mu(\varepsilon_\alpha) + K_\mu\Big)\!\Big)$$

eine Primärreihe, ω ebenso wie o ein variabler Punkt. Dieser Ausdruck ist als Function von z nicht identisch Null, er wird es aber, so oft ω mit einem Punkte ε_β der andern Gruppe zusammenfällt. Da ϑ ausserdem verschwindet, wenn ω und o zusammenfallen, so sind, wenn jetzt ω als variabler, o als fester Punkt betrachtet wird, $o\,\varepsilon_p \cdots \varepsilon_\beta \cdots \varepsilon_{2p-2}$ die Nullpunkte von

$$\vartheta = \vartheta\Big(\!\Big(u_\mu(\omega) - u_\mu(o) + \sum_\alpha u_\mu(\varepsilon_\alpha) - K_\mu\Big)\!\Big),$$

und der μ^{te} Parameter $u_\mu(o) - \sum_\alpha u_\mu(\varepsilon_\alpha) + K_\mu$ drückt sich also aus $= u_\mu(o) + \sum_\beta u_\mu(\varepsilon_\beta) - K_\mu + (g'h')_\mu$. Das giebt die Riemann'sche Formel*)

$$(1) \qquad 2K_\mu = \sum_{k=1}^{2p-2} u_\mu(\varepsilon_k) + (g'h')_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p).$$

*) Theorie der Abel'schen Functionen art. 23, wo die Formel als Congruenz geschrieben ist.

Nun sei w' derjenige Integrand I. G. dessen Nullpunkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{2p-2}$ sind. Ausser diesen Punkten wird w' wie jeder Integrand I. G. $= 0$ nur noch in $\infty_1 \infty_2 \cdots \infty_n$, jedesmal zur Ordnung 2, und es wird $w' = \infty$, und zwar zur ersten Ordnung, in $2p - 2 + 2n$ (einfachen) Verzweigungspunkten der Fläche T. Werden diese durch

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{2p-2+2n}$$

bezeichnet, so giebt das Abel'sche Theorem die p Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{2p-2} u_\mu(\varepsilon_k) + 2\sum_{\mu=1}^{n} u_\mu(\infty_k) - \sum_{\nu=1}^{2p-2+2n} u_\mu(\alpha_\nu) = -(gh)_\mu,$$

und hier sind die ganzen Zahlen g, h durch die Formeln

$$(2) \qquad g_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int \left|\begin{matrix}\gamma\\ a\\ \beta\end{matrix}\right|_\lambda d\log w', \quad h_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda d\log w'$$

bestimmt: ich nenne sie *die zu w' associirten Zahlen.*

Aber nach unserer definitiven Bestimmung der Normalintegrale [(2) Nr. 8] ist

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{n} u_\mu(\infty_k) = 0,$$

es folgt

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{2p-2} u_\mu(\varepsilon_k) = \sum_{\nu} u_\mu(\alpha_\nu) - (gh)_\mu.$$

Dies in (1) eingeführt, gebe

$$(5) \qquad 2K_\mu = \sum_{\nu} u_\mu(\alpha_\nu) + (\mathfrak{G}\,\mathfrak{H})_\mu,$$

dann mögen die $2p$ ganzen, und von der Wahl des Integranden w' völlig unabhängigen Zahlen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ *die Fundamentalzahlen* heissen.

Schafft man hier die Verzweigungspunkte mittels (4) weg, so kommt

$$(6) \qquad 2K_\mu = \sum_{k=1}^{2p-2} u_\mu(\varepsilon_k) + (\mathfrak{G} + g \,|\, \mathfrak{H} + h)_\mu;$$

hier sind also $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ die Fundamentalzahlen, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{2p-2}$ sind die Nullpunkte eines beliebigen Integranden I. G. w' und g, h die zu w' associirten Zahlen.

25. Die weitern Ausführungen setzen die Lösungen der Aufgabe voraus, w' so zu bestimmen, dass seine Nullpunkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots$ zu zwei und zwei zusammenfallen.

A. Seien $\delta_1\,\delta_2 \cdots \delta_{p-1}$ die $p-1$ Punkte, in denen w' jetzt zur zweiten Ordnung Null wird und

B. wiederum seien g, h die zu w' associirten Zahlen.

Aus (6) folgt

$$\text{C.}\qquad K_\mu = \sum_1^{p-1} u_\mu(\delta_\lambda) + \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{G}+g\,|\,\mathfrak{H}+h)_\mu\,,$$

während zugleich

$$\text{D.}\qquad 2K_\mu = \sum_\nu u_\mu(\alpha_\nu) + (\mathfrak{G}\,\mathfrak{H})_\mu$$

ist, wo $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ die von w' ganz unabhängigen Fundamentalzahlen bedeuten.

Zu o nehme man noch einen zweiten variablen Punkt ω, und führe diejenige ϑ-Function ein, deren Nullpunkte $\omega\,\delta_1\,\delta_2 \cdots \delta_{p-1}$ sind. Ist

E. $\varrho \gtreqless 0$ die Anzahl der nothwendigen Punkte im System $\delta_1\,\delta_2 \cdots \delta_{p-1}$, so ist nach Lehrs. XIII, Nr. 17 eine Secundärreihe ϱ^{ter} Ordnung oder wenn $\varrho = 0$ ist eine Primärreihe

$$\vartheta_\varrho\left(\!\left(u_\mu(o) - u_\mu(\omega) - \sum_1^{p-1} u_\mu(\delta_k) + K_\mu\right)\!\right)$$

zu bilden, und ihre Summe ist demnach 1) nicht identisch Null, aber sie wird 2) Null zur Ordnung Eins, wenn o und ω zusammenfallen. Mit Hülfe von C. wird das

$$= \vartheta_\varrho\left(\!\left(u_\mu(o) - u_\mu(\omega) + \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{G}+g\,|\,\mathfrak{H}+h)_\mu\right)\!\right).$$

Hier kommen die Formeln (a), (b) am Schlusse der Nr. 4 zur Anwendung. Die erste giebt, wenn $e_1 \cdots e_p$ die Parameter einer ϑ_ϱ sind,

$$\vartheta_\varrho\left(\!\left(u_\mu - e_\mu - (g'h')_\mu\right)\!\right) = \vartheta_\varrho\left(\!\left(u_\mu - e_\mu\right)\!\right) e^{-\Phi((h')) + 2\sum h'_\mu(u_\mu - e_\mu)}\,.$$

Wir nehmen

$$u_\mu - e_\mu = u_\mu(o) - u_\mu(\omega) + \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{G}+g\,|\,\mathfrak{H}+h)_\mu$$

$$(g'h')_\mu = (\mathfrak{G}+g\,|\,\mathfrak{H}+h)_\mu$$

und setzen zur Vereinfachung der Formeln

$$u_\mu(o) - u_\mu(\omega) = v_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p);$$

eine kleine Reduction giebt dann

$$\vartheta_\varrho\left(\!\left(v_\mu - \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{G}+g\,|\,\mathfrak{H}+h)_\mu\right)\!\right) = \vartheta_\varrho\left(\!\left(v_\mu + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{G}+g\,|\,\mathfrak{H}+h)_\mu\right)\!\right)\cdot(-1)^M\cdot e^{2\sum(\mathfrak{H}_\mu+h_\mu)v_\mu}$$

für

$$M = \sum_\mu (\mathfrak{G}_\mu + g_\mu)(\mathfrak{H}_\mu + h_\mu)\,.$$

Nun ist nach (6) Nr. 4

$$\vartheta_\varrho(\!(+w_\mu)\!) = (-1)^\varrho \vartheta_\varrho(\!(-w_\mu)\!).$$

Wenden wir dies auf der linken Seite der vorstehenden Formel an und setzen

$$e^{\Sigma(\mathfrak{H}_\mu + h_\mu) v_\mu} \vartheta_\varrho(\!(v_\mu + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{G}+g \mid \mathfrak{H}+h)_\mu)\!) = F(\!(v_\mu)\!),$$

so folgt

$$(-1)^\varrho F(\!(-v_\mu)\!) = (-1)^M F(\!(v_\mu)\!).$$

Entwickelt man nun $F(\!(v_\mu)\!)$ nach ganzen homogenen Functionen $V_0, V_1, V_2, \cdots$ der Argumente $v_1 v_2 \cdots v_p$, so muss das constante Glied V_0 fehlen, da $F(\!(v_\mu)\!) = F(\!(u_\mu(o) - u_\mu(\omega))\!)$ verschwindet, wenn o mit ω zusammenfällt, aber der lineare Theil V_1 kann nicht fehlen, weil F im angegebenen Falle nur zur ersten Ordnung verschwindet. Die Entwicklung hat also die Form

$$F(\!(v_\mu)\!) = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots,$$

wo V_1 nicht fehlt, und nun folgt

$$(-1)^{\varrho+1} \{ V_1 - V_2 + V_3 - \cdots \} = (-1)^M \{ V_1 + V_2 + V_3 + \cdots \}.$$

Das giebt

$$(-1)^M = (-1)^{\varrho+1},$$

d. h. M ist mit $\varrho + 1$ zugleich gerade oder ungerade.

26. Damit ist das hier in Aussicht genommene Ziel erreicht; wir haben den folgenden Satz:

XVI. Jeder Integrand I. G. w', dessen $2p - 2$ Nullpunkte zu zwei und zwei zusammenfallen, liefern zur Bestimmung der Fundamentalzahlen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ oder ihrer Reste modulo 2 eine Congruenz

$$\sum_{\mu=1}^{p} (\mathfrak{G}_\mu + g_\mu)(\mathfrak{H}_\mu + h_\mu) \equiv \varrho + 1 \pmod{2},$$

und hier sind

1) g, h die zu w' associirten Zahlen

$$g_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int \begin{vmatrix} \gamma \\ a \\ \beta \end{vmatrix}_\lambda d \log w', \quad h_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int \begin{vmatrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{vmatrix}_\lambda d \log w'.$$

2) Sind $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{p-1}$ die $p-1$ Punkte, in denen — abgesehen von den unendlich fernen Nullpunkten zweiter Ordnung — die Nullpunkte von w' sich paarweise vereinigen, so giebt ϱ an, wie viel nothwendige sich unter jenen befinden.

3) Hat man aus einer genügenden Anzahl solcher Congruenzen die Reste gefunden, welche die Fundamentalzahlen bei der Division durch 2 lassen, so liefert die Formel

$$2K_\mu = \sum_\nu u_\mu(\alpha_\nu) + (\mathfrak{G}\mathfrak{H})_\mu,$$

wenn die Summation über alle $2p - 2 + 2n$ einfachen Verzweigungspunkte α_ν erstreckt wird, die Riemann'schen Constanten bis auf Simultanperioden, was für die Formation aller ϑ-Reihen ausreicht.