

Bemerkung über die Subdeterminanten symmetrischer Systeme.

Von

R. MEHMKE in Darmstadt.

In den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom 27. Juli 1882 hat Herr Kronecker folgenden Satz mitgetheilt.

Bedeutet a_{mn} ein symmetrisches Grössensystem, so dass also

$$a_{mn} = a_{nm}$$

ist, so bestehen zwischen den aus diesen Grössen gebildeten Determinanten l ter Ordnung die linearen Beziehungen

$$|a_{gk}| = \sum_r |a_{ik}|,$$

($g = 1, 2, \dots, l$; $k = l + 1, l + 2, \dots, 2l$; $i = 1, 2, \dots, l - 1$, r ;
 $k = l + 1, \dots, r - 1, l, r + 1, \dots, 2l$; $r = l + 1, l + 2, \dots, 2l$).

Es scheint noch nicht bemerkt worden zu sein, dass der vorhergehende Satz in einem allgemeineren enthalten ist, welchen Grassmann in seiner „Linealen Ausdehnungslehre“ von 1862 aufgestellt hat.

Der fragliche Satz, Nr. 183 (S. 131) des angeführten Werkes, wird von Grassmann so ausgesprochen:

Wenn man aus einer Reihe von Grössen erster Stufe die multiplicativen Combinationen zu irgend einer Classe bildet und jede derselben mit der ergänzenden Combination) zu einem inneren Product verknüpft, so ist die Summe dieser Producte Null.**)*

Nehmen wir an, es seien $(l + 1)$ Grössen erster Stufe $a_1, a_{l+1}, \dots, a_{2l}$ gegeben und betrachten wir speciell die Combinationen erster Classe, d. h. die Grössen a selbst, so erhält (bei Beobachtung der von Grassmann aufgestellten Zeichenregel, a. a. O. Nr. 172 Anm.) der eben mitgetheilte Satz die Gestalt

$$(1) \quad -[a_l | a_{l+1} \dots a_{2l}] = \sum_r [a_r | a_{l+1} \dots a_{r-1} a_l a_{r+1} \dots a_{2l}],$$
$$(r = l + 1, \dots, 2l).$$

*) Ueber den Begriff der ergänzenden Combination sowie die Vorzeichenbestimmung S. a. a. O. Nr. 172 (S. 125) Anmerkung.

**) Ich erwähne, dass zu den Anwendungen des obigen Satzes auf die Punktgeometrie z. B. der Satz vom Höhenschnittpunkt im ebenen oder sphärischen Dreieck, ferner der Satz, dass die Höhen eines Tetraeders Erzeugende derselben Schaar eines Hyperboloides bilden, sowie ganze Reihen verwandter Sätze gehören.

In dieser Form drückt die Gleichung nicht eine Beziehung zwischen *Zahlgrössen*, sondern *extensiven* Grössen aus. Um dieselbe in eine Zahlengleichung zu verwandeln, braucht man sie nur mit $(l-1)$ beliebigen Grössen erster Stufe, etwa a_1, a_2, \dots, a_{l-1} zu multipliciren. Das giebt

$$(2) \quad [a_1 \dots a_l | a_{l+1} \dots a_{2l}] = \sum_r [a_1 \dots a_{l-1} a_r | a_{l+1} \dots a_{r-1} a_l a_{r+1} \dots a_{2l}],$$

$$(r = l + 1, \dots, 2l).$$

Nun kann aber jedes Glied der vorhergehenden Gleichung in Determinantenform geschrieben werden. Denn setzen wir allgemein das innere Product der Grössen a_m und a_n , welches eine Zahlgrösse ist, gleich a_{mn} :

$$(3) \quad a_m | a_n = a_{mn},$$

so ist nach einem Grassmann'schen Satze (S. a. a. O. Nr. 175, S. 130)

$$[a_{g_1} a_{g_2} \dots a_{g_l} | a_{h_1} a_{h_2} \dots a_{h_l}] = \sum \pm a_{g_1 h_1} a_{g_2 h_2} \dots a_{g_l h_l}$$

oder unter Anwendung der Kronecker'schen Determinantenbezeichnung

$$= | a_{gh} |$$

$$(g = g_1, \dots, g_l; \quad h = h_1, \dots, h_l).$$

Daher ist Gleichung (2) in der That identisch mit der von Kronecker mitgetheilten Relation

$$| a_{gh} | = \sum_r | a_{ik} |$$

$$(g = 1, 2, \dots, l; \quad h = l + 1, \dots, 2l; \quad i = 1, 2, \dots, l - 1, r;$$

$$k = l + 1, \dots, r - 1, l, r + 1, \dots, 2l; \quad r = l + 1, l + 2, \dots, 2l).$$

Auch bilden die Grössen a_{mn} ein *symmetrisches* Grössensystem; denn weil in einem inneren Producte zweier Grössen erster Stufe die Factoren vertauscht werden dürfen, so hat man

$$a_{nm} = a_n | a_m = a_m | a_n = a_{mn}.$$

Hätten wir den angeführten Grassmann'schen Satz in seiner vollen Allgemeinheit in die Sprache der Determinantentheorie übersetzt, so hätten sich allgemeinere Beziehungen ergeben, welche aufzustellen ich dem Leser um so lieber überlassen will, als ich denselben nur einen bedingten Werth beimessen kann. Denn handelt es sich z. B. um Anwendungen auf die Geometrie, so ist es weit vortheilhafter, den Grassmann'schen Satz in seiner ursprünglichen Form zu benützen, anstatt ihn zuvor in Determinantengewand zu kleiden.

Darmstadt, den 28. Februar 1885.