

Ueber die allgemeinen Integrale der dynamischen Differentialgleichungen und ihre Verwerthung durch die Methoden von Lie.

Von

A. MAYER in Leipzig.

Für die Bewegung eines Systems von materiellen Punkten, das nur inneren Anziehungen ausgesetzt ist und das sich wie ein freier starrer Körper zu bewegen vermag, liefern die allgemeinen Principe der Mechanik 10 Integrale. Diese 10 Integrale zerfallen in zwei Gruppen von ganz verschiedenem Charakter. Die erste Gruppe besteht nur aus dem Einen Integrale der lebendigen Kraft, welches (verbunden selbstverständlich mit den etwaigen Bedingungsgleichungen des Systems und den gegebenen Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten der Punkte) alle Daten enthält, die zur eindeutigen Bestimmung der Bewegung erforderlich sind, und welches daher nothwendig einzig, oder so zu sagen der analytische Ausdruck des dynamischen Problems selbst ist. Die zweite Gruppe dagegen wird gebildet von den 3 Flächen — und den 6 Schwerpunkts-Integralen, die unverändert gelten, wie sich auch die Kräftefunction durch die gegenseitigen Entfernungen der Punkte ausdrücken mag. Diese letzteren Integrale, da sie nicht nur Einem, sondern unendlich vielen dynamischen Problemen angehören, brauchen nicht nothwendig einzig zu sein und die wichtige Frage, ob es noch andere allgemeine Integrale dieser zweiten Art gebe, wird natürlich bloss durch den Einwurf, dass man dieselben sonst schon längst würde gefunden haben, noch nicht erledigt. Mit ihrer Beantwortung beschäftigt sich der erste Paragraph der vorliegenden Arbeit, in der ich mich immer auf die Betrachtung solcher Kräfte beschränke, die nur von den Lagen, nicht aber auch von den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte abhängen.

An den Beweis, dass es keine anderen allgemeinen Principe der Mechanik von derselben Natur giebt, wie die drei bekannten Principe der lebendigen Kraft, der Flächen und des Schwerpunkts, reiht sich dann in den folgenden Paragraphen die zweite Frage an, wie weit man bei der jetzigen Ausbildung der Integrationsmethoden durch diese

allgemeinen Integrale ein jedes Problem aus der Dynamik eines Systems materieller Punkte führen könne. Lie hat diese zweite Frage nur für das Problem der drei Körper, oder was auf dasselbe hinausläuft, für ein System freier Punkte beantwortet. *) Nun ergibt sich allerdings auch für ein durch Bedingungsgleichungen beschränktes System die Antwort ganz von selbst**), wenn man meine oder die Lie'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen 1. O. mit dem Satze von Jacobi***) verbindet, dass, wie man auch durch Einführung unabhängiger Bestimmungsstücke die Differentialgleichungen der Bewegung auf die kanonische Form:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

bringen möge, doch stets aus den 3 Flächensätzen 3 solche Integrale

$$f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \quad f_3 = a_3$$

dieses kanonischen Systems hervorgehen, die zu einander in den Beziehungen stehen:

$$(f_2 f_3) = f_1, \quad (f_3 f_1) = f_2, \quad (f_1 f_2) = f_3.$$

Allein die Art, wie Jacobi zu diesem Satze gelangt, ist äusserst complicirt. Zwar hat später Mathieu†) die ganze Rechnung viel klarer und übersichtlicher gestaltet, immerhin aber bedarf man zum Beweise des Satzes noch eines recht grossen Apparates. Daher war es mir sehr angenehm, zu sehen, wie das fundamentale Theorem, welches Lie in Bd. XI, p. 476 dieser Annalen gegeben hat, allein schon die aufgeworfene Frage im Wesentlichen zu beantworten gestattet. Sind auch diese Anwendungen des genannten Satzes für denjenigen ziemlich selbstverständlich, der sich eingehender mit den Lie'schen Methoden beschäftigt hat, so müssen sie doch eben gemacht werden, um den ganzen Nutzen klar zu legen, der sich aus diesen Methoden für die Dynamik ziehen lässt, und als gute Beispiele und Illustrationen zum Lie'schen Theorem dürften sie auch an sich selbst einiges Interesse darbieten. Hierbei benutze ich zunächst in § 2. nur die gewöhnliche Art, die Differentialgleichungen der unfreien Bewegung durch Einführung unabhängiger Bestimmungsstücke des Systems auf die kanonische Form zu bringen, wende aber dann in § 3. noch eine zweite, jeder Zeit wirklich durchführbare Transformation dieser Differentialgleichungen an, die selbst wieder nur eine Anwendung der allgemeinen Methode von Clebsch, die Differentialgleichungen der

*) Diese Annalen Bd. VIII, p. 283, Bd. XI, p. 478

**) Vgl. Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. W. 1879, p. 40.

***) Borchardt's J. Bd. 60, pp. 106, 146, 149.

†) Liouville J. 1874, Dynamique analytique, Paris 1878, p. 243.

Variationsrechnung in kanonische Gleichungen zu verwandeln*), auf die dynamischen Differentialgleichungen ist, und bei der sich alle Verhältnisse noch durchsichtiger und klarer gestalten, als bei der ersten Umformung. Die in diesem zweiten Theile des Aufsatzes benutzten Definitionen und Sätze von Lie finden sich in Bd. VIII, pp. 248, 252, 259 dieser Annalen und das Lie'sche Fundamentaltheorem selbst brauche ich hier in der folgenden speciellen Form:

Theorem I. *Es sei die gegebene partielle Differentialgleichung 1. O. mit μ unabhängigen Variablen:*

$$f_1(x_1 \cdots x_\mu p_1 \cdots p_\mu) = \text{const.}, \quad \left(p_i = \frac{\partial W}{\partial x_i}\right)$$

vollständig zu integrieren unter der Voraussetzung, dass man von ihrer Charakteristik:

$$(f_1 f) \equiv \sum_{i=1}^{\mu} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = 0$$

bereits eine Reihe von Lösungen $f = f_1, f_2, \dots, f_s$ kennt, die eine Gruppe bilden. Enthält dann diese Gruppe ausser f_1 noch m ausgezeichnete Functionen, so verlangt die vollständige Integration der gegebenen Gleichung höchstens nur noch die Operationen:

$$2\mu - 1 - s - m, \quad 2\mu - 1 - s - m - 2, \dots, 6, 4, 2.$$

In diesem Satze wird unter einer Operation n die Auffindung irgend eines Integrales von einem System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. O. verstanden und das Wort „höchstens“ soll (hier und in allem Folgenden) aussagen, dass der erste Schritt, der bei den gemachten Annahmen zur weiteren Lösung des Problems auszuführen wäre, stets in einer Operation von der zuerst angegebenen Ordnung besteht, wogegen von den übrigen Operationen unter Umständen einige und sogar alle wegfallen können.

§ 1.

Die erste der oben aufgeworfenen Fragen lässt sich, wenn man bei ihr auch die Flächen- und Schwerpunktsintegrale selbst wiederfinden will, als Aufgabe also formuliren:

Man soll alle diejenigen Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems von n materiellen Punkten finden, die unverändert Geltung behalten, welche Function der gegenseitigen Entfernungen man auch für die Kräftefunction U nehmen und welche Bedingungen man diesen Entfernungen vorschreiben mag.

*) Borchardt's Journal, Bd. 55, p. 337.

Betrachtet man nun ein System von n freien Punkten, nennt in Bezug auf ein im Raume festes rechtwinkliges Axensystem x_i, y_i, z_i die Coordinaten der Masse m_i des Systems und setzt:

$$m_i x_i' = p_i, \quad m_i y_i' = q_i, \quad m_i z_i' = r_i,$$

so werden die Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung des Systems durch die Charakteristik defnirt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} \left(p_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + q_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + r_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \right) \\ + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial f}{\partial r_i} \right) = 0. \end{aligned}$$

Ist aber U eine blosse Function der gegenseitigen Entfernungen

$$r_{i\kappa} = [(x_i - x_\kappa)^2 + (y_i - y_\kappa)^2 + (z_i - z_\kappa)^2]^{1/2}$$

der Punkte des Systems, so hat man:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = 2 \sum_{\kappa=1}^{\kappa=n} \frac{\partial U}{\partial r_{i\kappa}^2} (x_i - x_\kappa),$$

also:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{\kappa=1}^{\kappa=n} \frac{\partial U}{\partial r_{i\kappa}^2} (x_i - x_\kappa) \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_\kappa} \right).$$

Soll daher die obige Charakteristik identisch erfüllt werden, welche Function der $r_{i\kappa}^2$ man auch für U setzen mag, so muss f eine gemeinsame Lösung der Gleichung:

$$(I) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{m_i} \left(p_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + q_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + r_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \right) = 0$$

und der $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen:*)

$$\begin{aligned} (II) \quad (x_i - x_\kappa) \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_\kappa} \right) + (y_i - y_\kappa) \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_\kappa} \right) \\ + (z_i - z_\kappa) \left(\frac{\partial f}{\partial r_i} - \frac{\partial f}{\partial r_\kappa} \right) = 0 \end{aligned}$$

sein und man sieht leicht, dass jede solche gemeinsame Lösung auch dann noch ein Integral der dynamischen Differentialgleichungen liefert, wenn die Beweglichkeit des Systems durch irgend welche Bedingungen zwischen den gegenseitigen Entfernungen seiner Punkte beschränkt ist. Unsere Aufgabe kommt also darauf zurück, alle gemeinsamen Lösungen der Charakteristiken (I) und (II) zu finden.

*) die sich jedoch auf $3n - 6$ reduciren, sobald $n > 4$ ist.

Nun ist:

$$(III) \quad \begin{cases} f = F(p_h q_h r_h u_h v_h w_h), \text{ wo } h = 1, 2, \dots, n \text{ und} \\ u_h = m_h x_h - p_h t, \quad v_h = m_h y_h - q_h t, \quad w_h = m_h z_h - r_h t, \end{cases}$$

die allgemeine Lösung der Charakteristik (I) und durch die Substitutionen (III) geht die Charakteristik (II) über in:

$$\left[\frac{u_i}{m_i} - \frac{u_x}{m_x} + \left(\frac{p_i}{m_i} - \frac{p_x}{m_x} \right) t \right] \left[\frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_x} - t \left(\frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) \right] + \dots = 0.$$

Jede gemeinsame Lösung der beiden Charakteristiken (I) und (II) muss daher eine solche Function der $6n$ Argumente $p_h q_h r_h u_h v_h w_h$ sein, die gleichzeitig die 3 Charakteristiken erfüllt:

$$(IV) \quad \begin{cases} \left(\frac{u_i}{m_i} - \frac{u_x}{m_x} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_x} \right) + \dots = 0, \\ \left(\frac{u_i}{m_i} - \frac{u_x}{m_x} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) + \dots = \left(\frac{p_i}{m_i} - \frac{p_x}{m_x} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_x} \right) + \dots, \\ \left(\frac{p_i}{m_i} - \frac{p_x}{m_x} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) + \dots = 0. \end{cases}$$

Die Form dieser Gleichungen zeigt unmittelbar, dass

$$(V) \quad \begin{cases} p_i + p_x = p', & q_i + q_x = q', & r_i + r_x = r', \\ u_i + u_x = u', & v_i + v_x = v', & w_i + w_x = w' \end{cases}$$

gemeinsame Lösungen derselben sind. Führt man daher diese Grössen zusammen mit den folgenden:

$$(VI) \quad \begin{cases} \frac{p_i}{m_i} - \frac{p_x}{m_x} = p, & \frac{q_i}{m_i} - \frac{q_x}{m_x} = q, & \frac{r_i}{m_i} - \frac{r_x}{m_x} = r, \\ \frac{u_i}{m_i} - \frac{u_x}{m_x} = u, & \frac{v_i}{m_i} - \frac{v_x}{m_x} = v, & \frac{w_i}{m_i} - \frac{w_x}{m_x} = w \end{cases}$$

als neue Variablen ein, so gehen die Charakteristiken (IV) über in:

$$A(F) = u \frac{\partial F}{\partial p} + v \frac{\partial F}{\partial q} + w \frac{\partial F}{\partial r} = 0,$$

$$B(F) = u \frac{\partial F}{\partial u} + v \frac{\partial F}{\partial v} + w \frac{\partial F}{\partial w} - p \frac{\partial F}{\partial p} - q \frac{\partial F}{\partial q} - r \frac{\partial F}{\partial r} = 0,$$

$$C(F) = p \frac{\partial F}{\partial u} + q \frac{\partial F}{\partial v} + r \frac{\partial F}{\partial w} = 0.$$

Diese 3 von einander unabhängigen Charakteristiken enthalten nur 6 unabhängige Variable; sie können daher nicht mehr als 3 unabhängige gemeinsame Lösungen besitzen. Ueberdies ist:

$$A(C(F)) - C(A(F)) = B(F).$$

Jede gemeinsame Lösung der beiden Gleichungen $A(F) = 0$ und $\dot{C}(F) = 0$ ist also auch eine Lösung von $B(F) = 0$. Diese beiden Gleichungen haben aber, wie man nach Integration einer derselben aus der Symmetrie sogleich erkennt, die 3 unabhängigen Lösungen gemein:

$$vr - wq = x, \quad wp - ur = y, \quad uq - vp = z.$$

Nach (V) und (VI) ist also:

$$F = \Phi(p' q' r' u' v' w' x y z),$$

wo x, y, z die Werthe haben:

$$x = \left(\frac{v_i}{m_i} - \frac{v_x}{m_x} \right) \left(\frac{r_i}{m_i} - \frac{r_x}{m_x} \right) - \left(\frac{w_i}{m_i} - \frac{w_x}{m_x} \right) \left(\frac{q_i}{m_i} - \frac{q_x}{m_x} \right), \dots,$$

die allgemeine Lösung des Systems (IV). Nach (V) hat man aber:

$$v_i r_x + v_x r_i = (v' - v_x) r_x + (v' - v_i) r_i = v' r' - v_x r_x - v_i r_i,$$

also kann man

$$x = \frac{v_i r_i - w_i q_i}{m_i^2} + \frac{v_x r_x - w_x q_x}{m_x^2} - \frac{v_i r_x + v_x r_i - w_i q_x - w_x q_i}{m_i m_x}$$

auch so schreiben:

$$x = - \frac{v' r' - w' q'}{m_i m_x} + \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_x} \right) \left(\frac{v_i r_i - w_i q_i}{m_i} + \frac{v_x r_x - w_x q_x}{m_x} \right)$$

und daher, wenn man:

$$\frac{v_i r_i - w_i q_i}{m_i} + \frac{v_x r_x - w_x q_x}{m_x} = x', \dots$$

setzt, die allgemeine Lösung des Systems (IV) auch in der Form annehmen:

$$F = \Phi(p' q' r' u' v' w' x' y' z').$$

Hieraus erhält man nach (III) und (V) für die allgemeine gleichzeitige Lösung f der beiden Charakteristiken (I) und (II):

$$f = F(p' q' r' u' v' w' x' y' z' u_h v_h w_h),$$

worin:

$$p' = p_i + p_x, \dots$$

$$u' = m_i x_i + m_x x_x - t(p_i + p_x), \dots$$

$$x' = y_i r_i - z_i q_i + y_x r_x - z_x q_x, \dots$$

und für h alle Zahlen $1, 2, \dots, n$, mit Ausnahme allein von i und x zu setzen sind.

Soll nun diese Lösung allen Charakteristiken (II) genügen, so

muss sie ungeändert bleiben, welche Werthe man auch den beiden Indices i und α geben mag. Daraus erhellt aber, dass

$$f = f(PQRUVWXYZ),$$

wo

$$(VII) \quad \begin{cases} P = \sum_{i=1}^{i=n} p_i, \dots, \\ U = \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i - t \sum_{i=1}^{i=n} p_i, \dots, \\ X = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i r_i - z_i q_i), \dots, \end{cases}$$

die allgemeinste Form der Function f ist, welche gleichzeitig der Charakteristik (I) und allen Charakteristiken (II) genügt. Mit anderen Worten also: Die $1 + \frac{n(n-1)}{2}$ Charakteristiken (I) und (II) besitzen zusammen nur die 9 von einander unabhängigen Lösungen (VII), oder es gibt ausser den Schwerpunkts- und Flächenintegralen keine Integrale der dynamischen Differentialgleichungen, deren Form unabhängig wäre von den gegenseitigen Anziehungen der Punkte des Systems.

§ 2.

Um bei der zweiten Frage, wie weit man durch die Lie'schen Methoden ein jedes dynamische Problem führen kann, in welchem die allgemeinen Principe gelten, mit möglichst wenig Formeln auszukommen, wird es zweckmässig sein, die Bezeichnung zu ändern.

Ich betrachte wieder ein System von n materiellen Punkten, das sich unter dem Einflusse einer Kräftefunction U bewegt, nenne aber jetzt, bezogen auf das unbewegliche Axensystem,

$$\xi_h, \xi_{n+h}, \xi_{2n+h}$$

die rechtwinkligen Coordinaten der Masse m_h des Systems und setze:

$$m_h = m_{n+h} = m_{2n+h},$$

sodass die lebendige Kraft des Systems durch

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=3n} m_i \xi_i'^2$$

ausgedrückt wird.

Bezeichnen dann

$$(1) \quad \varphi_1 = 0, \dots, \varphi_r = 0$$

die vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen des Systems, die ich der Einfachheit halber gleich von vornherein frei von t voraussetzen will,

so wird die Aufgabe, die Bewegung des Systems zu bestimmen, gelöst durch die $3n$ Differentialgleichungen 2. O.

$$(2) \quad m_i \xi_i'' = \frac{\partial}{\partial \xi_i} - \sum_{q=1}^{q=r} \lambda_q \frac{\partial \varphi_q}{\partial \xi_i}$$

in Verbindung mit den r Bedingungsgleichungen (1), oder diese Aufgabe ist (abgesehen event. von der verschiedenen Bestimmungsart der Integrationsconstanten) identisch mit dem Hamilton'schen Probleme:

II. Die $3n$ Coordinaten $\xi_1 \dots \xi_{3n}$, die durch die r gegebenen Bedingungsgleichungen (1) verbunden sind, so zu bestimmen, dass

$$\delta \int (T + U) dt = 0$$

werde.

Aus den Bedingungsgleichungen (1) folgt nun durch Differentiation nach der Zeit t :

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_x}{dt} &\equiv \sum_{i=1}^{i=3n} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \xi_i} \xi_i' \equiv \varphi_x' = 0, \\ \frac{d\varphi_x'}{dt} &\equiv \sum_{i=1}^{i=3n} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \xi_i} \xi_i'' + \sum_{i=1}^{i=3n} \xi_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \xi_i} = 0. \end{aligned}$$

Setzt man in den letzten Gleichungen für die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten ihre Werthe aus den Gleichungen (2) ein, so erhält man zur Bestimmung der Multiplicatoren λ die r linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} (3) \quad & \sum_{q=1}^{q=r} \lambda_q \sum_{i=1}^{i=3n} \frac{1}{m_i} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \xi_i} \frac{\partial \varphi_q}{\partial \xi_i} \\ &= \sum_{i=1}^{i=3n} \left(\frac{1}{m_i} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \xi_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_i} + \xi_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_x}{\partial \xi_i} \right). \end{aligned}$$

Es seien:

$$\lambda_1 = L_1, \dots, \lambda_r = L_r$$

ihre Auflösungen. Substituirt man dieselben in (2) und führt zugleich diese Differentialgleichungen 2. O. auf Differentialgleichungen 1. O. zurück, so verwandeln sich die Gleichungen (2) in die $6n$ Differentialgleichungen 1. O.

$$(4) \quad \frac{d\xi_i}{dt} = \xi_i', \quad m_i \frac{d\xi_i'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i} - \sum_{q=1}^{q=r} L_q \frac{\partial \varphi_q}{\partial \xi_i}$$

und in Folge der Bestimmungsart der L_q wird durch Substitution dieser Differentialgleichungen identisch

$$\frac{d\varphi_x'}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi_x}{dt} = \varphi_x'.$$

Die $6n$ Differentialgleichungen (4) besitzen daher die $2r$ bekannten Integrale

$$(5) \quad \varphi_x' = a_r, \quad \varphi_x - t \varphi_x' = b_r,$$

und wenn man durch die Gleichungen

$$(6) \quad F_h(t \xi_1 \cdots \xi_{3n} \xi_1' \cdots \xi_{3n}') = c_h, \quad h = 2r + 1, \dots, 6n$$

ihre $6n - 2r$ übrigen Integrale repräsentirt, so ist die vollständige Lösung des betrachteten dynamischen Problems enthalten in den $6n$ Gleichungen:

$$\varphi_x' = 0, \quad \varphi_x = 0, \quad F_h = c_h,$$

denen man noch zur Bestimmung der Multiplicatoren λ die r Gleichungen

$$\lambda_1 = L_1, \dots, \lambda_r = L_r$$

hinzufügen kann.

Dabei ist es ganz gleichgültig, ob die Gleichungen (6) wirkliche Integrale des Systems (4) sind, d. h. ob nach Ausführung der Substitutionen (4) jedes $\frac{dF_h}{dt}$ schon an sich Null ist, oder ob die Gleichungen $\frac{dF_h}{dt} = 0$ durch diese Substitutionen erst nach Zuziehung der Gleichungen $\varphi_x' = 0$, resp. der Gleichungen $\varphi_x' = 0$ und $\varphi_x = 0$ erfüllt werden.*) —

Nun weiss man aber, dass man das vorgelegte Problem auch noch auf folgende andere Art angreifen kann.

Man drückt aus den r gegebenen Bedingungsgleichungen (1) die $3n$ Coordinaten $\xi_1 \cdots \xi_{3n}$ durch

$$3n - r = \mu$$

neue unabhängige Variable $x_1 \cdots x_\mu$ aus und berechnet durch Substitution dieser, die Bedingungsgleichungen identisch erfüllenden Werthe der ξ und der daraus folgenden Werthe der Differentialquotienten ξ' die Summe $T + U$ als Function der x und x' . Das gegebene Problem verwandelt sich dann in die Aufgabe, die μ Variablen $x_1 \cdots x_\mu$ so zu bestimmen, dass

*) Bei der veränderten Behandlungsweise des Problems im folgenden Paragraphen können jedoch von diesen drei verschiedenen Arten von Integralen der dynamischen Differentialgleichungen nur die beiden ersten gebraucht werden. Um mich kurz ausdrücken zu können, will ich daher die Integrale der ersten Art *absolute*, die von der zweiten und dritten Art (nur durch die Gleichungen $\varphi_x' = 0$, resp. durch die Gleichungen $\varphi_x' = 0$ und $\varphi_x = 0$ zusammen) *bedingte* Integrale des Systems (4) nennen. Die Principe des Schwerpunkts und der Flächen hefern absolute Integrale, das Integral der lebendigen Kraft dagegen ist durch die Gleichungen $\varphi_x' = 0$ bedingt.

$$\delta f(T + U) dt = 0$$

werde.

Auf diesem zweiten Wege erhält man zur Lösung des Problems die $2\mu = 6n - 2r$ Differentialgleichungen 1. O.

$$(7) \quad \frac{dx_i}{dt} = x'_i, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'_i} = \frac{\partial(T+U)}{\partial x_i}.$$

Setzt man daher in den 2μ , von den bekannten Integralen (5) unabhängigen (absoluten oder bedingten) Integralen (6) der Differentialgleichungen (4) für die ξ und ξ' ihre Werthe in den x und x' ein, so müssen diese Integrale übergehen in die 2μ Integrale des Systems (7).

Die Differentialgleichungen (7) lassen sich aber weiter auf die kanonische Form bringen und zwar geschieht dies bekanntlich dadurch, dass man an Stelle der x' die μ Grössen

$$\frac{\partial T}{\partial x'_i} = p_i$$

als neue Variable einführt. Bezeichnet man durch H diejenige Function der x, p , die man erhält, wenn man mit Hülfe dieser Substitutionen die Differentialquotienten x' aus dem Ausdrucke

$$H = T - U$$

eliminiert, so geht hierdurch das System (4) über in das folgende:

$$(8) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Sind also

$$\xi_i = X_i(x_1 \dots x_\mu)$$

diejenigen $3n$ Substitutionen, durch welche man die gegebenen Bedingungsgleichungen (1) erfüllt hat, so müssen durch die $6n$ Substitutionen:

$$(9) \quad \xi_i = X_i, \quad \xi'_i = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} \frac{\partial X_i}{\partial x_\lambda} \frac{\partial H}{\partial p_\lambda}$$

die Integrale (6) der Gleichungen (4) sich verwandeln in die 2μ Integrale der kanonischen Differentialgleichungen (8).

Ist nun auch die Kräftefunction U frei von t , so gilt für die Bewegung unseres Systems das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft oder es ist $T - U = \text{const.}$ eines der Integrale (6). Die Gleichungen (8) besitzen dann also das Integral $H = \text{const.}$ und ihre vollständige Integration kommt nach der Jacobi-Hamilton'schen Theorie ihrerseits wieder zurück auf die Aufgabe, von der partiellen Differentialgleichung 1. O. mit μ unabhängigen Variabeln:

$$(10) \quad H = \text{const.}, \quad \left(p_i = \frac{\partial W}{\partial x_i} \right)$$

eine vollständige Lösung zu finden.

Gelten überdies die 3 Flächensätze, so kennen wir damit 3 weitere von den Integralen (6). Diese 3 Integrale sind ebenfalls frei von t . Durch die Substitutionen (9) ergeben sich daher aus den 3 Flächensätzen 3, von einander und von H unabhängige Lösungen der Charakteristik

$$(11) \quad (Hf) = 0.$$

Es sind also dann 4 unabhängige Lösungen $f = H, f_1, f_2, f_3$ dieser Charakteristik bekannt. Diese 4 Lösungen bilden entweder eine Gruppe, oder sie bilden keine Gruppe.

Im ersten Falle (und nach dem in der Einleitung erwähnten Satze von Jacobi tritt stets dieser erste Fall ein) enthält die viergliedrige Gruppe $H f_1 f_2 f_3$, da sie bereits eine ausgezeichnete Function, nämlich H , besitzt und die Differenz zwischen der Anzahl der Glieder und der Anzahl der ausgezeichneten Functionen einer Gruppe immer eine gerade Zahl ist, jedenfalls noch eine zweite ausgezeichnete Function. Im zweiten Falle dagegen müsste nach dem Poisson-Jacobi'schen Satze nothwendig wenigstens einer der 3 Ausdrücke $(f_2 f_3), (f_3 f_1), (f_1 f_2)$ eine neue Lösung der Charakteristik (11) sein.

Wenn wir daher selbstverständlicher Weise immer nur die ungünstigste Eventualität ins Auge fassen, so erhalten wir hier für die Zahlen s und m des Theorems I. im ersten Falle die Werthe $s = 4, m = 1$, im zweiten die Werthe $s = 5, m = 0$. Beide Male folgt $2\mu - 1 - s - m = 2\mu - 6$ und das Theorem liefert uns also den Satz:

III. *Das Problem, die Bewegung eines Systems materieller Punkte zu bestimmen, dessen geometrische Position nur von μ Grössen abhängt, verlangt, so oft die Bewegung dem Principe der Erhaltung der lebendigen Kraft und den 3 Flächensätzen folgt, jedenfalls nur noch die Operationen:*

$$2\mu - 6, \quad 2\mu - 8, \quad \dots, \quad 6, \quad 4, \quad 2.$$

Für $\mu = 3$ verwandelt sich derselbe in den bekannten Satz von Jacobi *) aus dem sich die Lösbarkeit der Probleme der Centralbewegung und der Rotation eines starren Körpers ohne Kräfte um einen festen Punkt a priori ergibt. —

Enthalten die Bedingungsgleichungen des Systems nur die gegenseitigen Entfernungen und wirken auf das System nur die gegenseitigen Anziehungen seiner Punkte, zu denen jedoch als äussere Kraft auch noch die Schwere hinzutreten kann, so reducirt sich die Bestimmung

*) Borchardt's J. 60, p. 149.

der absoluten Bewegung des Systems auf die Bestimmung seiner relativen Bewegung ohne Schwere um den Schwerpunkt, oder es kommt dann nur darauf an, die Differentialgleichungen (2) unter den Voraussetzungen:

$$(12) \quad \sum_{h=1}^{h=n} m_h \xi_h = 0, \quad \sum_{h=1}^{h=n} m_h \xi_{n+h} = 0, \quad \sum_{h=1}^{h=n} m_h \xi_{2n+h} = 0$$

zu integrieren. Diese Aufgabe lässt sich aber auch so fassen:

IV. Man soll die $3n$ Coordinaten $\xi_1 \dots \xi_{3n}$, denen ausser den Gleichungen (1) noch die 3 neuen Bedingungsgleichungen (12) vorge-schrieben sind, so bestimmen, dass $\delta \int (T + U) dt$ verschwinde, wobei $U, \varphi_1, \dots, \varphi_r$ blosse Functionen der gegenseitigen Entfernungen der Punkte sind.

In der That, die Differentialgleichungen des Problems IV. werden allerdings zunächst, wenn man die, den Bedingungsgleichungen (12) entsprechenden Multiplicatoren durch λ, μ, ν bezeichnet:

$$(13) \quad m_h \xi_h'' = \frac{\partial U}{\partial \xi_h} - \sum_{q=1}^{q=r} \lambda_q \frac{\partial \varphi_q}{\partial \xi_h} - \lambda m_h, \dots$$

Bei den gemachten Annahmen genügen aber $U, \varphi_1, \dots, \varphi_r$ u. A. den 3 Charakteristiken:

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_h} = 0, \dots$$

Macht man daher in den aus (12) durch Differentiation entstehenden Bedingungen:

$$\sum_{h=1}^{h=n} m_h \xi_h'' = 0, \dots$$

die Substitutionen (13), so ergibt sich:

$$\lambda = 0, \dots$$

Also fallen die Differentialgleichungen (13) mit den Gleichungen (8) zusammen.

Indem man nun den r Gleichungen (1) die 3 Gleichungen (12) als neue Bedingungsgleichungen hinzufügt, geht r in $r+3$, also $\mu=3n-r$ in $\mu-3$ über. Es gelten überdies (weil eben die Multiplicatoren λ, μ, ν Null werden) auch für das Problem IV. die 3 Flächenintegrale. Also erhält man noch den Satz:

V. Wenn auf ein System materieller Punkte, dessen geometrische Position nur von μ Grössen abhängt und welches sich wie ein freier starrer Körper zu bewegen vermag, nur innere Anziehungen wirken, so sind — und zwar auch dann noch, wenn zu diesen inneren Kräften

als äussere Kraft die Schwere hinzutritt — zur vollständigen Bestimmung der Bewegung jedenfalls nur noch erforderlich die Operationen:

$$2\mu - 12, 2\mu - 14, \dots, 6, 4, 2.$$

Die Annahme $\mu = 6$, oder $r = 3n - 6$ entspricht einem starren Systeme. Der Satz zeigt also a priori, dass sich die Bewegung eines freien starren Körpers, auf den nur die Schwere wirkt, vermöge blosser Quadraturen bestimmen lässt. *)

§ 3.

Die vorhergehenden Betrachtungen lassen (wenn man eben den Jacobi'schen Satz über die Flächenintegrale nicht benutzen will) die Frage offen, ob unter Umständen nicht noch eine grössere Reduction durch die allgemeinen Principe erreicht werden könne. Man kann aber die Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems von n materiellen Punkten, das den r Bedingungsgleichungen (1) unterworfen ist und unter dem Einflusse einer Kräftefunction U steht, noch in einer anderen Weise auf die kanonische Form bringen und bei dieser zweiten Methode, welche die Einführung unabhängiger Bestimmungsstücke des Systems ganz umgeht, bleibt es nicht mehr fraglich, wie sich in Bezug auf Gruppenbildung die Flächensätze verhalten, weil man hier die Ausdrücke dieser Integrale in den kanonischen Variablen wirklich aufstellen kann.

Da es nämlich offenbar frei stehen muss, die Coordinaten ξ zunächst nur den derivirten Bedingungsgleichungen:

$$(14) \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \dots \frac{d\varphi_r}{dt} = 0$$

zu unterwerfen, so kann man das ursprüngliche Problem II. auch ersetzen durch das folgende:

*) Nach dem Jacobi'schen Satze über die Flächenintegrale bilden die vier Lösungen H, f_1, f_2, f_3 der Charakteristik (11) stets eine Gruppe, die kein Involutionssystem ist und also ausser H nur noch eine einzige ausgezeichnete Function besitzt. Benutzt man dies, so folgt zunächst, dass man in III. und V. das Wort „jedenfalls“ durch „höchstens“ ersetzen kann, und man erkennt weiter durch dieselbe Schlussweise, die uns zu dem Satze III. führte, dass zur vollständigen Lösung eines dynamischen Problems, welches die Voraussetzungen des Satzes V. erfüllt, sicher nur noch die Operationen

$$2\mu - 14, \dots, 6, 4, 2$$

nöthig sein würden, so oft von dem Probleme ausser den 10 allgemeinen Integralen noch ein neues 11^{tes} bekannt wäre. Gelänge es also z. B. im Problem der drei Körper ein neues Integral zu entdecken, so würde die vollständige Lösung dieses Problems jedenfalls nur noch von den Operationen 4, 2 abhängen.

VI. Die $3n$ Coordinaten ξ_1, \dots, ξ_{3n} , denen nur die r Bedingungsdifferentialgleichungen (14) vorgeschrieben sind, so zu bestimmen, dass $\delta \int (T + U) dt = 0$ werde,

und hat dann nur hinterher die Lösungen dieses Problems den Bedingungen (1) selbst zu unterwerfen.

In der That setzt man:

$$\Omega = T + U + \sum_{\varrho=1}^{e=r} \mu_{\varrho} \frac{d\varphi_{\varrho}}{dt},$$

so werden die Differentialgleichungen des Problems VI.:

$$(15) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i'} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i}.$$

Wegen:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i'} \frac{d\varphi_{\varrho}}{dt} = \frac{\partial \varphi_{\varrho}}{\partial \xi_i}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{d\varphi_{\varrho}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_{\varrho}}{\partial \xi_i}$$

stellen sich aber diese Gleichungen entwickelt also dar:

$$m_i \xi_i'' + \frac{d}{dt} \sum_{\varrho=1}^{e=r} \mu_{\varrho} \frac{\partial \varphi_{\varrho}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i} + \sum_{\varrho=1}^{e=r} \mu_{\varrho} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_{\varrho}}{\partial \xi_i}$$

und reduciren sich folglich auf:

$$m_i \xi_i'' = \frac{\partial U}{\partial \xi_i} - \sum_{\varrho=1}^{e=r} \frac{d\mu_{\varrho}}{dt} \frac{\partial \varphi_{\varrho}}{\partial \xi_i}.$$

Die Differentialgleichungen (15) fallen daher mit den Gleichungen (2) zusammen, sobald man

$$\frac{d\mu_{\varrho}}{dt} = \lambda_{\varrho}$$

setzt. Behalten wir die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen bei, so sind somit die vollständigen Lösungen des Problems VI. enthalten in den $6n + r$ Gleichungen:

$$(16) \quad \varphi_{\kappa}' = 0, \quad \varphi_{\kappa} = b_{\kappa}, \quad F_h = c_h, \quad \mu_{\varrho} = \int L_{\varrho} dt + \gamma_{\varrho},$$

wobei es gleichgültig ist, ob die Gleichungen $F_h = c_h$ absolute oder bloss durch die Gleichungen $\varphi_{\kappa}' = 0$ bedingte Integrale des Systems (4) sind. (Sie dürfen nur nicht erst in Folge der Gleichungen $\varphi_{\kappa} = 0$ selbst Integrale dieses Systems werden.)

Setzt man nun aber:

$$(17) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i'} - m_i \xi_i' + \sum_{\varrho=1}^{e=r} \mu_{\varrho} \frac{\partial \varphi_{\varrho}}{\partial \xi_i} = v_i$$

und verbindet diese $3n$ Substitutionen mit den Gleichungen:

$$\frac{d\varphi_{\kappa}}{dt} \equiv \sum_{i=1}^{i=3n} \frac{\partial \varphi_{\kappa}}{\partial \xi_i} \xi_i' = 0,$$

so erhält man:

$$(18) \quad \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \mu_{\varrho} \sum_{i=1}^{i=3n} \frac{1}{m_i} \frac{\partial \varphi_{\kappa}}{\partial \xi_i} \frac{\partial \varphi_{\varrho}}{\partial \xi_i} = \sum_{i=1}^{i=3n} \frac{\partial \varphi_{\kappa}}{\partial \xi_i} \frac{v_i}{m_i}.$$

Hat man aus diesen r linearen Gleichungen $\mu_1 \dots \mu_r$ bestimmt als Functionen von $\xi_1 \dots \xi_{3n} v_1 \dots v_{3n}$, so liefern hierauf die $3n$ Gleichungen (17) unmittelbar $\xi_1' \dots \xi_{3n}'$ als Functionen derselben Grössen.

Ich bezeichne durch

$$(19) \quad \mu_{\varrho} = [\mu_{\varrho}], \quad \xi_i' = [\xi_i']$$

diese Auflösungen der Gleichungen (14) und (17) und allgemein durch Einschliessung in eckige Klammer die Ausführung der Substitutionen (19).

Setzt man dann:

$$(20) \quad \Phi = \left[\sum_{i=1}^{i=3n} v_i \xi_i' - \Omega \right] \equiv \left[\sum_{i=1}^{i=3n} v_i \xi_i' - T - U \right],$$

so folgt durch Variation der ξ und v :

$$\begin{aligned} \delta \Phi &= \sum_{i=1}^{i=3n} \left\{ v_i \delta [\xi_i'] + [\xi_i'] \delta v_i - \left[\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i} \right] \delta \xi_i - \left[\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i'} \right] \delta [\xi_i'] \right\} \\ &\quad - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \left[\frac{d\varphi_{\varrho}}{dt} \right] \delta [\mu_{\varrho}], \end{aligned}$$

oder nach (17) und (14):

$$\delta \Phi = \sum_{i=1}^{i=3n} \left\{ [\xi_i'] \delta v_i - \left[\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i} \right] \delta \xi_i \right\}.$$

Durch die Substitutionen (19) wird somit das System der Differentialgleichungen (14) und (15) übergeführt in das kanonische System:

$$(21) \quad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_i}, \quad \frac{dv_i}{dt} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i}.$$

Die $6n$ Differentialgleichungen (21) besitzen hiernach zunächst die r bekannten und (nach Voraussetzung) von t freien Integrale

$$\varphi_1 = b_1, \dots, \varphi_r = b_r.$$

$6n - 2r$ andere Integrale derselben gehen aus den Gleichungen $F_h = c_h$ durch die Substitutionen:

$$(22) \quad \xi_i' = \frac{1}{m_i} \left(v_i - \sum_{q=1}^{q=r} [\mu_q] \frac{\partial \varphi_q}{\partial \xi_i} \right)$$

hervor. Die fehlenden r Integralgleichungen endlich werden durch die Gleichungen

$$(23) \quad [\mu_q] = \int L_q dt + \gamma_q$$

vertreten (wo selbstverständlich in den L_q die Werthe der ξ und ξ' , aus den $6n$ ersten Gleichungen (16) als Functionen von t und von den Integrationsconstanten berechnet, einzusetzen wären).

Die Differentialgleichungen (21) sind aber selbst wieder, wenn wir wie früher auch U frei von t annehmen, äquivalent der partiellen Differentialgleichung 1. O. mit $3n$ unabhängigen Variablen:

$$(24) \quad \Phi = \text{const.}, \quad \left(v_i = \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right), *)$$

und von der Charakteristik dieser Gleichung:

$$(25) \quad (\Phi f) \equiv \sum_{i=1}^{i=3n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \right) = 0$$

kennen wir ausser Φ bereits r unabhängige Lösungen, nämlich $\varphi_1 \cdot \cdot \cdot \varphi_r$, die als blosse Functionen der ξ auch untereinander in Involution liegen. Die Zahlen μ, s, m des Theorems I. erhalten also hier, falls keine weiteren Integrale bekannt sind, die Werthe

$$3n, \quad r+1, \quad r$$

und die vollständige Integration der Differentialgleichungen (21) verlangt daher jedenfalls nur noch die Operationen:

$$6n - 2r - 2, \quad 6n - 2r - 4, \quad \dots 6, \quad 4, \quad 2.$$

*) Nach (20) ist

$$\Phi = \left[\sum_{i=1}^{i=3n} \xi_i' \left(v_i - \sum_{q=1}^{q=r} \mu_q \frac{\partial \varphi_q}{\partial \xi_i} - \frac{1}{2} m_i \xi_i' \right) \right] - U,$$

nach (22) folgt also:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{i=3n} \frac{1}{2m_i} \left(v_i - \sum_{q=1}^{q=r} [\mu_q] \frac{\partial \varphi_q}{\partial \xi_i} \right)^2 - U.$$

Die partielle Differentialgleichung (24) stimmt also mit der überein, zu welcher Jacobi in p. 379 seiner Vorlesungen über Dynamik gelangt.

Nehmen wir nun aber an, dass $U, \varphi_1, \dots, \varphi_r$ Lösungen der drei Charakteristiken seien:

$$(26) \quad \sum_{h=1}^{h=n} \left(\xi_{n+h} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_{2n+h}} - \xi_{2n+h} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_{n+h}} \right) = 0, \dots$$

Für die Bewegung des Systems gelten dann die 3 Flächensätze:

$$f_1 \equiv \sum_{h=1}^{h=n} m_h (\xi_{n+h} \xi'_{2n+h} - \xi_{2n+h} \xi'_{n+h}) = \text{const.}, \dots$$

Durch die Substitutionen (22) gehen daraus die 3 neuen Lösungen der Charakteristik (25) hervor:

$$f_1 = \sum_{h=1}^{h=n} (\xi_{n+h} v_{2n+h} - \xi_{2n+h} v_{n+h}) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} [\mu_{\varrho}] \sum_{h=1}^{h=n} \left(\xi_{n+h} \frac{\partial \varphi_{\varrho}}{\partial \xi_{2n+h}} - \xi_{2n+h} \frac{\partial \varphi_{\varrho}}{\partial \xi_{n+h}} \right), \dots$$

und diese reduciren sich nach (26) auf

$$f_1 = \sum_{h=1}^{h=n} (\xi_{n+h} v_{2n+h} - \xi_{2n+h} v_{n+h}), \dots$$

Sie liegen auch mit $\varphi_1 \dots \varphi_r$ in Involution.*) Denn man hat

$$(\varphi_{\varrho} f_1) = \sum_{h=1}^{h=n} \left(-\frac{\partial \varphi_{\varrho}}{\partial \xi_{n+h}} \xi_{2n+h} + \frac{\partial \varphi_{\varrho}}{\partial \xi_{2n+h}} \xi_{n+h} \right).$$

Endlich ist:

$$(f_2 f_3) = f_1, \quad (f_3 f_1) = f_2, \quad (f_1 f_2) = f_3.$$

Von der Charakteristik (25) sind also jetzt bekannt $r+4$ Lösungen

$$f = \Phi, \varphi_1, \dots, \varphi_r, f_1, f_2, f_3,$$

die eine Gruppe bilden. Diese Gruppe besitzt die $r+1$ ausgezeichneten Functionen $\Phi, \varphi_1, \dots, \varphi_r$; sie muss also nothwendig noch eine ausgezeichnete Function enthalten und sie kann deren auch nicht mehr enthalten, weil sie kein Involutionssystem ist. Die Zahlen μ, s, m haben also nunmehr die Werthe:

$$3n, \quad r+4, \quad r+1$$

angenommen und nach I. erfordert daher, übereinstimmend mit dem

*) Das Gleiche gilt überhaupt von allen denjenigen Integralen, die, unabhängig von den Werthen der λ , absolute oder nur durch die Gleichungen $\varphi'_x = 0$ bedingte Integrale des Systems (2) sind.

Satze III., die vollständige Lösung des Problems *höchstens* nur noch die Operationen:

$$6n - 2r - 6, \quad 6n - 2r - 8, \quad \dots, \quad 6, \quad 4, \quad 2. \quad -$$

Betrachten wir endlich den Fall, auf den sich der Satz V. bezieht, so reducirt sich hier die Aufgabe, die absolute Bewegung des Systems zu bestimmen, auf die Bestimmung seiner relativen Bewegung ohne Schwere um den Schwerpunkt, oder nach dem Vorhergehenden, wenn wir wieder die endlichen Bedingungsgleichungen durch ihre ersten Ableitungen ersetzen, auf das Problem:

VII. Die $3n$ Coordinaten $\xi_1 \dots \xi_{3n}$, denen neben den r Gleichungen (14) noch die 3 Bedingungsdifferentialgleichungen:

$$(27) \quad \frac{d\psi_1}{dt} = \sum_{h=1}^{h=n} m_h \xi'_h = 0, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = \sum_{h=1}^{h=n} m_h \xi'_{2n+h} = 0, \\ \frac{d\psi_3}{dt} = \sum_{h=1}^{h=n} m_h \xi'_{2n+h} = 0$$

vorgeschrieben sind, so zu bestimmen, dass $\delta f(T+U)dt = 0$ werde, wo $U, \varphi_1, \dots, \varphi_r$ blosse Functionen der gegenseitigen Entfernungen oder gleichzeitige Lösungen der 3 Charakteristiken (26) und der 3 Charakteristiken sind:

$$(28) \quad \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_h} = 0, \quad \dots$$

An die Stelle von Ω tritt nunmehr der Ausdruck:

$$\Omega_1 = T + U + l_1 \frac{d\psi_1}{dt} + l_2 \frac{d\psi_2}{dt} + l_3 \frac{d\psi_3}{dt} + \sum_{q=1}^{q=r} \mu_q \frac{d\varphi_q}{dt}$$

und man erhält zur Lösung des Problems die Differentialgleichungen

$$(29) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \xi'_i} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial \xi_i}.$$

Diese fallen aber (wie schon unmittelbar aus der Uebereinstimmung der Differentialgleichungen in den Problemen VI. und II., sowie in den Problemen IV. und II. folgt) mit den Gleichungen (15) zusammen, indem:

$$(30) \quad \frac{dl_1}{dt} = \frac{dl_2}{dt} = \frac{dl_3}{dt} = 0$$

wird. Dagegen ändern sich die Substitutionen (17) und werden jetzt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega_1}{\partial \xi'_h} &\equiv m_h \xi'_h + m_h l_1 + \sum_{q=1}^{q=r} \mu_q \frac{\partial \varphi_q}{\partial \xi_h} = v_h, \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial \xi'_{n+h}} &\equiv m_h \xi'_{n+h} + m_h l_2 + \sum_{q=1}^{q=r} \mu_q \frac{\partial \varphi_q}{\partial \xi_{n+h}} = v_{n+h}, \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial \xi'_{2n+h}} &\equiv m_h \xi'_{2n+h} + m_h l_3 + \sum_{q=1}^{q=r} \mu_q \frac{\partial \varphi_q}{\partial \xi_{2n+h}} = v_{2n+h},\end{aligned}$$

wo $h \leq n$. Sie ergeben, in die Bedingungsgleichungen (27) eingeführt, unter Berücksichtigung von (28):

$$(31) \quad l_1 = \frac{1}{M} \sum_{h=1}^{h=n} v_h, \quad l_2 = \frac{1}{M} \sum_{h=1}^{h=n} v_{n+h}, \quad l_3 = \frac{1}{M} \sum_{h=1}^{h=n} v_{2n+h},$$

wo $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ ist, während sich aus ihnen und den Bedingungsgleichungen (14), wiederum wegen (28), die alten Gleichungen (18) für die Multiplicatoren μ_q ergeben.

An Stelle der Substitutionen (19) erhalten wir daher jetzt zur Reduction des Problems auf die kanonische Form die Gleichungen (31) und:

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu_q &= [\mu_q], \\ \xi'_h &= \frac{1}{m_h} \left(v_h - \sum_{q=1}^{q=r} [\mu_q] \frac{\partial \varphi_q}{\partial \xi_h} \right) - \frac{1}{M} \sum_{x=1}^{x=n} v_x, \\ \xi'_{n+h} &= \frac{1}{m_h} \left(v_{n+h} - \sum_{q=1}^{q=r} [\mu_q] \frac{\partial \varphi_q}{\partial \xi_{n+h}} \right) - \frac{1}{M} \sum_{x=1}^{x=n} v_{n+x}, \\ \xi'_{2n+h} &= \frac{1}{m_h} \left(v_{2n+h} - \sum_{q=1}^{q=r} [\mu_q] \frac{\partial \varphi_q}{\partial \xi_{2n+h}} \right) - \frac{1}{M} \sum_{x=1}^{x=n} v_{2n+x}. \end{aligned} \right.$$

Diese Substitutionen erfüllen die Bedingungsgleichungen (14) und (27) identisch und bringen die Differentialgleichungen (29) auf die kanonische Form:

$$(33) \quad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial v_i}, \quad \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi_i},$$

worin Φ_1 diejenige Function der ξv bedeutet, die aus:

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^{i=3n} v_i \xi'_i - T - U$$

durch die Substitutionen (32) hervorgeht.

Hiermit ist das Problem VII. zurückgeführt auf die Aufgabe, von der partiellen Differentialgleichung 1. O. mit $3n$ unabhängigen Variablen:

$$\Phi_1 = \text{const.}, \quad \left(v_i = \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right)$$

eine vollständige Lösung zu finden.

Von der Charakteristik dieser Gleichung

$$(34) \quad (\Phi_1 f) = 0$$

kennt man nun bereits die $r+4$ Lösungen $f = \Phi_1, \varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi_1, \psi_2, \psi_3$, die mit einander in Involution liegen. Aus den 3 Flächensätzen

$$f_1 = \sum_{h=1}^{h=n} m_h (\xi_{n+h} \xi'_{2n+h} - \xi_{2n+h} \xi'_{n+h}) = \text{const.}, \dots$$

ergeben sich weiter durch die Substitutionen (32) 3 neue Lösungen dieser Charakteristik, die sich wegen (26) auf:

$$(35) \quad \begin{cases} f_1 = \sum_{h=1}^{h=n} (\xi_{n+h} v_{2n+h} - \xi_{2n+h} v_{n+h}) - \frac{1}{M} \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{x=1}^{x=n} m_h (\xi_{n+h} v_{2n+x} - \xi_{2n+h} v_{n+x}), \\ f_2 = \sum_{h=1}^{h=n} (\xi_{2n+h} v_h - \xi_h v_{2n+h}) - \frac{1}{M} \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{x=1}^{x=n} m_h (\xi_{2n+h} v_x - \xi_h v_{2n+x}), \\ f_3 = \sum_{h=1}^{h=n} (\xi_h v_{n+h} - \xi_{n+h} v_h) - \frac{1}{M} \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{x=1}^{x=n} m_h (\xi_h v_{n+x} - \xi_{n+h} v_x) \end{cases}$$

reduciren. Diese neuen Lösungen liegen sowohl mit $\varphi_1, \dots, \varphi_r$, wie mit ψ_1, ψ_2, ψ_3 in Involution. Denn für λ und $x = 1, 2, 3$ wird nach (26) und (28)

$$(\varphi_\lambda f_x) = 0,$$

während schon an und für sich

$$(\psi_\lambda f_x) = 0$$

ist. Endlich ergibt sich auch aus (35) wieder:

$$(f_2 f_3) = f_1, \quad (f_3 f_1) = f_2, \quad (f_1 f_2) = f_3.$$

Man kennt also von der Charakteristik (34) $r+7$ Lösungen:

$$f = \Phi_1, \varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi_1, \psi_2, \psi_3, f_1, f_2, f_3,$$

die eine Gruppe bilden. Diese Gruppe besitzt bereits die $r+4$ ausgezeichneten Functionen $\Phi_1, \varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi_1, \psi_2, \psi_3$; sie enthält also nothwendig ausserdem noch eine und auch nur eine ausgezeichnete Function. Es liegt also jetzt derjenige Fall des Theorems I. vor, in welchem die Zahlen μ, s, m resp. die Werthe

$$3n, \quad r+7, \quad r+4$$

erhalten haben, und wir sehen, in Uebereinstimmung mit V., dass die vollständige Lösung des Problems VII. *höchstens* nur noch die Operationen

$$6n - 2r - 12, \quad 6n - 2r - 14, \quad \dots, \quad 6, \quad 4, \quad 2$$

erfordert.

Indessen sind hierbei 3 Lösungen der Charakteristik (34) ganz ausser Acht gelassen worden, nämlich die 3:

$$\chi_1 = \sum_{h=1}^{h=n} v_h, \quad \chi_2 = \sum_{h=1}^{h=n} v_{n+h}, \quad \chi_3 = \sum_{h=1}^{h=n} v_{2n+h},$$

die sich in Folge von (30) aus den Formeln (31) ergeben.*) Es scheint daher auf den ersten Anblick, als ob im Problem VII. noch eine weitere Reduction möglich sei. Fügen wir, um dies zu untersuchen, den früheren Lösungen der Charakteristik (34) die 3 neuen Lösungen hinzu, so erhalten wir im Ganzen $r+10$ Lösungen dieser Charakteristik, nämlich:

$$f = \Phi_1, \varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi_1, \psi_2, \psi_3, f_1, f_2, f_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3.$$

Nun ist, wenn λ und κ irgend zwei verschiedene der Zahlen 1, 2, 3 bezeichnen:

$$(\psi_\lambda \chi_\kappa) = 0, \quad (\psi_\lambda \chi_\lambda) = M,$$

$$(\chi_\lambda f_\kappa) = 0, \quad (\chi_\lambda f_\lambda) = 0,$$

und nach (28) hat man auch

$$(\varphi_\varrho \chi_\kappa) = 0.$$

Unsere $r+10$ Lösungen bilden also wiederum eine Gruppe, in der

*) Die Integrale $l_i = \text{const.}$, ... gehören zu derjenigen Gattung von Integralgleichungen des Problems VII., die beim Problem VI. durch die Gleichungen (23) repräsentirt wurden. —

Da bei Einführung der Lösungen ψ und χ die Doppelsummen in den Formeln (35) sich so ausdrücken:

$$- \frac{1}{M} (\psi_2 \chi_3 - \psi_3 \chi_2), \dots,$$

so sieht man, dass man den Lösungen (35) auch die einfacheren

$$(35') \quad f_1 = \sum_{h=1}^{h=n} (\xi_{n+h} v_{2n+h} - \xi_{2n+h} v_{n+h}), \dots$$

substituieren kann. Es ist aber bemerkenswerth, dass die direct aus den Flächensätzen gezogenen Lösungen (35) trotz ihrer complicirteren Form für die Reduction des Problems weit werthvoller sind als die Lösungen (35'); denn sie liegen mit den ψ und χ in Involution, was jene nicht thun.

$\Phi_1, \varphi_1, \dots \varphi_r$ ausgezeichnete Functionen sind. Die $r + 10$ Charakteristiken, denen jede ausgezeichnete Function dieser Gruppe genügen muss, reduciren sich, indem die übrigen als Identitäten wegfallen, auf die folgenden 9:

$$(\psi_1 U) \equiv M \frac{\partial U}{\partial \chi_1} = 0, (\psi_2 U) \equiv M \frac{\partial U}{\partial \chi_2} = 0, (\psi_3 U) \equiv M \frac{\partial U}{\partial \chi_3} = 0,$$

$$(\chi_1 U) \equiv -M \frac{\partial U}{\partial \psi_1} = 0, (\chi_2 U) \equiv -M \frac{\partial U}{\partial \psi_2} = 0, (\chi_3 U) \equiv -M \frac{\partial U}{\partial \psi_3} = 0,$$

$$(f_1 U) \equiv f_3 \frac{\partial U}{\partial f_2} - f_2 \frac{\partial U}{\partial f_3} = 0,$$

$$(f_2 U) \equiv -f_3 \frac{\partial U}{\partial f_1} + f_1 \frac{\partial U}{\partial f_3} = 0,$$

$$(f_3 U) \equiv f_2 \frac{\partial U}{\partial f_1} - f_1 \frac{\partial U}{\partial f_2} = 0,$$

und von diesen sind die 8 ersten von einander unabhängig, während die 9^{te} eine blosser Folge der 7^{ten} und 8^{ten} ist. Die Anzahl der ausgezeichneten Functionen der Gruppe ist folglich $r + 10 - 8 = r + 2$ oder die Gruppe besitzt ausser $\Phi_1, \varphi_1, \dots \varphi_r$ nur noch eine ausgezeichnete Function (die Function $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$). Wir erhalten somit für die Zahlen μ, s, m im Theoreme I. jetzt die Werthe

$$3n, \quad r + 10, \quad r + 1$$

und kommen also wieder auf die Operationen:

$$6n - 2r - 12, \dots, 4, 2$$

zurück. Die 3 Lösungen χ_1, χ_2, χ_3 sind demnach insofern überflüssig, als ihre Hinzunahme keine weitere Reduction des Problems bewirkt. --

Ich habe im Vorhergehenden die zweite der beiden, zur Transformation der Differentialgleichungen der unfreien Bewegung auf die kanonische Form benutzten Methoden nur in derjenigen speciellen Gestalt auseinandergesetzt, in welcher sie mir für den vorliegenden Zweck am bequemsten erschien (und es interessirte mich namentlich das bei der letzten Anwendung gewonnene Beispiel für die ganz verschiedene Werthigkeit der einen Integrale gegen die andern). Da die Methode sich aber unmittelbar aus der allgemeinen Regel ergibt, die Clebsch zur Behandlung derjenigen Probleme der Variationsrechnung gegeben hat, in denen Bedingungs-differentialgleichungen auftreten, so erhält ohne Weiteres, dass man sie überhaupt anwenden kann auf jedes Problem der Variationsrechnung mit endlichen Bedingungs-gleichungen, und ebenso, dass man in der Dynamik die beiden Methoden in der Art mit einander verbinden kann, dass man nur einen Theil der vor-

geschriebenen Bedingungsgleichungen identisch erfüllt und die übrigen durch ihre ersten Ableitungen ersetzt. Beim Problem der Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt z. B. könnte man, nachdem man wie üblich Alles auf die Hauptträgheitsachsen bezogen hat, die 9 Richtungscosinus derselben gegen die unbeweglichen Axen nun als Grundvariable beibehalten und ihnen die ersten Ableitungen der 6 endlichen Gleichungen, durch die sie verbunden sind, als Bedingungsdifferentialgleichungen vorschreiben, wodurch die Symmetrie vollständig gewahrt würde. Wegen der complicirten Ausdrücke, die man im Allgemeinen bei der Auflösung der linearen Gleichungen für die Multiplicatoren erhält, dürfte jedoch für specielle Probleme von der Methode kaum ein wesentlicher Vortheil zu erwarten sein.
