Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes.

Von

Edmund Landau in Berlin.

Erster Teil.

Neuer Beweis des Primzahlsatzes.

Einleitung.

Der „Primzahlsatz"*) lautet: *Wenn $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leqq x$ bezeichnet, so ist***)

$$\pi(x) \sim Li(x) = \lim_{\delta=0} \left(\int_0^{1-\delta} \frac{dx}{\log x} + \int_{1+\delta}^{x} \frac{dx}{\log x} \right) \sim \int_2^x \frac{dx}{\log x} \tag{1}$$

oder, was dasselbe besagt,

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}. \tag{2}$$

Er folgt bekanntlich***) unmittelbar aus dem Satze: *Wenn $\vartheta(x)$ die Summe der natürlichen Logarithmen aller Primzahlen $\leqq x$ bezeichnet, so ist*

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p \sim x. \tag{3}$$

Der Nachweis dieser asymptotischen Gleichung ist zum ersten Male von den Herren Hadamard†) und de la Vallée-Poussin††) unabhängig

---

*) Diese Benennung entnehme ich der Dissertation von Herrn von Schaper: „Über die Theorie der Hadamardschen Funktionen und ihre Anwendung auf das Problem der Primzahlen", Göttingen, 1898, S. 58.

**) $f(x) \sim g(x)$ soll bedeuten, daß $\frac{f(x)}{g(x)}$ für positive unendlich wachsende x sich einem Grenzwerte nähert, und daß dieser Grenzwert gleich 1 ist.

***) Vergl. die Anmerkung Herrn de la Vallée-Poussins am Schlusse der Arbeit Herrn von Mangoldts: „Über eine Anwendung der Riemannschen Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 119, 1898, S. 70.

†) „Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques", Bulletin de la société mathématique de France, Bd. 24, 1896, S. 199—220.

††) „Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers", Annales de la société scientifique de Bruxelles, Bd. 20, Teil 2, S. 183—256.

geführt worden, unter Benutzung der Hadamardschen Theorie der ganzen transcendenten Funktionen und der Anwendungen, welche vordem Herr Hadamard*) selbst von seinen neuen funktionentheoretischen Sätzen (insbesondere von den Beziehungen zwischen dem Geschlecht einer ganzen transcendenten Funktion und der Größe ihrer Koeffizienten) auf die Riemannsche ζ-Funktion gemacht hatte.

Es ist mir nun gelungen, für den Satz (3) und damit für den Primzahlsatz einen Beweis zu finden, der von der Theorie der Hadamardschen Funktionen vollkommen unabhängig ist; er soll im Folgenden dargelegt werden. Zwar wende ich auch die grundlegenden Sätze aus der Theorie der Funktionen komplexen Argumentes an (z. B. den Integralsatz von Cauchy) und bediene mich auch der Riemannschen ζ-Funktion; von dieser kommen aber nur die elementarsten Eigenschaften zur Anwendung. Insbesondere mache ich nicht Gebrauch davon, daß $(s-1)\zeta(s)$ eine ganze transcendente Funktion ist, die mit einer geraden ganzen Funktion $\xi(z)$ vom Geschlechte 0 in z^2 zusammenhängt; ich gebrauche überhaupt nicht die Tatsache, daß $\zeta(s)$ links von der Achse des Imaginären existiert und ziehe alle Schlüsse aus den für $\Re(s) > 1$ giltigen Gleichungen**)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \tag{4}$$

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}, \tag{5}$$

(wo p alle Primzahlen durchläuft) und aus der für $\Re(s) > 0$ giltigen Gleichung***)

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}}\right) + \frac{1}{(n+1)^s}\right); \tag{6}$$

(6) lehrt, daß $\zeta(s)$ rechts von der Achse des Imaginären eine eindeutige analytische Funktion mit dem Pole erster Ordnung $s = 1$ als einziger singulärer Stelle ist, und (5) ergibt, daß rechts von $\Re(s) = 1$ die Funktion $\zeta(s)$ keine Nullstelle besitzt. Außerdem haben die Herren Hadamard†)

*) „Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann", Journal de mathématiques pures et appliquées, Ser. 4, Bd. 9, 1893, S. 210—215.

**) Vergl. Riemann, „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse", Monatsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1859, S. 671—672; Werke, 2. Aufl., 1892, S. 145.

***) Vergl. z. B. Jensen, „Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann", Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences, Paris, Bd. 104, 1887, S. 1156.

†) „Sur la distribution etc.", S. 200—202.

und de la Vallée-Poussin*) aus (5) bewiesen, daß die ζ-Funktion auf der Geraden $\Re(s) = 1$ keine Nullstelle hat; Herr Mertens**) hat jene Methode dahin weiter ausgebildet, daß sie für $|\zeta(1+ti)|$ eine untere Schranke liefert, in Gestalt einer wesentlich positiven Funktion von t. Ausschließlich auf Grund von (4), (5) und (6) habe ich***) jüngst durch weiteres Verfolgen jenes Gedankens den (durch die neuesten, auf der Theorie der Hadamardschen Funktionen basierenden Untersuchungen Herrn de la Vallée-Poussins†) bereits bekannten) Satz hergeleitet:

Es gibt eine positive Konstante B, so daß rechts von der Kurve

$$(7)\qquad \begin{cases} \sigma = 1 - \dfrac{B}{(\log(3+t))^9} & \textit{für} \quad t \geqq 0, \\ \sigma = 1 - \dfrac{B}{(\log(3-t))^9} & \textit{für} \quad t \leqq 0 \end{cases}$$

die ζ-Funktion keine Nullstelle $s = \sigma + ti$ besitzt.

Ich will zunächst den Beweis, den ich a. a. O. hierfür angegeben habe, in §§ 1—2 reproduzieren, einerseits um den neuen Beweis des Primzahlsatzes hier vollständig auszuführen, andererseits, weil für den vorliegenden Zweck einige Hilfsbetrachtungen weiter zu verfolgen sind, als a. a. O. nötig war. Es ist nämlich von großer Wichtigkeit für das Folgende, daß sich der Satz vom Nichtverschwinden der Funktion $\zeta(s)$ in dem Teil der Ebene rechts von der Kurve (7) mit elementaren Mitteln dahin verschärfen läßt, daß nachgewiesen††) wird:

Es gibt zwei positive Konstanten b, c, sodaß für

$$s = \sigma + ti, \quad t \geqq 10, \quad 1 - \frac{b}{\log^9 t} \leqq \sigma \leqq 2$$

$$(8)\qquad \left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < c \log^9 t$$

ist.

*) l. c., S. 220—242 und 395—397.

**) „Über eine Eigenschaft der Riemannschen ζ-Funktion", Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. 107, Abth. 2ª, 1898, S. 1431—1436.

***) „Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 125, 1902, S. 98.

†) „Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée", Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'academie royale de Belgique, Bd. 59, 1899, S. 37.

††) Von dem Stück $0 \leqq t \leqq 10$ genügt es für das Folgende, zu wissen, daß $\zeta(1+ti)$ nicht verschwindet, und auf negative t lassen sich zum Schluß wegen

$$|\zeta(\sigma+ti)| = |\zeta(\sigma-ti)|, \quad |\zeta'(\sigma+ti)| = |\zeta'(\sigma-ti)|$$

alle Ungleichungen ohne weiteres übertragen.

(8) ist, wie vorweg erwähnt sei, darum eine wesentliche Stütze meines Beweises des Primzahlsatzes, weil auf der rechten Seite eine Funktion steht, welche für $t=\infty$ so schwach unendlich wird, daß das über die Kurve $\sigma = 1-\frac{b}{\log^9 t}$ erstreckte Integral

$$\int\limits_{1-\frac{b}{\log^9 10}+10i}^{1+\infty i} \frac{x^s}{s^2}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds \qquad (x>0)$$

einen Sinn hat.

§ 1.

Aus (5) folgt für $\Re(s)>1$

$$\log\zeta(s)=\log\prod_p\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=-\sum_p\log\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$$

$$=\sum_p\frac{1}{p^s}+\frac{1}{2}\sum_p\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{3}\sum_p\frac{1}{p^{3s}}+\cdots$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_p\frac{1}{p^{ms}},$$

also für $\varepsilon>0,\ t\gtreqless 0$

$$2\log\zeta(1+\varepsilon+ti)=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_p\frac{1}{p^{m(1+\varepsilon+ti)}},$$

$$2\log\zeta(1+\varepsilon-ti)=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_p\frac{1}{p^{m(1+\varepsilon-ti)}},$$

$$4\log\zeta(1+\varepsilon)\qquad=4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_p\frac{1}{p^{m(1+\varepsilon)}},$$

also durch Addition

$$4\log|\zeta(1+\varepsilon+ti)|+4\log\zeta(1+\varepsilon)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_p\frac{4(1+\cos(mt\log p))}{p^{m(1+\varepsilon)}}$$

und daher wegen

$$4(1+\cos\alpha)\geqq 2(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)=2-2\cos^2\alpha=1-\cos 2\alpha$$

$$4\log|\zeta(1+\varepsilon+ti)|+4\log\zeta(1+\varepsilon)\geqq\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{p}\frac{1-\cos(2mt\log p)}{p^{m(1+\varepsilon)}}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{p}\frac{1}{p^{m(1+\varepsilon)}}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{p}\frac{\cos(2mt\log p)}{p^{m(1+\varepsilon)}}$$

$$=\log\zeta(1+\varepsilon)-\log|\zeta(1+\varepsilon+2ti)|,$$

$$4\log|\zeta(1+\varepsilon+ti)|\geqq-3\log\zeta(1+\varepsilon)-\log|\zeta(1+\varepsilon+2ti)|,$$

$$|\zeta(1+\varepsilon+ti)|\geqq\frac{1}{\left(\zeta(1+\varepsilon)\right)^{\frac{3}{4}}\,|\zeta(1+\varepsilon+2ti)|^{\frac{1}{4}}}.$$

Da für $0<\varepsilon\leqq 1$

$$\zeta(1+\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}<1+\int_1^{\infty}\frac{du}{u^{1+\varepsilon}}=1+\frac{1}{\varepsilon}\leqq\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}=\frac{2}{\varepsilon}$$

ist, erhält man

(9) $$|\zeta(1+\varepsilon+ti)|\geqq\frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{3}{4}}\,|\zeta(1+\varepsilon+2ti)|^{\frac{1}{4}}}\ {}^{*)}\qquad\left(0<\varepsilon\leqq 1,\ t\gtrless 0\right).$$

§ 2.

Wegen

$$\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}}-\frac{1}{n^{s-1}}\right)+\frac{1}{(n+1)^{s}}=-s\int_0^1\frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}$$

kann (6) auch so geschrieben werden**):

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{s-1}-s\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}\qquad(\Re(s)>0).$$

Ich werde eine gemischte Schreibweise anwenden:

---

*) Bis hierher folge ich genau den Entwickelungen von Herrn Mertens. Übrigens folgt aus (9) das Nichtverschwinden von $\zeta(1+ti)$ für $t\gtrless 0$ darum, weil nach (9) der Quotient $\frac{|\zeta(1+\varepsilon+ti)|}{\varepsilon}$ für $\varepsilon=0$ unendlich wird.

**) In dieser Form stellt Herr de la Vallée-Poussin in seiner Arbeit „Démonstration simplifiée du théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique" (Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'académie royale de Belgique, Bd. 53, 1896, S. 7) die ζ-Funktion für $\Re(s)>0$ dar; vergl. auch seine „Recherches etc.", S. 185.

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}}\right) + \frac{1}{(n+1)^s}\right) - s\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(m+1)^{s-1}} - 1\right) + \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(n+1)^s} - s\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}},$$

$$(10) \qquad \zeta(s) = \frac{1}{s-1}\,\frac{1}{(m+1)^{s-1}} + \sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{n^s} - s\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}},$$

wo die Verfügung über die ganze Zahl m vorbehalten bleibt. Aus (10) ergibt sich durch Differentiation:

$$(11) \qquad \begin{cases} \zeta'(s) = -\dfrac{1}{(s-1)^2}\,\dfrac{1}{(m+1)^{s-1}} - \dfrac{1}{s-1}\,\dfrac{\log(m+1)}{(m+1)^{s-1}} - \displaystyle\sum_{n=1}^{m+1}\frac{\log n}{n^s} \\ \qquad\qquad - \displaystyle\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}} + s\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u\log(n+u)\,du}{(n+u)^{s+1}}. \end{cases}$$

Aus (10) folgt für $s = 1 + \varepsilon + 2ti$, $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, $t > 0$:

$$|\zeta(1+\varepsilon+2ti)| \leqq \frac{1}{|\varepsilon+2ti|}\,\frac{1}{|(m+1)^{\varepsilon+2ti}|} + \sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{|n^{1+\varepsilon+2ti}|}$$
$$+ |1+\varepsilon+2ti|\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u\,du}{|(n+u)^{2+\varepsilon+2ti}|}$$
$$< \frac{1}{2t}\,\frac{1}{(m+1)^{\varepsilon}} + \sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}} + (1+\varepsilon+2t)\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{2+\varepsilon}}$$
$$< \frac{1}{2t} + \sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{n} + (2+2t)\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u\,du}{n^2}$$
$$= \frac{1}{2t} + \frac{1}{m+1} + \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} + (1+t)\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$
$$< \frac{1}{2t} + \frac{1}{m+1} + \left(\log m + \frac{3}{5} + \frac{1}{2m}\right) + (1+t)\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$
$$< \frac{1}{2t} + \frac{1}{m} + \log m + \frac{3}{5} + \frac{1}{2m} + (1+t)\frac{1}{m};$$

Ich nehme nun $t \geqq 10$ an, setze $m = [t]$, d. h. gleich der größten ganzen Zahl $\leqq t$ und erhalte wegen $\frac{t}{m} = \frac{t}{[t]} < \frac{t}{t-1} \leqq \frac{t}{t - \frac{1}{10}t} = \frac{10}{9}$

$$|\zeta(1+\varepsilon+2ti)| < \frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \log t + \frac{3}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{10}{9} < \log t + \frac{21}{10},$$

$$(12) \qquad |\zeta(1+\varepsilon+2ti)| < 2\log t^{*)} \qquad (0 \leqq \varepsilon \leqq 1,\ t \geqq 10).$$

Ferner soll aus (11) für $|\zeta'(1+\varepsilon+ti)|$ eine obere Schranke hergeleitet werden; hierbei lasse ich aber auch gewisse negative ε zu, d. h. gewisse s mit reellem Teil < 1, indem ich t und ε in $s = 1+\varepsilon+ti$ den Ungleichungen

$$(13) \qquad t \geqq 10, \quad -\frac{1}{\log t} \leqq \varepsilon \leqq 1$$

unterwerfe. Dann liefert (11)

$$|\zeta'(1+\varepsilon+ti)| \leqq \frac{1}{|\varepsilon+ti|^2}\,\frac{1}{|(m+1)^{\varepsilon+ti}|} + \frac{1}{|\varepsilon+ti|}\,\frac{\log(m+1)}{|(m+1)^{\varepsilon+ti}|}$$

$$+\sum_{n=1}^{m+1}\frac{\log n}{|n^{1+\varepsilon+ti}|} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u\,du}{|(n+u)^{2+\varepsilon+ti}|} + |1+\varepsilon+ti|\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1\frac{u\log(n+u)\,du}{|(n+u)^{2+\varepsilon+ti}|}$$

$$< \frac{1}{t^2}\,\frac{1}{(m+1)^{\varepsilon}} + \frac{1}{t}\,\frac{\log(m+1)}{(m+1)^{\varepsilon}} + \sum_{n=1}^{m+1}\frac{\log n}{n^{1+\varepsilon}} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1\frac{u\,du}{n^{2+\varepsilon}}$$

$$+ (1+\varepsilon+t)\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1\frac{u\log(n+1)\,du}{n^{2+\varepsilon}}$$

$$< \frac{1}{t^2}\,\frac{1}{(m+1)^{-\frac{1}{\log t}}} + \frac{1}{t}\,\frac{\log(m+1)}{(m+1)^{-\frac{1}{\log t}}} + \sum_{n=1}^{m+1}\frac{\log n}{n^{1-\frac{1}{\log t}}}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^{2+\varepsilon}} + (2+t)\,\frac{1}{2}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\log(n+1)}{n^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

---

*) Es hat für das Folgende kein Interesse, die in den Ungleichungen auftretenden Konstanten tunlichst klein bezw. groß zu wählen; wesentlich sind nur die Größenordnungen der auftretenden Vergleichsfunktionen. Daß für $\Re(s) = 1$ $\zeta(s)$ nicht stärker als von der Größenordnung $\log t$ unendlich werden kann, ist übrigens schon durch Herrn Mellin bekannt („Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Funktionen von endlichem Geschlecht", Acta societatis scientiarum Fennicae, Bd. 29, No. 4, 1900, S. 48—49).

$$(14)\left\{\begin{aligned}&<\frac{1}{t^2}(m+1)^{\frac{1}{\log t}}+\frac{1}{t}\log(m+1)(m+1)^{\frac{1}{\log t}}+\log(m+1)\sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{n^{1-\frac{1}{\log t}}}\\&\qquad+\frac{1}{2}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+\left(1+\frac{t}{2}\right)\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\log(n+1)}{n^{2-\frac{1}{\log t}}}.\end{aligned}\right.$$

Hierin ist für jede positive ganze Zahl m

$$\sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{n^{1-\frac{1}{\log t}}}<1+\int_1^{m+1}\frac{du}{u^{1-\frac{1}{\log t}}}=1+\log t\left((m+1)^{\frac{1}{\log t}}-1\right),$$

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}<\int_m^{\infty}\frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{m}}\leqq 2$$

und

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\log(n+1)}{n^{2-\frac{1}{\log t}}}<\int_m^{\infty}\frac{\log(u+1)}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}du^{*)}<\int_m^{\infty}\frac{\log u+\frac{1}{u}}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}du$$

$$=\frac{\log m}{\left(1-\frac{1}{\log t}\right)m^{1-\frac{1}{\log t}}}+\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\log t}\right)^2 m^{1-\frac{1}{\log t}}}+\frac{1}{\left(2-\frac{1}{\log t}\right)m^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$<\frac{\log m\cdot m^{\frac{1}{\log t}}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)m}+\frac{m^{\frac{1}{\log t}}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 m}+\frac{m^{\frac{1}{\log t}}}{\left(2-\frac{1}{2}\right)m^2}$$

$$=\frac{2\log m\cdot m^{\frac{1}{\log t}}}{m}+\frac{4m^{\frac{1}{\log t}}}{m}+\frac{2m^{\frac{1}{\log t}}}{3m^2}.$$

Aus (14) folgt also, wenn t und ε den Ungleichungen (13) genügen,

---

*) Die Funktion $\frac{\log(u+1)}{u^\nu}$ nimmt tatsächlich $\left(\text{für } \nu=2-\frac{1}{\log t}>1\right)$ monoton mit wachsendem u für $u\geqq 1$ ab, da $\frac{d}{du}\frac{\log(u+1)}{u^\nu}=\frac{1}{u^\nu(u+1)}-\frac{\nu\log(u+1)}{u^{\nu+1}}$ $=\frac{1}{u^{\nu+1}}\left(\frac{u}{u+1}-\nu\log(u+1)\right)<\frac{1}{u^{\nu+1}}\left(\frac{u}{u+1}-\log(u+1)\right)$, also für $1\leqq u\leqq 2$ kleiner als $\frac{1}{u^{\nu+1}}\left(\frac{2}{3}-\log 2\right)<0$ und für $u\geqq 2$ kleiner als $\frac{1}{u^{\nu+1}}(1-\log 3)<0$ ist.

$$|\zeta'(1+\varepsilon+ti)|<\frac{1}{t^2}(m+1)^{\frac{1}{\log t}}+\frac{1}{t}\log(m+1)(m+1)^{\frac{1}{\log t}}+\log(m+1)$$
$$+\log(m+1)\log t\left((m+1)^{\frac{1}{\log t}}-1\right)+1$$
$$+\left(1+\frac{t}{2}\right)\left(\frac{2\log m\cdot m^{\frac{1}{\log t}}}{m}+\frac{4m^{\frac{1}{\log t}}}{m}+\frac{2m^{\frac{1}{\log t}}}{3m^2}\right).$$

Hierin setze ich $m=[t]-1$ und erhalte wegen $m+1=[t]\leqq t$, $m>t-2\geqq t-\frac{t}{5}=\frac{4}{5}t$

$$|\zeta'(1+\varepsilon+ti)|<\frac{1}{t^2}t^{\frac{1}{\log t}}+\frac{1}{t}\log t\cdot t^{\frac{1}{\log t}}+\log t+\log^2 t\left(t^{\frac{1}{\log t}}-1\right)+1$$
$$+\left(1+\frac{t}{2}\right)\left(\frac{2\log t\cdot t^{\frac{1}{\log t}}}{\frac{4}{5}t}+\frac{4t^{\frac{1}{\log t}}}{\frac{4}{5}t}+\frac{2t^{\frac{1}{\log t}}}{3\cdot\frac{16}{25}t^2}\right),$$

also wegen

$$t^{\frac{1}{\log t}}=e^{\log t\cdot\frac{1}{\log t}}=e$$

$$\begin{aligned}|\zeta'(1+\varepsilon+ti)|&<\frac{e}{t^2}+\frac{e\log t}{t}+\log t+(e-1)\log^2 t+1\\&\qquad+\left(1+\frac{t}{2}\right)\left(\frac{5e\log t}{2t}+\frac{5e}{t}+\frac{25e}{24t^2}\right)\\&<\frac{e}{100}+\frac{e}{10}\log t+\log t+1{,}8\log^2 t+1\\&\qquad+\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5e}{2}\log t+5e+\frac{5}{48}e\right)\\&<0{,}03+0{,}3\log t+\log t+1{,}8\log^2 t+1+0{,}6(7\log t+14)\\&=9{,}43+5{,}5\log t+1{,}8\log^2 t\\&<1{,}8\log^2 t+2{,}4\log^2 t+1{,}8\log^2 t,\end{aligned}$$

$$(15)\qquad |\zeta'(1+\varepsilon+ti)|<6\log^2 t\qquad\left(t\geqq 10,-\frac{1}{\log t}\leqq\varepsilon\leqq 1\right).$$

Für diese Wertepaare ε, t ist also wegen

$$\zeta(1+\varepsilon+ti)-\zeta(1+ti)=\int\limits_{1+ti}^{1+\varepsilon+ti}\zeta'(s)\,ds=\int\limits_{1}^{1+\varepsilon}\zeta'(\sigma+ti)d\sigma,$$

da σ während des geradlinigen Integrationsweges jedenfalls zwischen $1-\frac{1}{\log t}$ und 2 gelegen ist, nach (15)

$$|\zeta(1+\varepsilon+ti)-\zeta(1+ti)|\leqq\int\limits_{1}^{1+\varepsilon}|\zeta'(\sigma+ti)|\,|d\sigma|\leqq 6\log^2 t\int\limits_{1}^{1+\varepsilon}|d\sigma|,$$

$$|\zeta(1+\varepsilon+ti)-\zeta(1+ti)|\leqq 6|\varepsilon|\log^2 t=6\operatorname{sign}\varepsilon\cdot\varepsilon\log^2 t,$$

also, $t \geqq 10$ angenommen,

(16) für $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$ $\quad |\zeta(1+\varepsilon+ti) - \zeta(1+ti)| \leqq 6\,\varepsilon \log^2 t,$

(17) für $0 \leqq \eta \leqq \frac{1}{\log t}$ $\quad |\zeta(1-\eta+ti) - \zeta(1+ti)| \leqq 6\eta \log^2 t.$

(9) ergibt in Verbindung mit (12) und (16) für $0 < \varepsilon \leqq 1$, $t \geqq 10$

$$|\zeta(1+ti)| \geqq |\zeta(1+\varepsilon+ti)| - |\zeta(1+\varepsilon+ti) - \zeta(1+ti)|$$

$$\geqq \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{3}{4}}\,|\zeta(1+\varepsilon+2ti)|^{\frac{1}{4}}} - |\zeta(1+\varepsilon+ti) - \zeta(1+ti)|$$

$$> \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{3}{4}}(2\log t)^{\frac{1}{4}}} - 6\varepsilon \log^2 t,$$

(18) $$|\zeta(1+ti)| > \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2\log^{\frac{1}{4}} t}\left(1 - 12\,\varepsilon^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{9}{4}} t\right).$$

Wird in (18)

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{2\cdot 12\log^{\frac{9}{4}} t}\right)^4 = \frac{1}{24^4 \log^9 t}$$

gesetzt, was tatsächlich zwischen 0 und 1 liegt, so ergibt sich für $|\zeta(1+ti)|$ die wesentlich positive untere Schranke

$$|\zeta(1+ti)| > \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2\log^{\frac{1}{4}} t}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{4\log^{\frac{1}{4}} t} = \frac{1}{4\cdot 24^3 \log^{\frac{27}{4}} t \cdot \log^{\frac{1}{4}} t},$$

(19) $$|\zeta(1+ti)| > \frac{1}{10^5 \log^7 t} \qquad (t \geqq 10).$$

Aus (17) und (19) folgt also für $0 \leqq \eta \leqq \frac{1}{10^6 \log^9 t}$

$$|\zeta(1-\eta+ti)| \geqq |\zeta(1+ti)| - |\zeta(1-\eta+ti) - \zeta(1+ti)| > \frac{1}{10^5 \log^7 t} - \frac{6\log^2 t}{10^6 \log^9 t},$$

$$|\zeta(1-\eta+ti)| > \frac{1}{10^6 \log^7 t},$$

und daraus in Verbindung mit der in (15) enthaltenen Ungleichung

$$|\zeta'(1-\eta+ti)| < 6\log^2 t$$

ergibt sich

$$\left|\frac{\zeta'(1-\eta+ti)}{\zeta(1-\eta+ti)}\right| < 10^7 \log^9 t,$$

d. h.

(20) $$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < 10^7 \log^9 t$$

für $t \geqq 10$, $1 - \frac{1}{10^6 \log^9 t} \leqq \Re(s) \leqq 1$.

Ich behaupte, daß (20) auch für $t \geqq 10$, $1 \leqq \Re(s) \leqq 2$ gilt. In der Tat ist zunächst für $s = 1 + \varepsilon + ti$, $0 \leqq \varepsilon \leqq \frac{1}{10^6 \log^9 t}$ analog wie vorhin

$$|\zeta(1+\varepsilon+ti)| \geqq |\zeta(1+ti)| - |\zeta(1+\varepsilon+ti) - \zeta(1+ti)|$$
$$\geqq \frac{1}{10^5 \log^7 t} - \frac{6 \log^2 t}{10^6 \log^9 t} > \frac{1}{10^6 \log^7 t},$$

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < 10^7 \log^9 t,$$

und für $\frac{1}{10^6 \log^9 t} \leqq \varepsilon \leqq 1$ ist

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \log p \left(\frac{1}{p^{1+\varepsilon+ti}} + \frac{1}{p^{2(1+\varepsilon+ti)}} + \cdots\right),$$

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leqq \sum_p \log p \left(\frac{1}{p^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{p^{2(1+\varepsilon)}} + \cdots\right)$$
$$= \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon} - 1} < \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon} - \frac{1}{2} p^{1+\varepsilon}} = 2 \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}$$
$$= 2 \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\vartheta(\nu) - \vartheta(\nu-1)}{\nu^{1+\varepsilon}} = 2 \sum_{\nu=2}^{\infty} \vartheta(\nu) \left(\frac{1}{\nu^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{(\nu+1)^{1+\varepsilon}}\right)$$
$$< 2 \sum_{\nu=2}^{\infty} 2\nu \left(\frac{1}{\nu^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{(\nu+1)^{1+\varepsilon}}\right) ^{*)}$$
$$= 4\left(1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu^{1+\varepsilon}} (\nu - (\nu-1))\right) = 4\left(1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu^{1+\varepsilon}}\right)$$
$$= 4\zeta(1+\varepsilon) < 4 \cdot \frac{2}{\varepsilon} = \frac{8}{\varepsilon} \leqq 8 \cdot 10^6 \log^9 t,$$

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < 10^7 \log^9 t.$$

Damit ist, wie in der Einleitung angekündigt wurde, die Existenz zweier positiver Konstanten $b \left(= \frac{1}{10^6}\right)$ und $c \, (= 10^7)$ nachgewiesen, sodaß für

$$s = \sigma + ti, \quad t \geqq 10, \quad 1 - \frac{b}{\log^9 t} \leqq \sigma \leqq 2$$

(21) $$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < c \log^9 t$$

ist.

---

*) Wie Herr Mertens („Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 78, 1874. S. 48) einfach bewiesen hat, ist stets $\vartheta(\nu) < 2\nu$.

Es sei nun a eine positive Zahl, welche erstens kleiner ist als b und zweitens kleiner als der Abstand der Geraden $\Re(s) = 1$ von allen etwa vorhandenen*) Nullstellen von $\zeta(s)$, deren reeller Teil zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 und deren imaginärer Teil zwischen 0 und 10 liegt. Dann verschwindet die ζ-Funktion nicht in dem Teil der Ebene, welcher rechts von der stetigen Kurve

$$\begin{cases} \sigma = 1 - \dfrac{a}{\log^9 t} \quad, & t \geqq 10 \\ \sigma = 1 - \dfrac{a}{\log^9 10} \quad, & -10 \leqq t \leqq 10 \\ \sigma = 1 - \dfrac{a}{\log^9 (-t)}, & t \leqq -10 \end{cases}$$

liegt, auch nicht auf dieser Kurve selbst, und nach (21) ist außerdem für $t \geqq 10$, $1 - \frac{a}{\log^9 t} \leqq \sigma \leqq 2$

$$\left| \frac{\zeta'(\sigma + ti)}{\zeta(\sigma + ti)} \right| < c \log^9 t. \tag{22}$$

§ 3.

Herr Hadamard**) hat gezeigt, daß zum Nachweise des (dem Primzahlsatze äquivalenten) Satzes

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \sim x \tag{3}$$

nur erforderlich ist, zu beweisen, dass

$$\sum_{p \leq x} \log p \log \frac{x}{p} \sim x \tag{23}$$

ist und daß hierzu nur nachgewiesen zu werden braucht***), daß

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^s}{s^2} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \sim x \tag{24}$$

ist; zum Nachweise dieser asymptotischen Gleichung war bisher die Theorie

*) Die Kenntnis der Tatsache, daß tatsächlich keine solche Nullstelle existiert, ist für den vorliegenden Zweck unerheblich; da auf der Geraden $\Re(s) = 1$ keine Nullstelle liegt und in dem endlichen Gebiet $\frac{1}{2} \leqq \Re(s) < 1$, $0 \leqq \Im(s) \leqq 10$ nicht unendlich viele Nullstellen liegen können (weil sonst $\zeta(s)$ in jenem Rechteck eine wesentlich singuläre Stelle haben würde), so existiert jedenfalls eine positive Zahl a, die den geforderten Bedingungen entspricht.

**) „Sur la distribution etc.", S. 217—218.

***) l. c., S. 213, 216—217.

der Hadamardschen Funktionen notwendig; Herr Hadamard*) geht von der Produktzerlegung der ganzen transcendenten Funktion $(s-1)\zeta(s)$ aus und integriert die mit $\frac{x^s}{s^2}$ multiplizierten Partialbrüche von $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ auf passender, teilweise die Achse des Imaginären überschreitender Bahn. Ehe ich zeige, wie der Nachweis von (24) allein auf Grund der im Vorangegangenen bewiesenen Sätze möglich ist, will ich in § 4 der Vollständigkeit wegen im Anschlusse an Herrn Hadamard (wenn auch in etwas modifizierter Form) den Zusammenhang zwischen dem Integral auf der linken Seite von (24) und der Funktion $\sum_{p\leq x}\log p\log\frac{x}{p}$ entwickeln. Dann werde ich in § 5 die asymptotische Gleichung (24) beweisen; dabei wird sich sogar zeigen, daß man mit den angewendeten Mitteln eine noch genauere Gleichung als (24) erhält, und daraus wird dann die asymptotische Gleichung (3) in § 6 mit noch schärferer Fassung hergeleitet werden.

§ 4.

Bekanntlich ist

$$(25)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{2-\infty i}^{2+\infty i}\frac{y^s}{s^2}\,ds\;\begin{cases}=\log y & \text{für}\quad y\geqq 1\\ =0 & \text{für}\quad 0<y\leqq 1.\end{cases}$$

Aus (25) erhält man für das von $2-x^2i$ bis $2+x^2i$ (wo x eine positive Zahl bezeichnet) erstreckte Integral wegen

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{2-\infty i}^{2-x^2 i}\frac{y^s}{s^2}\,ds\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{2+x^2 i}^{2+\infty i}\frac{y^s}{s^2}\,ds\right|\leqq\frac{1}{2\pi}\int_{x^2}^{\infty}\left|\frac{y^{2+ti}}{(2+ti)^2}\right|dt$$

$$<\frac{y^2}{2\pi}\int_{x^2}^{\infty}\frac{dt}{t^2}=\frac{y^2}{2\pi x^2}<\frac{y^2}{2x^2}$$

die Relation

$$(26)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i}\frac{y^s}{s^2}\,ds=\begin{cases}\log y+\Theta_{(x,y)}\dfrac{y^2}{x^2} & \text{für}\quad y\geqq 1\\ \qquad\;\;\Theta_{(x,y)}\dfrac{y^2}{x^2} & \text{für}\quad 0<y\leqq 1,\end{cases}$$

wo die von x und y abhängige Grösse $\Theta_{(x,y)}$ dem absoluten Betrage nach <1 ist.

Die unendliche Doppelreihe

$$\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log p}{p^{ms}}=\sum_p\left(\frac{\log p}{p^s}+\frac{\log p}{p^{2s}}+\cdots+\frac{\log p}{p^{ms}}+\cdots\right)=-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

*) l. c., S. 213—216.

werde nach wachsenden Werten der Primzahlpotenz p^m geordnet:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{n^s} \text{*)}, \tag{27}$$

wo $L(1) = 0$, $L(n) = 0$ für Nichtprimzahlpotenzen n und $L(p^m) = \log p$; (27) ist für $\Re(s) > 1$ konvergent und für $s = 2 + ti$ wegen

$$\left|\frac{1}{n^{2+ti}}\right| = \frac{1}{n^2}$$

gleichmäßig konvergent. Die aus (27) durch Multiplikation jedes Gliedes mit $\frac{x^s}{s^2}$ entstehende Reihe kann also zwischen den Grenzen $2 - x^2 i$ und $2 + x^2 i$ gliedweise integriert werden, und man erhält

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^s}{s^2}\frac{L(n)}{n^s}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty} L(n) \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^2}\,ds,$$

also nach (26), da für $n \leqq x$ $\frac{x}{n} \geqq 1$, für $n > x$ dagegen $\frac{x}{n} < 1$ ist,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = \sum_{n=1}^{x} L(n)\log\frac{x}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} L(n)\,\Theta_{\left(x,\frac{x}{n}\right)}\frac{x^2}{n^2 x^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{x} L(n)\log\frac{x}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} L(n)\,\Theta_{\left(x,\frac{x}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n^2}. \tag{28}$$

Hierin ist die zweite Summe wegen

$$\left|\Theta_{\left(x,\frac{x}{n}\right)}\right| \leqq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L(n)}{n^2} = -\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}$$

(konvergent und) dem absoluten Werthe nach unterhalb einer von x unabhängigen Konstanten gelegen; (28) ergibt also

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = \sum_{n=1}^{x} L(n)\log\frac{x}{n} + O(1)\text{**)}$$

$$= \sum_{p \leqq x}\log p\log\frac{x}{p} + \sum_{p \leqq \sqrt{x}}\log p\log\frac{x}{p^2} + \cdots + \sum_{p \leqq \sqrt[\nu]{x}}\log p\log\frac{x}{p^\nu} + O(1), \tag{29}$$

---

*) Vergl. v. Mangoldt, „Zu Riemanns Abhandlung über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse“, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 114, 1895, S. 277—278.

**) $O(f(x))$ bezeichne eine Funktion, deren Quotient durch $f(x)$ für positive unendlich wachsende x dem absoluten Betrage nach nicht beliebig großer Werte wo $\nu = \left[\frac{\log x}{\log 2}\right]$ ist; für $m > \frac{\log x}{\log 2}$ ist ja in der Tat $n = p^m \geqq 2^m > x$. (29) ergibt weiter wegen

$$\begin{aligned}
&\sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p \log \frac{x}{p^2} + \cdots + \sum_{p \leq \sqrt[\nu]{x}} \log p \log \frac{x}{p^\nu} \\
&\leqq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p \log x + \cdots + \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p \log x \\
&= (\nu - 1) \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p \log x \leqq \frac{\log x}{\log 2} \log x \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p \\
&= O\left(\log^2 x\, \vartheta(\sqrt{x})\right) = O\left(\sqrt{x} \log^2 x\right) {}^{*)}
\end{aligned}$$

die Gleichung

$$(30) \qquad -\frac{1}{2\pi i} \int_{2 - x^2 i}^{2 + x^2 i} \frac{x^s}{s^2} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, ds = \sum_{p \leq x} \log p \log \frac{x}{p} + O\left(\sqrt{x} \log^2 x\right).$$

§ 5.

Ich wende nun den Cauchyschen Satz auf den Integranden $\frac{x^s}{s^2} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ und den geschlossenen Integrationsweg $ABCDEFA$ an, wo ($x > \sqrt{10}$ angenommen)

$$A = 2 - x^2 i,\ B = 2 + x^2 i,\ C = 1 - \frac{a}{\log^9 (x^2)} + x^2 i,\ D = 1 - \frac{a}{\log^9 10} + 10 i,$$

$$E = 1 - \frac{a}{\log^9 10} - 10 i,\ F = 1 - \frac{a}{\log^9 (x^2)} - x^2 i$$

ist, die Strecken AB, BC, DE, FA geradlinig sind, CD das Kurvenstück

$$s = 1 - \frac{a}{\log^9 t} + t i \qquad (x^2 \geqq t \geqq 10)$$

und EF das Kurvenstück

$$s = 1 - \frac{a}{\log^9 (-t)} \mp t i \qquad (-10 \geqq t \geqq -x^2)$$

bezeichnet.

Da nach § 2 in diesem geschlossenen Gebiete und auf dem Rande $\zeta(s)$ nirgends verschwindet, hat der Integrand im Innern die Stelle $s = 1$ als einzige Singularität; das Residuum für $s = 1$ ist

$$\lim_{s=1} \frac{x^s}{s^2} (s - 1) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -x;$$

---

fähig ist, also zwischen endlichen Unbestimmtheitsgrenzen oscilliert, mögen dieselben verschieden sein oder in 0 oder einem anderen Werte zusammenfallen. Übrigens ist hier die linke Seite der Gleichung, also auch die als $O(1)$ abgeschätzte Funktion reell.

*) Es ist leicht, diese Relation zu verschärfen; doch ist dies für das Folgende ohne Bedeutung.

der **Cauchysche** Satz ergibt daher

$$(31)\qquad \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = \int_{AB} = -2\pi i x + \int_{AF} + \int_{FE} + \int_{ED} + \int_{DC} + \int_{CB}.$$

Hierin ist zunächst, da auf dem Wege ED $\left|\frac{1}{s^2}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|$ unterhalb einer endlichen, von x unabhängigen Konstanten liegt,

$$(32)\qquad \left|\int_{ED}\right| = O\int_{-10}^{10}\left|x^{1-\frac{a}{\log^9 10}+ti}\right|dt = O\left(x^{1-\frac{a}{\log^9 10}}\right).$$

Zweitens ist

$$\left|\int_{CB}\right| = \left|\int_{AF}\right| = \left|\int_{1-\frac{a}{\log^9(x^2)}}^{2}\frac{x^{\sigma+x^2 i}}{(\sigma+x^2 i)^2}\frac{\zeta'(\sigma+x^2 i)}{\zeta(\sigma+x^2 i)}\,d\sigma\right|,$$

also nach (22)

$$(33)\qquad < c\int_{1-\frac{a}{\log^9(x^2)}}^{2}\frac{x^2}{x^4}\log^9(x^2)\,d\sigma < c\,\frac{\log^9(x^2)}{x^2}\cdot 2 = O\left(\frac{\log^9 x}{x^2}\right).$$

Drittens erhält man unter Anwendung von (22)

$$\left|\int_{DC}\right| = \left|\int_{FE}\right| = \left|\int_{10}^{x^2}\frac{x^{1-\frac{a}{\log^9 t}+ti}}{\left(1-\frac{a}{\log^9 t}+ti\right)^2}\frac{\zeta'\left(1-\frac{a}{\log^9 t}+ti\right)}{\zeta\left(1-\frac{a}{\log^9 t}+ti\right)}\,d\left(1-\frac{a}{\log^9 t}+ti\right)\right|$$

$$< c\int_{10}^{x^2}\frac{x^{1-\frac{a}{\log^9 t}}}{t^2}\log^9 t\left|\frac{9a}{t\log^{10} t}+i\right|dt$$

$$< c\left(\frac{9a}{10\log^{10}10}+1\right)\int_{10}^{x^2}x^{1-\frac{a}{\log^9 t}}\frac{\log^9 t}{t^2}\,dt$$

$$< 2c\int_{10}^{x^2}x^{1-\frac{a}{\log^9 t}}\frac{\log^9 t}{t^2}\,dt$$

$$= 2c\int_{10}^{e^{\sqrt[10]{\log x}}}x^{1-\frac{a}{\log^9 t}}\frac{\log^9 t}{t^2}\,dt + 2c\int_{e^{\sqrt[10]{\log x}}}^{x^2}x^{1-\frac{a}{\log^9 t}}\frac{\log^9 t}{t^2}\,dt^{*)}$$

*) Für alle x von einer gewissen Stelle $\left(e^{\log^{10}10}\right)$ an ist $10 \leqq e^{\sqrt[10]{\log x}} < x^2$.

$$< 2cx^{1-\frac{a}{\log^9\left(e^{\sqrt[10]{\log x}}\right)}} \int\limits_{10}^{e^{\sqrt[10]{\log x}}} \frac{\log^9 t}{t^2}\,dt + 2cx\log^9(x^2)\int\limits_{e^{\sqrt[10]{\log x}}}^{x^2}\frac{dt}{t^2}$$

$$< 2cx^{1-\frac{a}{(\log x)^{\frac{9}{10}}}} \int\limits_{10}^{\infty} \frac{\log^9 t}{t^2}\,dt + 2cx\log^9(x^2)\int\limits_{e^{\sqrt[10]{\log x}}}^{\infty}\frac{dt}{t^2}$$

$$= O\left(x^{1-\frac{a}{(\log x)^{\frac{9}{10}}}}\right) + O\left(x\log^9 x\,\frac{1}{e^{\sqrt[10]{\log x}}}\right)$$

$$= O\left(xe^{-\frac{a\log x}{(\log x)^{\frac{9}{10}}}}\right) + O\left(x\,\frac{1}{e^{\sqrt[11]{\log x}}}\right)\text{*)}$$

$$= O\left(xe^{-a\sqrt[10]{\log x}}\right) + O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right)$$

$$\text{(34)}\qquad = O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right).\text{**)}$$

(32), (33) und (34) ergeben, in (31) eingesetzt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-x^2 i}^{2+x^2 i}\frac{x^s}{s^2}\,\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = -x + O\left(\frac{\log^9 x}{x^2}\right) + O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right) + O\left(x^{1-\frac{a}{\log^9 10}}\right)$$

$$= -x + O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right),$$

also nach (30)

$$\text{(35)}\qquad \sum_{p\leq x}\log p\log\frac{x}{p} = x + O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right);$$

insbesondere liegt hierin der Hadamardsche Satz

$$\sum_{p\leq x}\log p\log\frac{x}{p}\sim x$$

enthalten.

---

*) In der Tat ist, $\log x = u^{110}$ gesetzt, $\frac{\log^9 x}{e^{\sqrt[10]{\log x}}} = \frac{u^{990}}{e^{(u^{11})}}$ für hinreichend große u kleiner als $\frac{1}{e^{\sqrt[11]{\log x}}} = \frac{1}{e^{(u^{10})}}$.

**) Die im Exponenten auftretende Zahl 11 könnte natürlich noch verkleinert werden, wie ein Blick auf die letzten Entwickelungen lehrt.

§ 6.

Aus (35) folgt, indem statt x $(1+h)x$ geschrieben wird, wo zur Abkürzung

$$e^{-\sqrt[12]{\log x}} = h$$

gesetzt ist,

$$(36) \qquad \sum_{p \leqq (1+h)x} \log p \log \frac{(1+h)x}{p} = x + hx + O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right);$$

die Subtraktion ergibt aus (35) und (36)

$$(37) \quad \log(1+h) \sum_{p \leqq x} \log p + \sum_{x < p \leqq (1+h)x} \log p \log \frac{(1+h)x}{p} = hx + O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right).$$

Die zweite Summe der linken Seite von (37) ist $\geqq 0$ und

$$\leqq \sum_{x < p \leqq (1+h)x} \log p \log \frac{(1+h)x}{x} = \log(1+h) \sum_{x < p \leqq (1+h)x} \log p.$$

Also liefert (37) einerseits

$$(38) \qquad \log(1+h) \sum_{p \leqq x} \log p \leqq hx + O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right),$$

andererseits

$$(39) \qquad \log(1+h) \sum_{p \leqq (1+h)x} \log p \geqq hx + O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right).$$

In (39) möge statt x $\frac{x}{1+h}$ geschrieben werden:

$$(40) \qquad \log(1+h) \sum_{p \leqq x} \log p \geqq \frac{h}{1+h} x + O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right).$$

(38) und (40) ergeben:

$$(41) \qquad \vartheta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p \leqq \frac{h}{\log(1+h)} x + \frac{1}{\log(1+h)} O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right)$$

und

$$(42) \qquad \vartheta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p \geqq \frac{h}{(1+h)\log(1+h)} x + \frac{1}{\log(1+h)} O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right).$$

$h = e^{-\sqrt[12]{\log x}}$ nimmt für $x = \infty$ zu Null ab, und zwar ist

$$\frac{h}{\log(1+h)} = \frac{h}{h + O(h^2)} = \frac{1}{1 + O(h)} = 1 + O(h) = 1 + O\left(e^{-\sqrt[12]{\log x}}\right)^{*)},$$

*) Die Abkürzung $O(g(h))$ bedeutet, daß der Quotient der betreffenden Funktion durch $g(h)$ für $x = \infty$, d. h. für $h = 0$ endlich bleibt.

$$\frac{h}{(1+h)\log(1+h)} = (1+O(h))\frac{h}{\log(1+h)} = (1+O(h))\,(1+O(h))$$
$$= 1 + O(h) = 1 + O\left(e^{-\sqrt[12]{\log x}}\right),$$
$$\frac{1}{\log(1+h)}\, O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right) = O\left(\frac{1}{h}\right) O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right) = O\left(e^{\sqrt[12]{\log x}}\, xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right)$$
$$= O\left(xe^{-\sqrt[12]{\log x}}\right).$$

Aus (41) und (42) folgt also

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p = x + O\left(xe^{-\sqrt[12]{\log x}}\right). \tag{43}$$

§ 7.

Aus (43) ergibt sich weiter

$$\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1 = \sum_{p\leq x} \frac{\log p}{\log p} = \sum_{n=2}^{x} \frac{\vartheta(n) - \vartheta(n-1)}{\log n}$$
$$= \sum_{n=2}^{x} \vartheta(n)\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \frac{\vartheta(x)}{\log(x+1)}$$
$$= \sum_{n=2}^{x} n\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \frac{x}{\log(x+1)}$$
$$+ O\sum_{n=2}^{x} ne^{-\sqrt[12]{\log n}}\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + O\left(\frac{xe^{-\sqrt[12]{\log x}}}{\log(x+1)}\right)$$
$$= \sum_{n=2}^{x} \frac{1}{\log n}(n-(n-1)) + O\sum_{n=2}^{x} n\, e^{-\sqrt[12]{\log n}}\, \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log^2 n} + O\left(xe^{-\sqrt[12]{\log x}}\right)$$
$$= \sum_{n=2}^{x} \frac{1}{\log n} + O\sum_{n=2}^{x} ne^{-\sqrt[12]{\log n}}\,\frac{1}{n} + O\left(xe^{-\sqrt[12]{\log x}}\right)$$
$$= \int_2^x \frac{dx}{\log x} + O(1) + O\int_1^x e^{-\sqrt[12]{\log u}}\, du + O\left(xe^{-\sqrt[12]{\log x}}\right)$$
$$= Li(x) + O\int_1^{\sqrt{x}} 1\, du + O\int_{\sqrt{x}}^{x} e^{-\sqrt[12]{\log(\sqrt{x})}}\, du + O\left(xe^{-\sqrt[12]{\log x}}\right)$$
$$= Li(x) + O(\sqrt{x}) + O\left(xe^{-\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\sqrt[12]{\log x}}\right) + O\left(xe^{-\sqrt[12]{\log x}}\right),$$

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(xe^{-\sqrt[12]{\log x}}\right); \tag{44}$$

insbesondere ist hiermit der Primzahlsatz

$$\pi(x) \sim Li(x)$$

bewiesen.

Übrigens ist Herr de la Vallée-Poussin in seiner letzten Arbeit*) sogar bis zu dem Nachweise gelangt, daß für eine passend gewählte Konstante γ

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(xe^{-\gamma\sqrt{\log x}}\right) \tag{45}$$

ist; aber er stützt sich auf die Theorie der Hadamardschen Funktionen, während ich die Gleichung (44) allein mit den Hilfsmitteln der vorigen Paragraphen erhalten habe; (44) gestattet auch, die wichtige Folgerung zu ziehen, welche Herr de la Vallée-Poussin an (45) angeknüpft hat und auf deren Tragweite er in der Einleitung zu seiner Arbeit mit Recht hingewiesen**) hat:

Der Integrallogarithmus stellt die Menge der Primzahlen $\leqq x$ asymptotisch dar und zwar besser als alle seine Näherungswerte in endlicher Form, welche durch die Summe der m ersten Glieder der (divergenten) Reihenentwickelung

$$\int \frac{dx}{\log x} = \frac{x}{\log x} + \frac{1!\,x}{\log^2 x} + \frac{2!\,x}{\log^3 x} + \frac{3!\,x}{\log^4 x} + \cdots + \frac{(m-1)!\,x}{\log^m x} + \cdots$$

für $m = 1, 2, 3, \cdots$ *dargestellt werden.*

Denn es ist, wenn α und β zwei Konstanten bezeichnen, für $x > 2$

$$Li(x) = \alpha + \int_2^x \frac{du}{\log u} = \beta + \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \cdots + \frac{(m-1)!\,x}{\log^m x} + m!\int_2^x \frac{du}{\log^{m+1} u},$$

also

$$Li(x) - \beta - \left(\frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \cdots + \frac{(m-1)!\,x}{\log^m x}\right) = m!\int_2^x \frac{du}{\log^{m+1} u} > m!\int_2^x \frac{du}{\log^{m+1} x}$$

$$= \frac{m!\,(x-2)}{\log^{m+1} x};$$

während also nach (44) für jedes ganzzahlige positive m

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^{m+1} x}{x}\left(\pi(x) - Li(x)\right) = 0$$

ist, wird

$$\frac{\log^{m+1} x}{x}\left(\pi(x) - \frac{x}{\log x} - \frac{x}{\log^2 x} - \cdots - \frac{(m-1)!\,x}{\log^m x}\right)$$

$$= \frac{\log^{m+1} x}{x}\left(\pi(x) - Li(x)\right) + \frac{\log^{m+1} x}{x}\left(Li(x) - \frac{x}{\log x} - \frac{x}{\log^2 x} - \cdots - \frac{(m-1)!\,x}{\log^m x}\right)$$

$$> \frac{\log^{m+1} x}{x}\left(\pi(x) - Li(x)\right) + \frac{\beta\log^{m+1} x}{x} + m! - \frac{2\,m!}{x}$$

für $x = \infty$ nicht 0, sondern bleibt für alle hinreichend großen x oberhalb der positiven Zahl $\frac{m!}{2}$ gelegen.

*) „Sur la fonction etc.", S. 63.

**) l. c., S. 5—6.

Zweiter Teil.

Beweis des Primidealsatzes.

Einleitung.

Über die Verteilung der Primideale eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers $\varkappa$ ist ein dem Primzahlsatz entsprechender Primidealsatz noch niemals bewiesen worden. Es bezeichne $\pi_\varkappa(x)$ die Anzahl der Primideale des Körpers, deren Norm $\leqq x$ ist; dann läßt sich leicht*) zeigen, daß, falls $\lim\limits_{x=\infty} \frac{\pi_\varkappa(x)}{Li(x)}$ existiert,

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi_\varkappa(x)}{Li(x)} = 1$$

ist. Einem Versuche, die Existenz jenes limes nachzuweisen, mußte naturgemäß ein Studium der zu einem beliebigen algebraischen Zahlkörper $\varkappa$ gehörigen Zetafunktion vorangehen**); Herr Dedekind***) hat diese Funktion $\zeta_\varkappa(s)$ durch jede der drei für $\Re(s) > 1$ giltigen Gleichungen (46), (47) und (48) definiert:

$$\zeta_\varkappa(s) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{1}{N\mathfrak{n}^s}, \tag{46}$$

wo $\mathfrak{n}$ alle Ideale des Körpers durchläuft und $N\mathfrak{n}$ die Norm von $\mathfrak{n}$ bezeichnet,

$$\zeta_\varkappa(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s}, \tag{47}$$

wo $F(n)$ die Anzahl der Darstellungen der ganzen rationalen Zahl n als Norm eines Ideals des Körpers ist, und

$$\zeta_\varkappa(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}}, \tag{48}$$

wo $\mathfrak{p}$ alle Primideale des Körpers durchläuft.

Von den Sätzen, welche ich a. a. O. über diese Funktion bewiesen habe, gebrauche ich im Folgenden diese vier:

---

*) Vergl. meine auf S. 647, Anm. 3 zitierte Arbeit, S. 142.

**) Vergl. Hilbert, „Mathematische Probleme", Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1900, S. 275—276 und Archiv der Mathematik und Physik, Ser. 3, Bd. 1, 1901, S. 215.

***) Vergl. z. B. die von ihm herausgegebenen Vorlesungen Dirichlets über Zahlentheorie, 4. Aufl., 1894, S. 610—611.

1)*) *Wenn k der Grad des Körpers ist, so ist die Funktion $\zeta_\varkappa(s)$ über die Gerade $\Re(s)=1$ hinaus mindestens bis zur Geraden $\Re(s)=1-\frac{1}{k}$ hin fortsetzbar und ist in der Halbebene $\Re(s)>1-\frac{1}{k}$ eine eindeutige analytische Funktion mit dem Pole erster Ordnung $s=1$ als einziger singulärer Stelle.*

2)**) *$\zeta_\varkappa(s)$ verschwindet für kein s mit dem reellen Teil* 1.

3)***) *Es gibt eine positive Konstante γ, sodaß für alle $t\geqq 10$*

$$|\zeta_\varkappa(1+ti)|>\frac{\gamma}{\log^7 t} \tag{49}$$

ist.

4)†) *Es gibt zwei Konstanten λ und ϱ, so daß für*

$$s=\sigma+ti,\quad t\geqq 10,\quad 1-\frac{\lambda}{\log t}\leqq\sigma\leqq 2$$

$$|\zeta_\varkappa'(\sigma+ti)|<\varrho\log^2 t \tag{50}$$

ist.

Da von der $\zeta_\varkappa$-Funktion nichts weiteres bekannt ist als die a. a. O. bewiesenen Sätze, so erschien mir zunächst die Entscheidung über die Richtigkeit des Primidealsatzes noch in einiger Ferne zu liegen. Wenigstens ist bei dem gegenwärtigen Stande der Idealtheorie eine Übertragung der bekannten, beim Beweise des Primzahlsatzes gebräuchlichen analytischen Methoden auf den allgemeinen Fall nicht möglich††).

Aber der im ersten Teile dieser Arbeit angegebene neue Beweis des Primzahlsatzes hat neben seiner elementaren Natur den weiteren Vorteil, daß sich sein Gedankengang in Verbindung mit den angeführten Eigenschaften der $\zeta_\varkappa$-Funktion ohne weiteres auf den Fall eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers übertragen läßt. Dies stellt den ersten Beweis des Primidealsatzes dar, und es ergeben sich zugleich für die Größenordnung des Restgliedes dieselben Abschätzungen wie im ersten Teile dieser Arbeit für die Differenz der Primzahlmenge und des Integrallogarithmus.

§ 1.

Aus (50) folgt (analog wie auf S. 653) für $t\geqq 10$, $-\frac{\lambda}{\log t}\leqq\varepsilon\leqq 1$

$$|\zeta_\varkappa(1+\varepsilon+ti)-\zeta_\varkappa(1+ti)|\leqq\varrho|\varepsilon|\log^2 t; \tag{51}$$

*) l. c., S. 81.
**) l. c., S. 82.
***) l. c.. S. 96.
†) l. c., S. 94.
††) l. c., S. 71 und 143.

für $t \geqq 10$, $-\frac{\gamma}{2\varrho \log^9 t} \leqq \varepsilon \leqq \frac{\gamma}{2\varrho \log^9 t}$ *) ist also nach (49) und (51)

$$|\zeta_\varkappa(1+\varepsilon+ti)| \geqq |\zeta_\varkappa(1+ti)| - |\zeta_\varkappa(1+\varepsilon+ti) - \zeta_\varkappa(1+ti)|$$
$$> \frac{\gamma}{\log^7 t} - \varrho \cdot \frac{\gamma}{2\varrho \log^9 t} \log^2 t = \frac{\gamma}{2\log^7 t},$$

und daher in Verbindung mit (50)

$$\left|\frac{\zeta_\varkappa'(1+\varepsilon+ti)}{\zeta_\varkappa(1+\varepsilon+ti)}\right| < \frac{2\varrho}{\gamma} \log^9 t. \tag{52}$$

Ferner ist für $t \geqq 10$, $\frac{\gamma}{2\varrho \log^9 t} \leqq \varepsilon \leqq 1$

$$\left|\frac{\zeta_\varkappa'(1+\varepsilon+ti)}{\zeta_\varkappa(1+\varepsilon+ti)}\right| = \left|-\sum_{\mathfrak{p}} \log N\mathfrak{p}\left(\frac{1}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon+ti}} + \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2(1+\varepsilon+ti)}} + \cdots\right)\right|$$
$$\leqq \sum_{\mathfrak{p}} \log N\mathfrak{p}\left(\frac{1}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2(1+\varepsilon)}} + \cdots\right) = -\frac{\zeta_\varkappa'(1+\varepsilon)}{\zeta_\varkappa(1+\varepsilon)}; \tag{53}$$

da $\frac{\zeta_\varkappa'(s)}{\zeta_\varkappa(s)}$ in $s = 1$ einen Pol erster Ordnung hat, ist eine Konstante τ so bestimmbar, daß für $0 < \varepsilon \leqq 1$

$$-\frac{\zeta_\varkappa'(1+\varepsilon)}{\zeta_\varkappa(1+\varepsilon)} = \left|\frac{\zeta_\varkappa'(1+\varepsilon)}{\zeta_\varkappa(1+\varepsilon)}\right| < \frac{\tau}{\varepsilon}$$

ist, was aus (53)

$$\left|\frac{\zeta_\varkappa'(1+\varepsilon+ti)}{\zeta_\varkappa(1+\varepsilon+ti)}\right| < \frac{\tau}{\varepsilon} \leqq \frac{2\varrho\tau}{\gamma} \log^9 t \qquad \left(t \geqq 10,\ \frac{\gamma}{2\varrho \log^9 t} \leqq \varepsilon \leqq 1\right) \tag{54}$$

ergibt.

(52) und (54) besagen zusammengenommen: Es gibt zwei Konstanten b und c, sodaß für $s = \sigma + ti$, $t \geqq 10$, $1 - \frac{b}{\log^9 t} \leqq \sigma \leqq 2$

$$\left|\frac{\zeta_\varkappa'(s)}{\zeta_\varkappa(s)}\right| < c \log^9 t$$

ist. Es sei nun a eine positive Zahl, welche kleiner ist als b und als der Abstand der Geraden $\Re(s) = 1$ von allen im Rechteck $1 - \frac{1}{2k} \leqq \Re(s) < 1$, $0 \leqq \Im(s) \leqq 10$ etwa vorhandenen Nullstellen der Funktion $\zeta_\varkappa(s)$; dann verschwindet die $\zeta_\varkappa$-Funktion nicht in dem Teile der Ebene, welcher rechts von der Kurve

---

*) Die nur nach unten beschränkte Konstante ϱ in (50) kann so groß gewählt werden, daß $\frac{\gamma}{2\varrho} < \lambda$ ist; dann ist $\frac{\gamma}{2\varrho \log^9 t} < \frac{\lambda}{\log t}$ und < 1.

$$\begin{cases} \sigma = 1 - \dfrac{a}{\log^9 t}\,, & t \geqq 10 \\ \sigma = 1 - \dfrac{a}{\log^9 10}\,, & -10 \leqq t \leqq 10 \\ \sigma = 1 - \dfrac{a}{\log^9 (-t)}\,, & t \leqq -10 \end{cases}$$

liegt; $\zeta_\varkappa(s)$ verschwindet auch nicht auf dieser Kurve, und es ist für $t \geqq 10$, $1 - \frac{a}{\log^9 t} \leqq \sigma \leqq 2$

$$\left| \frac{\zeta'_\varkappa(\sigma + ti)}{\zeta_\varkappa(\sigma + ti)} \right| < c \log^9 t. \tag{55}$$

§ 2.

Wenn die in der Halbebene $\Re(s) > 1$ für $-\frac{\zeta'_\varkappa(s)}{\zeta_\varkappa(s)}$ giltige Doppelreihe

$$\sum_{\mathfrak{p}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{ms}} = \sum_{\mathfrak{p}} \log N\mathfrak{p} \left(\frac{1}{N\mathfrak{p}^s} + \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2s}} + \cdots \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_\varkappa(n)}{n^s}$$

nach wachsenden Normen geordnet ist ($L_\varkappa(n)$ ist $= \Sigma \log N\mathfrak{p}$, wo $\mathfrak{p}$ alle Primideale durchläuft, für welche n Norm oder Normpotenz ist), so ist die Reihe für $s = 2 + ti$ wegen $\left| \frac{1}{n^{2+ti}} \right| = \frac{1}{n^2}$ gleichmäßig konvergent.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^s}{s^2} \frac{L_\varkappa(n)}{n^s}$$

kann also zwischen den Grenzen $2 - x^2 i$ und $2 + x^2 i$ gliedweise nach s integriert werden, und man erhält nach (26)

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} \frac{\zeta'_\varkappa(s)}{\zeta_\varkappa(s)} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^s}{s^2} \frac{L_\varkappa(n)}{n^s} ds = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} L_\varkappa(n) \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^2} ds$$

$$= \sum_{n=1}^{x} L_\varkappa(n) \log \frac{x}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} L_\varkappa(n)\, \Theta_{\left(x, \frac{x}{n}\right)} \frac{1}{n^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{x} L_\varkappa(n) \log \frac{x}{n} + O(1)$$

$$= \sum_{N\mathfrak{p} \leq x} \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}} + \sum_{N\mathfrak{p} \leq \sqrt{x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}^2} + \cdots$$

$$+ \sum_{N\mathfrak{p} \leq \sqrt[\nu]{x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}^\nu} + O(1),$$

wo ν die größte ganze Zahl $\leqq \frac{\log x}{\log 2}$ bezeichnet; wegen

$$\vartheta_\varkappa(x) = \sum_{N\mathfrak{p} \leq x} \log N\mathfrak{p} = O(x)^{*)}$$

ist hierin

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leq \sqrt{x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}^2} + \cdots + \sum_{N\mathfrak{p} \leq \sqrt[\nu]{x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}^\nu} \leqq (\nu - 1) \log x \sum_{N\mathfrak{p} \leq \sqrt{x}} \log N\mathfrak{p}$$

$$= O\left(\log^2 x\, \vartheta_\varkappa(\sqrt{x})\right) = O(\sqrt{x} \log^2 x),$$

also

$$(56) \qquad \sum_{N\mathfrak{p} \leq x} \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{2 - x^2 i}^{2 + x^2 i} \frac{x^s}{s^2} \frac{\zeta_\varkappa'(s)}{\zeta_\varkappa(s)} ds + O(\sqrt{x} \log^2 x).$$

§ 3.

Die Integration über die auf S. 659 angegebene Bahn ergibt, da das Residuum des Integranden für $s = 1$ auch hier $-x$ ist und da der Ungleichung (22) hier die gleichlautende Ungleichung (55) entspricht, wörtlich wie in § 5 des ersten Teiles

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2 - x^2 i}^{2 + x^2 i} \frac{x^s}{s^2} \frac{\zeta_\varkappa'(s)}{\zeta_\varkappa(s)} ds = -x + O\left(x e^{-\sqrt[11]{\log x}}\right),$$

also wegen (56)

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leq x} \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}} = x + O\left(x e^{-\sqrt[11]{\log x}}\right).$$

§ 4.

Daraus folgt, wenn h zur Abkürzung die Funktion $e^{-\sqrt[12]{\log x}}$ bezeichnet (welche für $x = \infty$ unendlich klein wird), durch Subtraktion von

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leq (1+h)x} \log N\mathfrak{p} \log \frac{(1+h)x}{N\mathfrak{p}} = x + hx + O\left(x e^{-\sqrt[11]{\log x}}\right)$$

wie in § 6 des ersten Teiles

$$(57) \qquad \vartheta_\varkappa(x) = \sum_{N\mathfrak{p} \leq x} \log N\mathfrak{p} = x + O\left(x e^{-\sqrt[12]{\log x}}\right).$$

§ 5.

Es sei $G(n)$ die Anzahl**) der Darstellungen der ganzen rationalen Zahl n als Norm eines Primideales; dann ist

*) l. c., S. 122.

**) $G(n)$ kann natürlich nur für Primzahlpotenzen von 0 verschieden sein.

$$\vartheta_{\varkappa}(x) = \sum_{n=1}^{x} G(n) \log n;$$

wegen

$$\pi_{\varkappa}(x) = \sum_{N\mathfrak{p} \leqq x} 1 = \sum_{n=1}^{x} G(n) = \sum_{n=1}^{x} \frac{G(n)\log n}{\log n} = \sum_{n=1}^{x} \frac{\vartheta_{\varkappa}(n) - \vartheta_{\varkappa}(n-1)}{\log n}$$

ergibt also (57) genau wie (43) auf S. 663, daß

$$\pi_{\varkappa}(x) = Li(x) + O\left(xe^{-\sqrt[13]{\log x}}\right)$$

ist.

A fortiori ist also

$$\pi_{\varkappa}(x) \sim Li(x),$$

$$\pi_{\varkappa}(x) \sim \int_{2}^{x} \frac{dx}{\log x},$$

$$\pi_{\varkappa}(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Die Anzahl der Primideale eines algebraischen Zahlkörpers, deren Norm $\leqq x$ *ist, ist asymptotisch gleich dem Integrallogarithmus von* x, *und die Differenz* $\frac{\pi_{\varkappa}(x)}{Li(x)} - 1$ *wird für* $x = \infty$ *stärker* 0 *als jede Potenz von* $\log x$ *mit negativem Exponenten.*

Wenn also $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ zwei beliebige algebraische Zahlkörper sind (z. B. $\varkappa_1$ beliebig und $\varkappa_2$ gleich dem natürlichen Rationalitätsbereich), so ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi_{\varkappa_1}(x)}{\pi_{\varkappa_2}(x)} = 1.$$

Berlin, den 22. Oktober 1902.