

SOLUTION DU PROBLÈME DE MALFATTI;

par M. Ernest Lebon,

prof. au Lycée Charlemagne, à Paris,

rédacteur du *Bulletin scientifique*.

Adunanza del 24 febbrajo 1889.

HISTORIQUE.

1. Le problème consistant à *inscrire à un triangle donné trois cercles, tels que chacun d'eux soit tangent aux deux autres et à deux côtés du triangle*, est désigné sous le nom de PROBLÈME DE MALFATTI, parce que cet illustre géomètre italien (mort en 1807) a, le premier, donné la construction des trois cercles dans son *Memoria sopra un problema stereotomico*, inséré dans les *Memorie di matematica e di fisica della Società Italiana delle Scienze*, tomo X, parte I, Modena, MDCCCIII.

Ce remarquable problème a ensuite attiré l'attention de plusieurs géomètres distingués; mais aucun n'a donné de construction aussi simple que celle que propose Malfatti. Celle-ci dérive immédiatement des formules qu'il a trouvées et qui donnent les valeurs de trois segments des côtés, chaque segment étant compris entre un sommet et le point de contact avec le cercle tangent aux deux côtés issus de ce sommet. Ces formules, qui sont, aux notations près, celles auxquelles nous arrivons par une analyse algébrique directe, ont été *posées a priori* par

Malfatti, et ensuite *vérifiées* par lui avec les équations du problème. Le seul regret qu'il y ait à exprimer est que ce géomètre ait préféré montrer que les valeurs qui entrent dans ces formules vérifient les équations du problème, plutôt que d'expliquer comment il avait trouvé ces valeurs. Nous pensons que c'est pour cette raison que de très estimables recueils de problèmes ont préféré présenter la construction de Steiner, bien qu'elle soit longue et graphiquement peu exacte. (On trouvera cette construction dans les *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, par Catalan, 2^e éd. 1879). Notre solution directe et élémentaire décidera, nous l'espérons, à faire adopter des formules dont l'expression est d'une simplicité extrême et dont la construction est d'une facilité et d'une exactitude graphiques très remarquables.

2. Signalons les principaux écrits qui ont été suggérés par le Mémoire de Malfatti.

Gergonne, dans ses *Annales*, tome I, 1810-1811, arrive à une valeur très compliquée du rayon de chacun des cercles cherchés, et avoue qu'il ne peut parvenir à en déduire les formules de Malfatti. Dans le tome II, 1811-1812, Gergonne annonce qu'il a reçu la traduction du travail de Malfatti; il est regrettable qu'il n'ait pas cru utile de la publier, car la vérification de Malfatti est plus courte que celle que Gergonne propose pour la remplacer. Dans le tome X, 1819, Lehmütz donne une solution trigonométrique directe du problème de Malfatti; mais, comme le fait remarquer Simons, « la longueur excessive des calculs ne permet pas d'y retrouver un plan d'ensemble ». D'ailleurs, Lehmütz, s'étant attaché à obtenir les expressions des rayons des trois cercles, arrive à des formules moins simples que celles de Malfatti et d'une construction pénible.

Dans le tome I, 1826, du *Journal de Crelle*, Steiner donne une construction compliquée du problème de Malfatti; dans le tome X, 1833, Zornow démontre cette construction. Dans le tome XLV, 1853, Schellbach publie une nouvelle vérification des formules de Malfatti. Dans le tome LXXVI, 1873, Mertens montre que ces formules sont applicables au cas du triangle sphérique.

Un géomètre français, qui s'est signalé par de remarquables travaux sur un grand nombre de questions importantes, Catalan, a eu

Rend. Circ. Matem., t. III, parte 1^a.—Stampato il 10 maggio 1889. 16.

le bonheur de réduire notablement la solution de *Lechmütz* ; son travail est inséré dans le tome V, 1845, des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Simons, dans le *Bulletin de l'Académie de Belgique*, 1874, analyse les principaux travaux relatifs au problème de *Malfatti*, et donne les résultats auxquels lui-même est parvenu. Mais il attribue à *Malfatti* des formules faisant connaître les rayons des trois cercles cherchés : c'est là une erreur qu'il importe de relever, parce qu'elle enlève à *Malfatti* l'honneur d'avoir trouvé les formules les plus simples.

Enfin, *Pelletreau*, dans le *Compte rendu de la session de 1888 de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences*, démontre, par la géométrie analytique, que l'on peut obtenir les rayons de trois cercles tangents deux à deux et tangents chacun à deux côtés d'un triangle semblable au triangle proposé, en déterminant d'abord deux droites par la construction de rapports de lignes trigonométriques et de troisièmes proportionnelles.

RÉSOLUTION DIRECTE DU PROBLÈME DE MALFATTI.

3. Supposons le problème résolu.

Soient (*figure*) :

ABC un triangle donné,

A', B', C' les centres des cercles cherchés,

D et E , F et G , H et I les points de contact des cercles A', B', C' avec les côtés du triangle ;

O le centre du cercle inscrit au triangle ;

P, Q, R les points de contact de ce cercle et des côtés BC, CA, AB .

Appelons :

a, b, c les côtés du triangle opposés aux angles A, B, C ;

p le demi-périmètre du triangle ;

α, β, γ les trois segments AD ou AE, BF ou BG, CH ou CI ;

α', β', γ' les rayons des cercles A', B', C' inscrits aux angles A, B, C .

La figure donne immédiatement les trois égalités suivantes :

$$(M) \quad \begin{cases} a = \beta + \gamma + GH, \\ b = \gamma + \alpha + ID, \\ c = \alpha + \beta + EF. \end{cases}$$

Pour calculer GH , menons à BC la parallèle $C'J$ coupant $B'G$ en J . Le triangle rectangle $B'JC'$ donne

$$\overline{C'J}^2 = (\beta' + \gamma')^2 - (\beta' - \gamma')^2,$$

d'où l'on tire

$$(N) \quad GH = 2\sqrt{\beta'\gamma'}.$$

On obtient de même

$$(P) \quad ID = 2\sqrt{\gamma'\alpha'}, \quad EF = 2\sqrt{\alpha'\beta'}.$$

Les triangles semblables ADA' et AQO donnent

$$(1) \quad \frac{\alpha'}{a} = \frac{r}{p-a},$$

car on sait que $AQ = p - a$. On trouve de même

$$(2) \quad \frac{\beta'}{b} = \frac{r}{p-b},$$

$$(3) \quad \frac{\gamma'}{c} = \frac{r}{p-c}.$$

Multipliant membre à membre les égalités (2) et (3), et tenant compte de la relation connue

$$(Q) \quad r\sqrt{p} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)},$$

on obtient

$$(R) \quad \beta'\gamma' = \frac{p-a}{p}\beta\gamma.$$

On trouve de même

$$(S) \quad \gamma'\alpha' = \frac{p-b}{p}\gamma\alpha, \quad \alpha'\beta' = \frac{p-c}{p}\alpha\beta.$$

Par suite des égalités (N), (P) et (R), (S), les trois équations (M) deviennent

$$(4) \quad \beta + \gamma - a + 2\sqrt{\frac{p-a}{p}} \cdot \sqrt{\beta\gamma} = 0,$$

$$(5) \quad \gamma + \alpha - b + 2\sqrt{\frac{p-b}{b}} \cdot \sqrt{\gamma\alpha} = 0,$$

$$(6) \quad \alpha + \beta - c + 2\sqrt{\frac{p-c}{c}} \cdot \sqrt{\alpha\beta} = 0.$$

En résolvant ce système d'équations simultanées, on obtiendra les formules donnant les valeurs des trois segments α , β , γ , et ensuite, au moyen des équations (1), (2), (3), on aura les formules donnant les rayons α' , β' , γ' .

Ayant remarqué que, si l'on pose

$$\beta + \gamma = x, \quad \gamma + \alpha = y, \quad \alpha + \beta = z,$$

la résolution du système d'équations (4), (5), (6) est ramenée à celle d'un autre système à trois inconnues, nous avons eu l'idée de chercher la valeur d'un des binômes tels que $(\beta + \gamma)$.

Or, les équations (5) et (6) peuvent être considérées comme étant des équations du second degré dont l'inconnue est $\sqrt{\alpha}$; appliquant la formule connue pour éliminer α , faisant les calculs en conservant le binôme $(\beta + \gamma)$, remplaçant $\beta\gamma$ par la valeur que fournit l'équation (4), tenant compte des relations entre p et a , b , c , on obtient, d'une manière simple et rapide, l'équation suivante:

$$(T) \quad (\beta + \gamma - b - c)\sqrt{\beta\gamma} - \sqrt{(p-b)(p-c)}(\beta + \gamma) \\ + p\sqrt{(p-b)(p-c)} = 0.$$

Puis, en éliminant $\sqrt{\beta\gamma}$ entre les équations (4) et (T) et en tenant

compte de la relation (Q), on arrive à l'équation

$$(7) \quad (\beta + \gamma)^2 - 2(p - r)(\beta + \gamma) + a(b + c) - 2pr = 0,$$

qui donne la valeur du binôme $(\beta + \gamma)$.

Il est facile, par analogie, d'écrire les équations qui donnent les valeurs des binômes $(\gamma + \alpha)$ et $(\alpha + \beta)$.

Pour qu'une racine de l'équation (7) convienne au cas de figure considéré, il faut qu'elle soit réelle, positive et inférieure à a .

Comme le réalisant de l'équation (7) est la quantité positive

$$(p - a)^2 + r^2,$$

les deux racines sont réelles. Elles sont positives, car leur somme et leur produit sont positifs. La substitution de a au binôme $(\beta + \gamma)$ dans le premier membre de l'équation (7) donne le résultat négatif $2r(a - p)$: donc l'une des racines est comprise entre zéro et a , l'autre est supérieure à a . Par suite, *la petite racine de l'équation (7) seule convient au cas de figure où les cercles cherchés sont intérieurs au triangle donné; (rappelons que Malfatti et tous les géomètres qui ont publié des travaux sur son problème n'ont considéré que ce cas de figure.)*

4. *Second cas de figure du problème de Malfatti.* — Pour interpréter la seconde racine de l'équation (7), nous avons considéré un cas de figure dans lequel la somme des segments situés sur un côté est plus grande que ce côté; nous avons eu d'abord les trois équations (1), (2), (3), et ensuite trois équations, que nous désignerons par $(4)_i$, $(5)_i$, $(6)_i$, qui ne diffèrent des équations (4), (5), (6) qu'en ce que le terme irrationnel a le signe — au lieu du signe +. L'élimination de α entre les équations $(5)_i$ et $(6)_i$ donne encore la résultante (T) . L'élimination de $\sqrt{\beta\gamma}$ entre les équations $(4)_i$ et (T) donne l'équation

$$(7)_i \quad (\beta + \gamma)^2 - 2(p + r)(\beta + \gamma) + a(b + c) + 2pr = 0.$$

Pour qu'une racine de l'équation $(7)_i$ convienne au cas de figure

considéré, il faut qu'elle soit réelle, positive, supérieure à a et inférieure à la distance $(b + c)$ des points de contact des cercles ex-inscrits aux angles B et C .

Comme le réalisant de l'équation (7)₁ est la quantité positive

$$(p - a)^2 + r^2,$$

les deux racines sont réelles. Elles sont positives, car leur somme et leur produit sont positifs. La substitution de a au binôme $(\beta + \gamma)$ dans le premier membre de l'équation (7)₁ donne le résultat positif $2r(p - a)$: donc a est extérieur aux racines, et comme a est plus petit que leur demi-somme $(p + r)$, les deux racines sont supérieures à a . La substitution du binôme $(b + c)$ au binôme $(\beta + \gamma)$ dans le premier membre de l'équation (7)₁ donne le résultat négatif $2r(p - b - c)$: donc l'une des racines est comprise entre a et $(b + c)$ et l'autre est supérieure à $(b + c)$. Par suite, *la petite racine de l'équation (7)₁ seule convient au cas de figure où chaque cercle cherché est tangent à deux côtés du triangle et coupe le troisième.*

5. *Convention sur le signe de r .*—On remarque que l'équation (7) devient l'équation (7)₁ si l'on y remplace r par $-r$; donc *la petite racine de l'équation (7) convient au premier cas de figure en y donnant à r le signe $+$, et la grande racine de cette équation convient au second cas de figure en y donnant à r le signe $-$*

6. *Formules donnant les segments.*—Les racines de l'équation (7) sont

$$(8) \quad \beta + \gamma = p - r \pm a',$$

en remarquant que la quantité sous radical égale \overline{AD}^2 ou a'^2 .

Par analogie, on peut écrire:

$$(9) \quad \gamma + \alpha = p - r \pm b',$$

$$(10) \quad \alpha + \beta = p - r \pm c'.$$

En désignant par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les valeurs de α, β, γ correspondant au premier cas de figure, et par $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, celles correspondant au second, mettant en évidence le signe de r , on trouve aisément, au moyen des équations (8), (9), (10), les formules suivantes, où toutes les lettres représentent des quantités positives :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour le premier cas de figure} \\ 2\alpha_1 = p - r + a' - b' - c', \\ 2\beta_1 = p - r - a' + b' - c', \\ 2\gamma_1 = p - r - a' - b' + c'; \end{array} \right.$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour le second cas de figure:} \\ 2\alpha_2 = p + r - a' + b' + c', \\ 2\beta_2 = p + r + a' - b' + c', \\ 2\gamma_2 = p + r + a' + b' - c'. \end{array} \right.$$

7. *Première construction des cercles cherchés.* — Elle consiste simplement à construire la somme des lignes affectées du signe +, à en retrancher la somme des lignes affectées du signe —; la moitié de la différence est un segment. Portant les segments sur les côtés, on a les points de contact des cercles cherchés; des perpendiculaires aux côtés en ces points donnent leurs centres sur les bissectrices. Telle est, à peu près, la construction si simple de Malfatti.

8. *Seconde construction des cercles cherchés.* — Considérant les formules (11) et (12), on voit que l'on peut écrire

$$(13) \quad a' - \alpha_1 = b' - \beta_1 = c' - \gamma_1 = \frac{-p + r + a' + b' + c'}{2},$$

$$(14) \quad a' + \alpha_2 = b' + \beta_2 = c' + \gamma_2 = \frac{p + r + a' + b' + c'}{2}.$$

Nous désignerons par ρ_1 et par ρ_2 les valeurs qui forment les derniers membres de ces égalités.

D'après ces égalités, si l'on porte sur les bissectrices du triangle, à partir de ses sommets, des distances respectivement égales aux segments ayant ces sommets pour origine, on obtient sur les bissectrices trois points A_1, B_1, C_1 situés sur un cercle de rayon ρ_1 dans le premier cas de figure, (cette construction a été signalée par SIMONS;) et trois points A_2, B_2, C_2 situés sur un cercle de rayon ρ_2 dans le second cas de figure.

Les deux cercles de rayons ρ_1 et ρ_2 ayant été décrits, on obtient facilement les points de contact des cercles cherchés avec les côtés.

9. *Valeurs des segments en fonction des côtés.* — On peut trouver les valeurs des segments en fonction des côtés, car l'on connaît la formule (Q) donnant r , et on obtient aisément les suivantes :

$$(T) \quad a'^2 = \frac{bc(p-a)}{p}, \quad b'^2 = \frac{ac(p-b)}{p}, \quad c'^2 = \frac{ab(p-c)}{p}.$$

10. *Propriétés tirées des valeurs des segments.* — Des valeurs des segments dans les deux cas de figure, on peut tirer diverses propriétés relatives à la figure formée par le triangle donné et par les six cercles obtenus; voici quelques propriétés remarquables :

$$1^\circ \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = \gamma_1 + \gamma_2 = p.$$

$$2^\circ \quad \alpha_2 - \alpha_1 = r - a' + b' + c', \text{ etc.}$$

$$3^\circ \quad \alpha_1 - \beta_1 = -(\alpha_2 - \beta_2) = a' - b', \text{ etc.}$$

$$4^\circ \quad \alpha_2 + \beta_2 - (\alpha_1 + \beta_1) = 2(r + c'), \text{ etc.}$$

5° Les points de contact du cercle inscrit à un triangle ayant pour côtés les valeurs de $(\beta_1 + \gamma_1)$, $(\gamma_1 + \alpha_1)$, $(\alpha_1 + \beta_1)$, ou à un triangle ayant pour côtés les valeurs de $(\beta_2 + \gamma_2)$, $(\gamma_2 + \alpha_2)$, $(\alpha_2 + \beta_2)$, déterminent sur les côtés des segments égaux à $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ou à $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$.

RECHERCHE DES DIVERS CAS DE FIGURE DU PROBLÈME
DE MALFATTI.

11. En examinant les positions relatives de trois cercles satisfaisant aux conditions de l'énoncé du problème de Malfatti, nous avons trouvé les cas de figure suivants :

I. — Si les trois cercles sont tangents deux à deux extérieurement, 1° les trois cercles sont dans le triangle donné ; 2° chacun des trois cercles coupe le côté auquel il n'est pas tangent; (ces deux cas sont ceux que nous venons de traiter;) 3° les trois cercles sont dans un même angle du triangle et tous trois extérieurs au triangle : il y a alors trois cas de figure; 4° les trois cercles sont dans un même angle du triangle, deux étant tangents au côté opposé à cet angle, l'autre coupant ce côté : alors il y a encore trois cas de figure. Donc le problème de Malfatti présente *huit cas généraux* de figure lorsque les trois cercles sont tangents extérieurement.

Les systèmes d'équations relatifs aux six derniers cas sont analogues à ceux des deux premiers.

II. — Si deux des cercles sont tangents extérieurement et si le troisième est intérieur à l'un des précédents, il faut, pour que ce cercle soit tangent aux deux autres, que les trois cercles soient tangents au même point; alors, chaque cercle intérieur est dans l'angle opposé par le sommet à chacun des angles du triangle. Le problème de Malfatti présente alors *six cas particuliers* de figure.

L'une des trois équations du système relatif à chacun de ces six cas de figure ne contient pas la racine du produit de deux inconnues.

III. — Si deux des cercles sont tangents entre eux extérieurement et tangents intérieurement à un troisième cercle, il faut qu'alors les points de contact du plus grand cercle avec deux côtés du triangle soient les points de contact des deux petits cercles avec ces mêmes côtés; de plus, ou les deux petits cercles sont intérieurs au triangle et tangents à un même côté quelconque: d'où il résulte trois cas de figure; ou les deux petits cercles sont extérieurs au triangle et tangents à un même côté quelconque: d'où il résulte trois cas de figure. Le problème de Malfatti présente alors *six cas particuliers* de figure.

Deux des trois équations du système relatif à chacun de ces cas de figure ne contiennent pas la racine du produit de deux inconnues.

IV. — Si les points de contact du grand cercle et des deux petits sont tous trois sur les trois côtés du triangle, les trois cercles se confondent, et on a pour *solutions particulières* le cercle inscrit et les trois cercles ex-inscrits au triangle.

Paris, le 18 février 1889.

ERNEST LEBON.
