

## Bahn 26.

$$v = 0.42748 t.$$

$$\begin{array}{rcl} \xi = & 2.56062 \sin v & \eta = 2.93102 \cos v \\ & - 1.02797 \sin 3v & - 97790 \cos 3v \\ & + 3915 \sin 5v & + 4673 \cos 5v \\ & - 142 \sin 7v & - 25 \cos 7v \\ & + 25 \sin 9v & + 40 \cos 9v \\ & - 1 \sin 11v & 0 \cos 11v \\ & + 1 \sin 13v & 0 \cos 13v \end{array}$$

In der Tafel 2 sind diese periodischen Bahnen dargestellt.  
Kopenhagen, Universitäts-Sternwarte, 1918 Mai 27.

gestellt. Wie aus der Tafel ersichtlich, erhalten wir für  $K = 11.30665$  eine Bahn mit Spitzen auf der  $\eta$ -Achse; diese Spitzen gehen für abnehmendes  $K$  in Schleifen über. Die weitere Verfolgung dieser Klasse würde zu komplizierten Bahnen führen.

Über den Vergleich der äußersten der gerechneten periodischen Bahnen mit der Theorie wird im folgenden Artikel von Herrn *P. Pedersen* berichtet.

Die numerische Berechnung von Bahnen der zweiten Klasse (mit retrograder absoluter Bewegung) ist in Angriff genommen.

*E. Strömgren, J. Fischer-Petersen.*

## Periodische Bahnen in großer Entfernung von den beiden endlichen Massen im problème restreint. Von *P. Pedersen*.

In einer seiner Abhandlungen über das problème restreint hat *Moulton*<sup>1)</sup> die Bewegung der unendlich kleinen Masse in großer Entfernung von den beiden endlichen Massen untersucht. Er zeigt in dieser Abhandlung, daß es zwei solche Klassen einfach-periodischer Bahnen mit reellen Koordinaten gibt, die in einer ersten Näherung als Kreise mit dem gemeinsamen Schwerpunkt der beiden endlichen Massen als Zentrum aufgefaßt werden können. Es wird ferner gezeigt, daß diese beiden Klassen von Bahnen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem  $\xi, \eta$ , dessen  $\xi$ -Achse durch die beiden endlichen Massen geht, retrograd und zur  $\xi$ -Achse symmetrisch sein müssen.

Im folgenden werde ich die ersten Glieder der Fourierschen Reihen in  $\xi$  und  $\eta$  für die genannten beiden Klassen periodischer Bahnen ableiten. Ich werde zunächst den speziellen Fall behandeln, in dem die beiden endlichen Massen gleich groß sind, und nachher zu dem allgemeineren Fall übergehen.

### I. Die beiden endlichen Massen sind gleich groß.

Wenn wir die Einheiten so wählen, daß die konstante Entfernung zwischen den endlichen Massen  $= 2$  ist und daß

$$k^2 m_1 = k^2 m_2 = 4$$

ist, erhalten die Differentialgleichungen der Bewegung der unendlich kleinen Masse das folgende Aussehen<sup>2)</sup>:

$$\begin{aligned} \xi'' - 2\eta' - \xi + 4(\xi - 1)/r_1^3 + 4(\xi + 1)/r_2^3 &= 0 \\ \eta'' + 2\xi' - \eta + 4\eta/r_1^3 + 4\eta/r_2^3 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

wo  $r_1$  und  $r_2$  durch die Gleichungen

$$r_1^2 = (\xi - 1)^2 + \eta^2 \quad r_2^2 = (\xi + 1)^2 + \eta^2 \quad (2)$$

definiert sind.

Das zu den Gleichungen (1) gehörende Jacobische Integral hat die folgende Form:

$$\xi'^2 + \eta'^2 = \xi^2 + \eta^2 + 8/r_1 + 8/r_2 - K \quad (3)$$

wo  $K$  die sogenannte Jacobische Konstante bedeutet.

Wenn wir uns zunächst die beiden endlichen Massen im Anfangspunkt des Koordinatensystems vereinigt denken, wird eine unendlich kleine Masse, die sich in unendlicher Entfernung vom Anfangspunkt befindet, in einem festen Koordinatensystem  $x, y$  sich in einem Kreise um den Anfangspunkt bewegen können. Wenn wir den Radius dieses Kreises mit  $R$  bezeichnen, erhalten wir für die Winkelgeschwindigkeit

$$\text{keit } (\delta): \quad \delta = 2\sqrt{2} \cdot R^{-3/2} \quad (4)$$

und für die lineare Geschwindigkeit:

$$\delta R = 2\sqrt{2} \cdot R^{-1/2}. \quad (5)$$

Die Richtung der Bewegung kann direkt oder retrograd sein.

In dem beweglichen Koordinatensystem  $\xi, \eta$ , dessen Achsen mit der Winkelgeschwindigkeit 1 rotieren, wird die Bewegung der unendlich kleinen Masse mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\mathcal{A} = -1 \pm \delta \quad (6)$$

vor sich gehen.

Wenn die beiden endlichen Massen  $m_1$  und  $m_2$  nicht im Anfangspunkt vereinigt sind, sondern die Koordinaten  $(1, 0)$  bzw.  $(-1, 0)$  im System  $\xi, \eta$  besitzen, gelten diese Resultate natürlich nur in einer ersten Näherung. Es ist aber klar, daß die periodischen Bahnen, die wir studieren wollen, von der Kreisform nur um unendlich kleine Größen abweichen, ebenso wie die Winkelgeschwindigkeit ( $\mathcal{A}$ ) von der Größe  $-1$  nur um eine unendlich kleine Größe verschieden sein kann.

Mit Rücksicht auf die Form der periodischen Bahnen wollen wir, da  $m_1$  und  $m_2$  in bezug auf beide Achsen symmetrisch liegen, voraussetzen, daß die Bahnen sowohl um die  $\eta$ -Achse wie um die  $\xi$ -Achse symmetrisch sind. Unter dieser Voraussetzung können die Fourierschen Reihen für  $\xi$  und  $\eta$  in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \xi &= A_1 \cos v + A_3 \cos 3v + A_5 \cos 5v + \dots \\ \eta &= B_1 \sin v + B_3 \sin 3v + B_5 \sin 5v + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

wo  $v = \kappa t$ .

Die unbekannten Größen sind hier — außer  $\kappa$  — die Koeffizienten  $A_1, B_1, \dots$ , die so zu bestimmen sind, daß  $\xi$  und  $\eta$  die Differentialgleichungen (1) befriedigen. Die Koeffizienten können alle als Funktionen einer einzigen unabhängigen Veränderlichen ausgedrückt werden. Wir wählen als unabhängige Veränderliche die Größe  $R$ , die durch die Gleichung

$$2R = A_1 + B_1 \quad (8)$$

definiert ist.

Wir schreiben dann die Reihen für  $\xi$  und  $\eta$  in der folgenden Form:

$$\begin{aligned} \xi &= R[(1 + a_1) \cos v + a_3 \cos 3v + a_5 \cos 5v + \dots] \\ \eta &= R[(1 - a_1) \sin v + b_3 \sin 3v + b_5 \sin 5v + \dots] \end{aligned} \quad (9)$$

<sup>1)</sup> Transactions of the American Mathematical Society, Vol. XIII, No. 1, p. 96-108.

<sup>2)</sup> Siehe z. B. A. N. 135.234.

Wie oben erwähnt, sind unsere periodischen Bahnen retrograd und die Größe  $\kappa$  also negativ. Um doch  $\kappa$  als eine positive Größe behandeln zu können, schreiben wir die Reihen lieber in der folgenden, endgültigen Form:

$$\begin{aligned}\xi &= R [(1+a_1) \cos v + a_3 \cos 3v + \dots] \\ \eta &= -R [(1-a_1) \sin v + b_3 \sin 3v + \dots].\end{aligned}\quad (10)$$

Die unbekannten Größen sollen jetzt als Funktionen von  $R$  ausgedrückt werden. Die Größe  $R$  wird als unendlich groß 1. Ordnung bezeichnet. Um negative Exponenten in den Reihenentwicklungen möglichst zu vermeiden, führen wir die unendlich kleine Größe 1. Ordnung  $\varepsilon$  ein, die durch

$$\varepsilon = R^{-1} \quad (11)$$

definiert wird.

Die drei ersten Glieder der Differentialgleichungen (1) unterscheiden sich von den beiden letzten darin, daß diese an sich schwieriger zu entwickeln sind, aber andererseits auch darin, daß die beiden letzten Glieder unendlich klein 2. Ordnung, dagegen die drei ersten unendlich groß 1. Ordnung sind. Sobald  $\xi$  und  $\eta$  innerhalb eines gewissen Genauigkeitsgrades bekannt sind, können deshalb die letzten Glieder der Differentialgleichungen mit größerer Genauigkeit berechnet werden als die drei ersten.

Dieses Umstandes können wir uns bei der Berechnung der Koeffizienten bedienen, indem wir die beiden letzten Glieder der Differentialgleichungen ausschließlich mit Hilfe von  $\varepsilon$  ausdrücken, während wir in den drei ersten Gliedern die unbekannten Koeffizienten mitnehmen.

Die Entwicklung bis zu den Gliedern 2. Ordnung einschließlich. Für die Größenordnung der Unbekannten machen wir die vorläufige Voraussetzung:

$$a_1 = o^1 \quad a_3 \sim b_3 = o^3$$

während wir annehmen, daß die übrigen Koeffizienten höherer Ordnung sind. Wir berechnen die einzelnen Glieder der Differentialgleichungen (1), indem wir in den Entwicklungen nur Glieder bis zur 2. Ordnung einschl. mitnehmen. Die drei ersten Glieder der Differentialgleichungen geben:

$$\begin{aligned}\xi'' - 2\eta' - \xi &= -R \{[(\kappa+1)^2 a_1 + (\kappa-1)^2] \cos v \\ &\quad + [(9\kappa^2+1) a_3 - 6\kappa b_3] \cos 3v\} \\ \eta'' + 2\xi' - \eta &= -R \{[(\kappa+1)^2 a_1 - (\kappa-1)^2] \sin v \\ &\quad + [6\kappa a_3 - (9\kappa^2+1) b_3] \sin 3v\}.\end{aligned}\quad (12)$$

Für die zwei letzten Glieder der Differentialgleichungen erhalten wir:

$$\begin{aligned}4(\xi-1)/r_1^3 + 4(\xi+1)/r_2^3 &= 8\varepsilon^2 \cos v \\ 4\eta/r_1^3 + 4\eta/r_2^3 &= -8\varepsilon^2 \sin v.\end{aligned}\quad (13)$$

Wenn wir diese Ausdrücke in die Gleichungen (1) einsetzen und die Koeffizienten von  $\cos v$  bzw.  $\sin v$  gleich null setzen, ergeben sich die folgenden beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}R[(\kappa+1)^2 a_1 + (\kappa-1)^2] &= 8\varepsilon^2 \\ R[(\kappa+1)^2 a_1 - (\kappa-1)^2] &= -8\varepsilon^2\end{aligned}\quad (14)$$

aus denen  $a_1$  und  $\kappa$  erhalten werden können.

Für die Bestimmung von  $a_3$  und  $b_3$  erhalten wir:

$$\begin{aligned}R[(9\kappa^2+1) a_3 - 6\kappa b_3] &= 0 \\ R[6\kappa a_3 - (9\kappa^2+1) b_3] &= 0.\end{aligned}\quad (15)$$

Die Auflösung der Gleichungen (14) gibt:

$$a_1 = 0 \quad \kappa = 1 \mp 2\sqrt{2} \cdot \varepsilon^{3/2} \quad (16)$$

und die Auflösung der Gleichung (15):

$$a_3 = 0 \quad b_3 = 0.$$

Das doppelte Vorzeichen im Ausdruck für  $\kappa$  bezieht sich auf die beiden verschiedenen, in der Einleitung angeordneten Klassen, die eine mit im festen Koordinatensysteme direkter (Klasse I), die andere mit im festen Koordinatensysteme retrograder Bewegung (Klasse II).

Die Entwicklung bis zu den Gliedern 4. Ordnung einschließlich. Das eben erhaltene Resultat zeigt, daß die Unbekannten  $a_1$ ,  $a_3$  und  $b_3$  unendlich kleine Größen höherer als 3. Ordnung sein müssen.

Wir setzen jetzt

$$a_1 \sim a_3 \sim b_3 = o^3 \quad a_5 \sim b_5 = o^5$$

wonach die beiden letzten Glieder der Differentialgleichungen bis zur 4. Ordnung einschl. berechnet werden können.

$$\text{Wir erhalten: } r^2 = R^2 \mp 2R \cos v + 1 \quad (17)$$

wo das obere Vorzeichen sich auf  $r_1$ , das untere auf  $r_2$  bezieht, und hieraus:  $(r/R)^2 = 1 + \varepsilon^2 \mp 2\varepsilon \cos v$ .

$$\text{Um } (R/r)^3 \text{ zu entwickeln, setzen wir}$$

$$x = \varepsilon^2 \mp 2\varepsilon \cos v$$

und erhalten mit Hilfe des Binomialtheorems:

$$(R/r)^3 = 1 + \frac{9}{4}\varepsilon^2 \pm 3\varepsilon \cos v + \frac{15}{4}\varepsilon^2 \cos 2v. \quad (19)$$

Für die beiden letzten Glieder der Differentialgleichungen erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}4(\xi-1)/r_1^3 + 4(\xi+1)/r_2^3 &= (8\varepsilon^2 + 9\varepsilon^4) \cos v + 15\varepsilon^4 \cos 3v \\ 4\eta/r_1^3 + 4\eta/r_2^3 &= (-8\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4) \sin v - 15\varepsilon^4 \sin 3v.\end{aligned}\quad (20)$$

Wenn wir in die Differentialgleichungen einsetzen, ergeben sich die folgenden vier Gleichungen:

$$\begin{cases} R[(\kappa+1)^2 a_1 + (\kappa-1)^2] = 8\varepsilon^2 + 9\varepsilon^4 \\ R[(\kappa+1)^2 a_1 - (\kappa-1)^2] = -8\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4 \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} R[(9\kappa^2+1) a_3 - 6\kappa b_3] = 15\varepsilon^4 \\ R[6\kappa a_3 - (9\kappa^2+1) b_3] = -15\varepsilon^4 \end{cases} \quad (22)$$

Aus (21) erhalten wir:

$$\begin{aligned}(\kappa-1)^2 &= 8\varepsilon^3 (1 + \frac{3}{4}\varepsilon^2) \\ \kappa &= 1 \mp 2\sqrt{2} \cdot \varepsilon^{3/2} (1 + \frac{3}{8}\varepsilon^2) \quad (I_{II})\end{aligned}\quad (23)$$

wonach  $a_1$  aus

$$(\kappa+1)^2 a_1 = 3\varepsilon^5$$

erhalten wird:

$$a_1 = \frac{3}{4}\varepsilon^5. \quad (24)$$

Aus (22) ergibt sich für  $a_3$  und  $b_3$ :

$$a_3 = \frac{15}{4}\varepsilon^5 \quad b_3 = \frac{15}{4}\varepsilon^5. \quad (25)$$

Bis zur 4. Ordnung können  $\xi$  und  $\eta$  also in der folgenden Weise ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}\xi &= R [(1 + \frac{3}{4}\varepsilon^5) \cos v + \frac{15}{4}\varepsilon^5 \cos 3v] \\ \eta &= -R [(1 - \frac{3}{4}\varepsilon^5) \sin v + \frac{15}{4}\varepsilon^5 \sin 3v]\end{aligned}\quad (26)$$

wo

$$\kappa = 1 \mp 2\sqrt{2} \cdot \varepsilon^{3/2} (1 + \frac{3}{8}\varepsilon^2) \quad (I_{II}). \quad (27)$$

Die Entwicklung bis zu den Gliedern 7. Ordnung einschließlich. Mit den jetzt gefundenen  $\xi$ - und  $\eta$ -Werten können die beiden letzten Glieder der Differentialgleichungen bis zur 7. Ordnung einschl. berechnet werden.

Für  $r_1^2$  und  $r_2^2$  erhalten wir:

$$r^2 = R^2 (1 + 9\varepsilon^5 \cos 2v) \mp 2R \cos v + 1$$

oder

$$(r/R)^2 = 1 + \varepsilon^2 \mp 2\varepsilon \cos v + 9\varepsilon^5 \cos 2v. \quad (28)$$

Dem Vorgang in der vorigen Näherung analog erhalten wir danach:

$$\begin{aligned} 4(\xi-1)/r_1^3 + 4(\xi+1)/r_2^3 &= (8\epsilon^2 + 9\epsilon^4 + 75/8\epsilon^6 - 48\epsilon^7) \cos v + (15\epsilon^4 + 175/16\epsilon^6 - 24\epsilon^7) \cos 3v + 315/16\epsilon^6 \cos 5v \\ 4\eta/r_1^3 + 4\eta/r_2^3 &= (-8\epsilon^2 - 3\epsilon^4 - 15/8\epsilon^6 - 48\epsilon^7) \sin v + (-15\epsilon^4 - 105/16\epsilon^6 + 24\epsilon^7) \sin 3v - 315/16\epsilon^6 \sin 5v. \end{aligned} \quad (29)$$

Wenn wir in die Differentialgleichungen einsetzen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} R[(\kappa+1)^2 a_1 + (\kappa-1)^2] &= 8\epsilon^2 + 9\epsilon^4 + 75/8\epsilon^6 - 48\epsilon^7 \\ R[(\kappa+1)^2 a_1 - (\kappa-1)^2] &= -8\epsilon^2 - 3\epsilon^4 - 15/8\epsilon^6 - 48\epsilon^7 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} R[(9\kappa^2+1)a_3 - 6\kappa b_3] &= 15\epsilon^4 + 175/16\epsilon^6 - 24\epsilon^7 \\ R[6\kappa a_3 - (9\kappa^2+1)b_3] &= -15\epsilon^4 - 105/16\epsilon^6 + 24\epsilon^7 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} R[(25\kappa^2+1)a_5 - 10\kappa b_5] &= 315/16\epsilon^6 \\ R[10\kappa a_5 - (25\kappa^2+1)b_5] &= -315/16\epsilon^6. \end{aligned} \quad (32)$$

Die Gleichungen (30) geben für  $\kappa$  und  $a_1$ :

$$\begin{aligned} \kappa &= 1 \mp 2\sqrt{2} \cdot \epsilon^{3/2} (1 + 3/8\epsilon^2 + 9/32\epsilon^4) \\ a_1 &= 3/4\epsilon^5 \pm 3/2\sqrt{2} \cdot \epsilon^{13/2} + 15/16\epsilon^7 - 15/2\epsilon^8. \end{aligned} \quad (I)$$

Die Gleichungen (31) geben für  $a_3$  und  $b_3$ :

$$\begin{aligned} a_3 &= 15/4\epsilon^5 \pm 45/2\sqrt{2} \cdot \epsilon^{13/2} + 595/256\epsilon^7 + 393/2\epsilon^8 \\ b_3 &= 15/4\epsilon^5 \pm 45/2\sqrt{2} \cdot \epsilon^{13/2} + 525/256\epsilon^7 + 393/2\epsilon^8. \end{aligned} \quad (II)$$

Die Gleichungen (32) geben für  $a_5$  und  $b_5$ :

$$a_5 = 315/256\epsilon^7 \quad b_5 = 315/256\epsilon^7.$$

Bis zur 7. Ordnung einschl. haben wir also die Entwicklungen erhalten:

$$\begin{aligned} \xi &= R[(1 + 3/4\epsilon^5 \pm 3/2\sqrt{2} \cdot \epsilon^{13/2} + 15/16\epsilon^7 - 15/2\epsilon^8) \cos v \\ &\quad + (15/4\epsilon^5 \pm 45/2\sqrt{2} \cdot \epsilon^{13/2} + 595/256\epsilon^7 + 393/2\epsilon^8) \cos 3v \\ &\quad + 315/256\epsilon^7 \cos 5v] \\ \eta &= -R[(1 - 3/4\epsilon^5 \pm 3/2\sqrt{2} \cdot \epsilon^{13/2} - 15/16\epsilon^7 + 15/2\epsilon^8) \sin v \\ &\quad + (15/4\epsilon^5 \pm 45/2\sqrt{2} \cdot \epsilon^{13/2} + 525/256\epsilon^7 + 393/2\epsilon^8) \sin 3v \\ &\quad + 315/256\epsilon^7 \sin 5v] \end{aligned} \quad (33)$$

$$\text{wo} \quad \kappa = 1 \mp 2\sqrt{2} \cdot \epsilon^{3/2} (1 + 3/8\epsilon^2 + 9/32\epsilon^4). \quad (34)$$

Das obere Vorzeichen bezieht sich auf die Bahnklasse I (absolute Bewegung direkt), das untere auf die Klasse II (absolute Bewegung retrograd).

Die Jacobische Konstante. Wenn wir die jetzt gefundenen Ausdrücke für  $\xi$  und  $\eta$  in das Jacobische Integral (3) einsetzen und das Ganze in die Form einer Fourierschen Reihe bringen, erhalten wir durch Null-Setzen des konstanten Gliedes:

$$K = (1 - \kappa^2) R^2 + 16\epsilon + 4\epsilon^3 + 9/4\epsilon^5. \quad (35)$$

Wenn wir hier den oben gegebenen Ausdruck für  $\kappa$  einsetzen, erhalten wir für die Jacobische Konstante den folgenden Ausdruck:

$$K = \pm 4\sqrt{2} \cdot \epsilon^{-1/2} (1 + 3/8\epsilon^2 + 9/32\epsilon^4) + 8\epsilon (1 - 1/4\epsilon^2 - 27/64\epsilon^4). \quad (36)$$

Die Jacobische Konstante wird also für beide Bahnklassen unendlich groß, und zwar positiv für die Klasse I,

$$\begin{aligned} \xi &= R\{9(1-\mu^2)\mu\epsilon^6 + [1 + 3/4(1-\mu^2)\epsilon^5 \pm 3/2\sqrt{2} \cdot (1-\mu^2)\epsilon^{13/2} + 15/16(1-\mu^2)(1+3\mu^2)\epsilon^7] \cos v \\ &\quad + 140/9(1-\mu^2)\mu\epsilon^6 \cos 2v + [15/4(1-\mu^2)\epsilon^5 \pm 45/2\sqrt{2} \cdot (1-\mu^2)\epsilon^{13/2} + 595/256(1-\mu^2)(1+3\mu^2)\epsilon^7] \cos 3v \\ &\quad + 35/9(1-\mu^2)\mu\epsilon^6 \cos 4v + 315/256(1-\mu^2)(1+3\mu^2)\epsilon^7 \cos 5v\} \\ \eta &= -R\{[1 - 3/4(1-\mu^2)\epsilon^5 \mp 3/2\sqrt{2} \cdot (1-\mu^2)\epsilon^{13/2} - 15/16(1-\mu^2)(1+3\mu^2)\epsilon^7] \sin v \\ &\quad + 130/9(1-\mu^2)\mu\epsilon^6 \sin 2v + [15/4(1-\mu^2)\epsilon^5 \pm 45/2\sqrt{2} \cdot (1-\mu^2)\epsilon^{13/2} + 525/256(1-\mu^2)(1+3\mu^2)\epsilon^7] \sin 3v \\ &\quad + 35/9(1-\mu^2)\mu\epsilon^6 \sin 4v + 315/256(1-\mu^2)(1+3\mu^2)\epsilon^7 \sin 5v\}. \end{aligned} \quad (43)$$

$$\kappa = 1 \mp 2\sqrt{2} \cdot \epsilon^{3/2} [1 + 3/8(1-\mu^2)\epsilon^2 + 9/32(1-\mu^2)(1+4\mu^2)\epsilon^4]. \quad (44)$$

$$K = \pm 4\sqrt{2} \cdot \epsilon^{-1/2} [1 + 3/8(1-\mu^2)\epsilon^2 + 9/32(1-\mu^2)(1+4\mu^2)\epsilon^4] + 8\epsilon [1 - 1/4(1-\mu^2)\epsilon^2 - 27/64(1-\mu^2)(1+3\mu^2)\epsilon^4]. \quad (45)$$

Zum Schluß geben wir für die in der vorstehenden Abhandlung von *Strömgren* und *Fischer-Petersen* gerechnete periodische Bahn 5 (die äußerste der dort gegebenen Bahnen) die aus dem obigen Formelsystem (33) sich ergebenden Werte der Koeffizienten der Reihen für  $\xi, \eta$ :

negativ für die Klasse II.

Die übrigen Gleichungen, die aus dem Jacobischen Integral hervorgehen, können als Kontrollgleichungen dienen. Einsetzung der oben erhaltenen Reihen für  $\xi$  und  $\eta$  zeigt, daß diese Kontrollgleichungen befriedigt sind.

## II. Mit beliebigem Verhältnis der beiden endlichen Massen.

Nachdem der Fall zweier gleich großer Massen erledigt ist, ist die entsprechende Entwicklung für den allgemeineren Fall eine einfache Sache.

Wir wählen wie früher für die Entfernung zwischen den beiden endlichen Massen den Wert 2 und setzen:

$$\begin{aligned} k^2 m_1 &= 4(1-\mu) & k^2 m_2 &= 4(1+\mu) \\ \text{wodurch} & & k^2 (m_1 + m_2) &= 8. \end{aligned} \quad (37)$$

Bei dieser Wahl der eingehenden Konstanten bleibt die Winkelgeschwindigkeit der endlichen Massen dieselbe wie früher.

Für die Differentialgleichungen der unendlich kleinen Masse erhalten wir:

$$\begin{aligned} \xi'' - 2\eta' - \xi + 4(1-\mu)[\xi - (1+\mu)]/r_1^3 \\ + 4(1+\mu)[\xi + (1-\mu)]/r_2^3 &= 0 \\ \eta'' + 2\xi' - \eta + 4(1-\mu)\eta/r_1^3 + 4(1+\mu)\eta/r_2^3 &= 0 \\ \text{wo} & & r_1^2 &= [\xi - (1+\mu)]^2 + \eta^2 \\ & & r_2^2 &= [\xi + (1-\mu)]^2 + \eta^2. \end{aligned} \quad (38) \quad (39)$$

Das Jacobische Integral erhält die folgende Form:

$$\xi'^2 + \eta'^2 = \xi^2 + \eta^2 + (1-\mu)8/r_1 + (1+\mu)8/r_2 - K. \quad (40)$$

Jetzt, wo die beiden endlichen Massen nicht mehr zur  $\eta$ -Achse symmetrisch liegen, dürfen wir auch nicht voraussetzen, daß die periodischen Bahnen in bezug auf diese Achse symmetrisch sind. Wir schreiben deshalb jetzt:

$$\begin{aligned} \xi &= A_0 + A_1 \cos v + A_2 \cos 2v + A_3 \cos 3v + \dots \\ \eta &= B_1 \sin v + B_2 \sin 2v + B_3 \sin 3v + \dots \end{aligned} \quad (41)$$

Die Größe  $R$  wird, wie vorher, durch die Gleichung  $2R = A_1 + B_1$

definiert. Wenn wir, wie früher,  $\kappa$  positiv rechnen wollen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \xi &= R[a_0 + (1+a_1) \cos v + a_2 \cos 2v + \dots] \\ \eta &= -R[(1-a_1) \sin v + b_2 \sin 2v + \dots]. \end{aligned} \quad (42)$$

Wenn wir ganz so vorgehen wie in dem speziellen Falle, in dem  $m_1 = m_2$ , erhalten wir folgende Resultate;

$$\xi = 5.01788 \cos v + 0.01300 \cos 3v + 0.00008 \cos 5v \quad \eta = -5.01498 \sin v - 0.01298 \sin 3v - 0.00008 \sin 5v$$

$$R = 5.01643 \quad \kappa = 0.74440 \quad K = 14.4422.$$

Die Übereinstimmung dieser Werte mit den durch numerische Integration erhaltenen Werten des *Strömgren-Fischer-Petersenschen* Artikels muß in Anbetracht der langsamen Konvergenz der Reihen als genügend genau betrachtet werden.

Kopenhagen, Universitäts-Sternwarte, 1918 Juni 1.

Peder Pedersen.

### Zu der Bemerkung von Prof. Harzer in Nr. 4965 der A. N. Von E. Hammer.

Ich bedaure, Herrn Prof. Harzer zu der oben ange deuteten Äußerung Veranlassung gegeben zu haben. Daß man die von ihm meinem Buche entnommenen Sätze so verstehen kann, wie er im Anfang seiner Bemerkung anführt, gebe ich zu; daß es nicht meine Absicht war, sie so verstanden zu sehen, nimmt er selbst an. Trotzdem möchte ich die Erklärung nicht unterlassen, daß ich weder das »unbeschränkte Eigentum« Harzers an seiner Methode zu bezweifeln, noch sein »Urheberrecht zu schmälern« wünschte.

Ich gestatte mir nochmals die Bemerkung beizufügen, daß ich vor 25 Jahren auch schon die Zielung über zwei Fäden als leicht herstellbares Visiermittel in einer bestimmten Vertikalebene mit verwendet habe. Da mir die Einrichtung der groma der römischen Agrimensoren, auf die Harzer am Schluß seiner Bemerkung unter Berufung auf *Pauly-Wissowa* zu sprechen kommt, seit mehr als 40 Jahren bekannt ist, so lege ich auf jenes erste Datum selbstverständlich nicht den geringsten Wert. Mein erstes »Fadendreieck« war auch nur uneigentlich so zu nennen; es bestand aus einem einzigen, durch zwei Ringe (am Kreuzstock und am Flügel eines Fensters) geführten und durch zwei gleiche Gewichte an den Enden gespannten Schnurlauf, sodaß zwei »Seiten« parallel waren, während die obere ungefähr horizontal ging. Ein solches Lot-»Dreieck« habe ich mehrfach zur *Au*-Bestimmung mit Polaris

und einem Zeitstern benutzt, nicht auch zur  $\varphi$ -Bestimmung, wie ja auch meine von Prof. Harzer abgedruckte Postkarte angibt. Ich habe ferner nichts darüber veröffentlicht und hoffe, daß mich niemand für ärmlich genug hält, aus der vorstehenden Bemerkung zu S. IV bei Harzer im Erg.-H. 123 zu »Petermanns Mitteilungen«, Gotha 1897, etwa einen »Anspruch« ableiten zu wollen.

Mein populäres Schriftchen von 1893 beschäftigt sich, wie der Titel wohl genügend deutlich sagt, nur mit einfachen *Au*-Bestimmungen, und zwar fast ausschließlich Tagesmessungen, d. h. mit Benutzung der Sonne; für Durchgangsbeobachtungen muß also dabei das Azimut einer terrestrischen Richtung bereits bekannt sein, und eben zur Benutzung der unendlich vielen, durch eine Landesvermessung zur Verfügung gestellten Azimute forderte die Schrift auf. Es genügt dabei als Beobachtungsmittel durchaus das einfache Lot, mit dem die *Au* auf ganz wenige Sekunden genau bestimmt werden kann.

Die Methoden von Harzer mit Benutzung seiner Faden dreiecke, die unter anderem die bekannten alten Schatten aufgaben mit der Sonne (Beobachtung der Zeiten für genau entgegengesetzte Richtungen der Schatten eines vertikalen Stabes auf der Horizontalebene durch seinen Fuß) für Sterne tauglich machen und in einfacher Weise zu beträchtlicher Genauigkeit führen, haben andere Zwecke.

Stuttgart, 1918 November.

E. Hammer.

### Neuer Komet 1918 d.

Am 24. November teilte Herr Professor R. Schorr der Zentralstelle telephonisch die Auffindung eines neuen Kometen mit. Ausführlicher berichtete er dann brieflich über die am 23. und 24. November erhaltenen Beobachtungen folgendes:

»Auf einer am 23. November zur Aufsuchung des Planeten 232 Russia am Spiegelteleskop aufgenommenen Platte fand ich einen Kometen, dessen Orte ich nachstehend mitteile.

Kiel, 1918 Nov. 27.

	1918	M. Z. Gr.	Position 1918.0
Nov. 23	7 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup> 32 <sup>s</sup>	4 <sup>h</sup> 12 <sup>m</sup> 3 <sup>s</sup> 79	+11° 35' 6" 8
23	8 12 26	4 12 3.31	+11 35 13.8
24	7 24 37	4 11 22.44	+11 36 43.5
24	9 37 15	4 11 18.63	+11 36 54.0
Gr. 14 <sup>mo</sup> . Koma von 30" Durchmesser. R. Schorr.«			

Weitere Nachrichten sind bis jetzt nicht eingegangen.

H. Kobold.

### Stern von großer Eigenbewegung.

Nicht weit von der Nova Aquilae 3 fand ich neulich einen stark bewegten Stern auf, nämlich

Nr. 727  $\alpha_{1875} = 18^h 35^m 2. \delta_{1875} = +0^\circ 51' \text{ Gr. } 12^m 5.$

Die Eigenbewegung des Sterns ergab sich aus einer nur ganz rohen Messung zu:

$$s = 1''.90 \quad \varphi = 170^\circ.$$

Ein  $* 11^m \text{ nf } 1\frac{1}{2}'$ ,  $* 14^m \text{ ssf } 1\frac{3}{4}'$ ,  $* 14^m \text{ spp } 1\frac{1}{2}'$ . Der bewegte Stern steht also fast im Schwerpunkt dieses hübschen Dreieckchens.

Königstuhl-Sternwarte, 1918 Juli 10.

M. Wolf.

Berichtigung zu Nr. 4909 Bd. 205 p. 201 Z. 7 v. o. statt  $\Sigma \text{ ba} = \Sigma 25$  lies  $\Sigma \text{ ba} = \Sigma 26$ .

» » » 4949 » 207 » 60 » 8 v. u. statt Juni 20 lies Juli 20. W.

» » » 4962 » 207 » 202 » 20 v. u. statt des Beistrichs hinter 2 ist ein Punkt zu setzen.

» » » 4964 » 207 » 240 unter der Mitteilung der Beobachtungen des neuen Planeten 1918 EM ist der Name des Beobachters, J. Palisa, zu ergänzen.

Inhalt zu Nr. 4968. E. Strömgren, J. Fischer-Petersen. Über eine Klasse einfach periodischer, retrograder Bahnen um die beiden endlichen Massen im problème restreint. 289. — P. Pedersen. Periodische Bahnen in großer Entfernung von den beiden endlichen Massen im problème restreint. 297. — E. Hammer. Zu der Bemerkung von Prof. Harzer in Nr. 4965 der A. N. 303. — H. Kobold. Neuer Komet 1918 d. 303. — M. Wolf. Stern von großer Eigenbewegung. 303. — Berichtigungen. 303.