Zur Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Funktion $\xi(t)$.

Von

H. v. Mangoldt in Danzig.

B. Riemann hat in seiner Abhandlung „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe"*) ohne Beweis die Behauptung ausgesprochen, daß die dort mit $\xi(t)$ bezeichnete Funktion unendlich viele Nullstellen habe, und daß die Anzahl derjenigen dieser Nullstellen, deren reelle Teile zwischen 0 und einer großen positiven Zahl T enthalten sind, näherungsweise durch den Ausdruck

$$\frac{T}{2\pi}\, l\, \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}\ ^{**})$$

dargestellt werde.

In einer früheren Arbeit***) habe ich gezeigt, daß der Unterschied zwischen diesem Näherungswerte und der darzustellenden Anzahl für $T > 12$ absolut genommen kleiner bleibt als

$$0{,}34 \cdot (lT)^2 + 1{,}35 \cdot lT + 2{,}58.$$

Im Nachfolgenden soll dargetan werden, daß sich unter der Voraussetzung $T > 28{,}558$, für den absoluten Wert des erwähnten Unterschiedes eine noch tiefer liegende, *nur bis zur Größenordnung von lT ansteigende* Grenze angeben läßt, nämlich

$$0{,}43200\, lT + 1{,}91662\, llT + 13{,}07873.$$

---

*) B. Riemann, Monatsberichte der Berliner Akademie 1859, S. 671 = Gesammelte Mathematische Werke, Leipzig, 1. Auflage, 1876, S. 136; 2. Auflage, 1892, S. 145.

**) Das Zeichen la bedeutet hier, so wie überall im Nachfolgenden, den natürlichen Logarithmus von a.

***) H. v. Mangoldt, Journal f. d. r. u. a. Math. 114, 1895, S. 266.

1.

Nach willkürlicher Annahme einer positiven Konstanten a, die größer als $\frac{1}{2}$ ist, denke man sich (Fig. 1) in der Ebene der komplexen Veränderlichen t durch den Punkt $(-ia)$ eine Parallele zur Achse des Reellen und durch den Punkt T eine Parallele zur Achse des Imaginären gezogen. Den Wert T selbst denke man sich so gewählt, daß die letztere

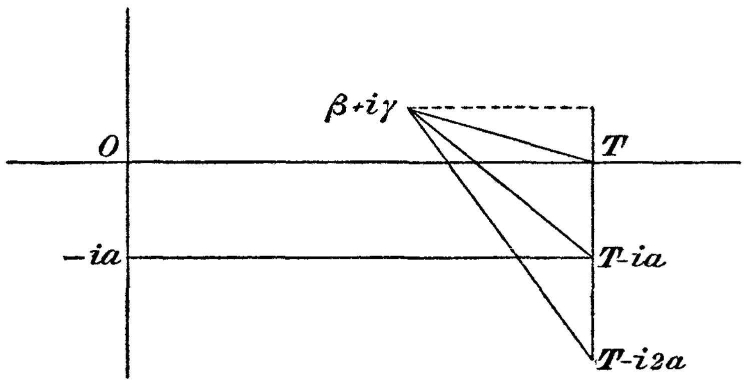

Fig. 1.

Parallele durch keine Nullstelle der Funktion $\xi(t)$ hindurchgeht. Wenn dann N die Anzahl derjenigen Nullstellen der Funktion $\xi(t)$ bezeichnet, deren reelle Teile zwischen 0 und T liegen, jede so oft gezählt, als ihre Ordnungszahl angibt, so ist das Produkt $2\pi N$, wie aus bekannten Eigenschaften der Funktion $\xi(t)$ folgt, gleich dem Doppelten des Zuwachses, welchen der Koeffizient von i in dem Ausdruck $l\xi(t)$ erfährt, wenn t stetig fortschreitend nacheinander die beiden Strecken

$$-ia \cdots T-ia \quad \text{und} \quad T-ia \cdots T$$

durchläuft. Als Anfangswert von $l\xi(t)$ für $t=-ia$ kann hierbei der reelle Wert angenommen werden und aus diesem sind dann die übrigen in Betracht kommenden Werte von $l\xi(t)$ durch stetige Fortsetzung abzuleiten.

Für die erste der beiden erwähnten Strecken hat die Berechnung des entsprechenden Zuwachses $\Phi_1(a, T)$ des Koeffizienten von i in dem Ausdruck $l\xi(t)$ keine Schwierigkeit. Aus der Formel, welche nach Riemann die Funktionen $\xi(t)$ und $\zeta(s)$ miteinander verbindet, folgt nämlich zunächst

$$(1)\ \xi(T-ia)=\Pi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)\left(a-\frac{1}{2}+iT\right)\pi^{-\frac{1}{4}-\frac{a}{2}-i\frac{T}{2}}\zeta\left(\frac{1}{2}+a+iT\right).$$

Nun denke man sich eine reelle Veränderliche τ, welche stetig wachsend das Intervall $0 \cdots T$ durchläuft, und verstehe unter

$$l\xi(T-ia);\quad l\Pi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right);\quad l\zeta\left(\frac{1}{2}+a+iT\right)$$

diejenigen Werte der Logarithmen

$$l\xi(\tau - ia); \quad l\Pi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{\tau}{2}\right); \quad l\zeta\left(\frac{1}{2}+a+i\tau\right),$$

welche sich aus den reellen Werten der Logarithmen

$$l\xi(-ia); \quad l\Pi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}\right); \quad l\zeta\left(\frac{1}{2}+a\right)$$

durch stetige Fortsetzung für $\tau = T$ ergeben. Für alle anderen vorkommenden Logarithmen mögen die Hauptwerte genommen werden.

Dann folgt aus (1)

$$(2)\quad l\xi(T-ia) = l\Pi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right) + l\left(a-\frac{1}{2}+iT\right) - \left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right) l\pi + l\zeta\left(\frac{1}{2}+a+iT\right).$$

Nun ist nach T. J. Stieltjes*)

$$\begin{aligned} l\Pi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right) &= l\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right) + l\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right) \\ &= \left(\frac{3}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right) l\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} l(2\pi) + J\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right), \end{aligned}$$

wo $J\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)$ ein Ergänzungsglied bedeutet, dessen absoluter Wert mit genügender Genauigkeit abgeschätzt werden kann und bei unbegrenzt wachsendem T dem Grenzwert 0 zustrebt.

Durch Einführung dieses Ausdrucks für $l\Pi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)$ in Gleichung (2) folgt

$$\begin{aligned} (3)\quad l\xi(T-ia) &= \left(\frac{3}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right) l\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)(1+l\pi) \\ &\quad + l\left(a-\frac{1}{2}+iT\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} l(2\pi) + l\zeta\left(\frac{1}{2}+a+iT\right) + J\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right). \end{aligned}$$

Infolge der Festsetzungen, welche zur eindeutigen Erklärung der vorkommenden Logarithmen getroffen wurden, ist nun der oben erwähnte Zuwachs $\Phi_1(a, T)$, um dessen Berechnung es sich handelt, nichts anderes als der Koeffizient, den i erhält, wenn man die rechte Seite der vorstehenden Gleichung in ihren reellen und ihren imaginären Teil zerlegt. Man hat aber

*) T.-J. Stieltjes, Journal de Mathématiques pures et appliquées (4) 5, 1889, S. 431, Formel (20).

$$l\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)=l\left(\frac{T}{2}-i\frac{1+2a}{4}\right)+li$$
$$=l\frac{T}{2}+l\left(1-i\frac{1+2a}{2T}\right)+i\frac{\pi}{2}$$
$$=l\frac{T}{2}+\frac{1}{2}l\left[1+\left(\frac{1+2a}{2T}\right)^2\right]+i\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1+2a}{2T}\right),$$

wo für das Zeichen arctg der zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegende Bogen zu nehmen ist. Hieraus erhält man, wenn man durch ϑ_1 und ϑ_2 reelle zwischen 0 und 1 enthaltene Zahlen bezeichnet, deren genaue Werte für das Nachfolgende nicht erforderlich sind,

$$l\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)=l\frac{T}{2}+\frac{\vartheta_1}{2}\left(\frac{1+2a}{2T}\right)^2+i\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta_2\frac{1+2a}{2T}\right).$$

Ähnlich ist

$$l\left(a-\frac{1}{2}+iT\right)=l\left(T-i\frac{2a-1}{2}\right)+li$$
$$=lT+l\left(1-i\frac{2a-1}{2T}\right)+i\frac{\pi}{2}$$
$$=lT+\frac{1}{2}l\left[1+\left(\frac{2a-1}{2T}\right)^2\right]+i\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta_3\frac{2a-1}{2T}\right)\quad(0<\vartheta_3<1).$$

Endlich ist, wenn R den absoluten Wert und Θ die Abweichung der komplexen Zahl $\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)$ bedeutet, nach T. J, Stieltjes*)

$$\left|J\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)\right|<\frac{1}{12R\left(\cos\frac{\Theta}{2}\right)^2}.$$

Nun ist aber im vorliegenden Falle

$$R>\frac{T}{2}\quad\text{und}\quad\Theta<\frac{\pi}{2},$$

folglich

$$\cos\frac{\Theta}{2}>\frac{1}{\sqrt{2}}$$

und daher

$$\left|J\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)\right|<\frac{1}{3T}.$$

Unter Berücksichtigung dieser Ergebnisse erhält man aus Gleichung (3) durch Vergleichung der imaginären Teile, wenn man zur Abkürzung den Koeffizienten von i in dem Ausdruck $l\zeta\left(\frac{1}{2}+a+iT\right)$ durch

$$Z(a,T)$$

bezeichnet und unter η eine reelle zwischen -1 und $+1$ enthaltene Zahl versteht,

*) T.-J. Stieltjes, a. a. O. S. 433, Formel (26).

$$\Phi_1(a, T) = \frac{T}{2} l \frac{T}{2} - \frac{T}{2}(1 + l\pi) + \left(\frac{7}{4} + \frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{2} + Z(a, T)$$
$$+ \frac{\eta}{3T} + \left\{\vartheta_1 \frac{(1+2a)^2}{16} - \vartheta_2\left(\frac{3}{4} + \frac{a}{2}\right)\frac{1+2a}{2} - \vartheta_3 \frac{2a-1}{2}\right\}\frac{1}{T},$$

und nach Zusammenfassung der Anfangsglieder und Vereinigung der beiden negativen Korrektionen zu einer einzigen

$$(4)\quad \Phi_1(a, T) = \frac{T}{2} l \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2} + \left(\frac{7}{4} + \frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{2} + Z(a, T) + \frac{\eta}{3T} + \left\{\vartheta_1 \frac{(1+2a)^2}{16} - \vartheta \frac{4a^2 + 16a - 1}{8}\right\}\frac{1}{T} \quad \begin{pmatrix} -1 < \eta < 1 \\ 0 < \vartheta_1 < 1 \\ 0 < \vartheta < 1 \end{pmatrix}.$$

2.

Mehr Schwierigkeit bereitet die Abschätzung des Zuwachses Φ_2, den die Abweichung von $\xi(t)$ erfährt, wenn t die Strecke vom Punkte $(T - ia)$ bis zum Punkte T durchläuft. Man gelangt zum Ziel, indem man diesen Zuwachs mit demjenigen Zuwachs Φ_3 vergleicht, um welchen die Abweichung von $\xi(t)$ zunimmt, wenn t auf dem geraden Verbindungswege vom Punkte $(T - i2a)$ zum Punkte $(T - ia)$ übergeht, und sich Φ_2 gemäß der Gleichung

$$\Phi_2 = \Phi_3 + (\Phi_2 - \Phi_3)$$

in zwei Bestandteile zerlegt denkt.

Um den ersten dieser Bestandteile zu finden, hat man nur nötig, in Gleichung (4) die Konstante a durch $2a$ zu ersetzen und den so sich ergebenden neuen Wert von Φ_1 von dem ursprünglichen abzuziehen. So erhält man, wenn man immer die Korrektionen gleichen Vorzeichens in eine einzige zusammenzieht,

$$(5)\quad \Phi_3 = -a\frac{\pi}{4} + Z(a, T) - Z(2a, T) + \eta\frac{2}{3T} + \left\{\vartheta \frac{36a^2 + 68a - 1}{16} - \vartheta' \frac{24a^2 + 40a - 1}{16}\right\}\frac{1}{T}$$
$$(0 < \vartheta < 1;\ 0 < \vartheta' < 1).$$

Zur Abschätzung der Differenz $(\Phi_2 - \Phi_3)$ dienen folgende Überlegungen: Man denke sich die Funktion $\xi(t)$ als Produkt ihrer Linearfaktoren in der Weise dargestellt, daß man je zwei Linearfaktoren $\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)$ und $\left(1 + \frac{t}{\alpha}\right)$, welche zwei entgegengesetzt gleichen Nullstellen α und $(-\alpha)$ entsprechen, unmittelbar aufeinander folgen läßt, oder doch nur um eine unter einer festen Grenze bleibende Anzahl von Plätzen voneinander trennt. Nun lasse man die Veränderliche t irgend einen durch keine Nullstelle der Funktion $\xi(t)$ führenden Weg von endlicher Länge stetig durchlaufen. Dann bilden die Änderungen, welche die Abweichungen der einzelnen Linearfaktoren von $\xi(t)$ hierbei erfahren, in derjenigen Anordnung, die der Reihenfolge der Linearfaktoren entspricht, eine konvergente unendliche Reihe, deren Summe mit der Änderung der Abweichung der Funktion $\xi(t)$ übereinstimmt. Ebenso kann auch die Differenz $(\Phi_2 - \Phi_3)$ in eine konvergente unendliche Reihe von Gliedern aufgelöst werden, die der Reihe nach den in der oben angegebenen Weise geordneten Linearfaktoren der Funktion $\xi(t)$ entsprechen.

Nun sei
$$\alpha = \beta + i\gamma,$$
wo β und γ reelle Zahlen bedeuten, irgend eine der Nullstellen der Funktion $\xi(t)$, und es werde im Nachfolgenden unter dem Zeichen arctg immer der zwischen $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ und $\frac{\pi}{2}$ enthaltene Bogen verstanden. Dann wird der Zuwachs, den die Abweichung des der erwähnten Nullstelle entsprechenden Linearfaktors
$$1 - \frac{t}{\beta + i\gamma} = -\frac{1}{\beta + i\gamma}[t - (\beta + i\gamma)]$$
erfährt, wenn t die Strecke $(T - ia) \cdots T$ durchläuft, in allen Fällen durch den Ausdruck
$$\operatorname{arctg}\frac{a + \gamma}{T - \beta} - \operatorname{arctg}\frac{\gamma}{T - \beta}$$
dargestellt (vgl. Fig. 1).

Ähnlich ist der Zuwachs der Abweichung des nämlichen Linearfaktors für den Fall, daß t die Strecke $(T - i2a) \cdots (T - ia)$ durchläuft, in allen Fällen gleich
$$\operatorname{arctg}\frac{2a + \gamma}{T - \beta} - \operatorname{arctg}\frac{a + \gamma}{T - \beta}.$$
Folglich ist der Beitrag, den der betrachtete Linearfaktor zu der Differenz $(\Phi_2 - \Phi_3)$ liefert, gleich
$$-\left\{\operatorname{arctg}\frac{2a + \gamma}{T - \beta} - \operatorname{arctg}\frac{a + \gamma}{T - \beta} - \left(\operatorname{arctg}\frac{a + \gamma}{T - \beta} - \operatorname{arctg}\frac{\gamma}{T - \beta}\right)\right\}.$$

Nun mögen, nach willkürlicher Annahme einer positiven Zahl k, zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem
$$|T - \beta| < 2k \quad \text{oder} \quad |T - \beta| \geqq 2k$$
ist, und dementsprechend möge die Differenz $(\Phi_2 - \Phi_3)$ in eine Summe zweier Teile ω_1, ω_2 gespalten werden, deren erster ω_1 aus der Summe der Beiträge derjenigen Linearfaktoren $\left(1 - \frac{t}{\beta + i\gamma}\right)$ besteht, bei denen $|T - \beta| < 2k$, also
$$T - 2k < \beta < T + 2k$$
ist, während der zweite ω_2 die Beiträge aller übrigen Linearfaktoren umfaßt.

Zur Abschätzung von ω_1 denke man sich das Intervall $(T - 2k) \cdots (T + 2k)$ in die beiden Teile
$$(T - 2k) \cdots T \quad \text{und} \quad T \cdots (T + 2k)$$

zerlegt und für jeden derselben die Anzahl derjenigen Nullstellen $\beta + i\gamma$ abgezählt, für welche β im Innern des betreffenden Teiles liegt. Falls mehrfache Nullstellen vorkommen sollten, wäre hierbei jede einzelne derselben so oft in Anschlag zu bringen, als ihre Ordnungszahl angibt. Die größere der beiden so sich ergebenden Anzahlen heiße K. Dann zeigt sich, daß

$$|\omega_1| < K\frac{\pi}{2}$$

sein muß.

Ist nämlich zunächst $\gamma = 0$, also β eine reelle Nullstelle der Funktion $\xi(t)$, so ist der Beitrag des entsprechenden Linearfaktors zu der Differenz $\Phi_2 - \Phi_3$ gleich der Differenz zweier *spitzen* Winkel von *gleichem* Vorzeichen, nämlich der beiden Winkel, unter welchen die Wege $(T-ia)\cdots T$ und $(T-i2a)\cdots(T-ia)$ vom Punkte β aus gesehen erscheinen. Der absolute Wert dieses Beitrages ist daher $< \frac{\pi}{2}$.

Ist zweitens $(\beta + i\gamma)$ wo $\gamma \gtrless 0$ ist, eine imaginäre Nullstelle der Funktion $\xi(t)$, so gehört zu ihr eine konjugiert imaginäre Nullstelle $(\beta - i\gamma)$, und der absolute Wert der Summe der Winkel φ_1, φ_2 (Fig. 2), unter

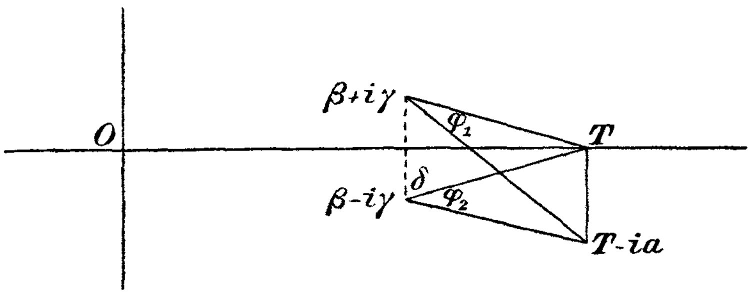

Fig. 2.

welchen der Weg $(T-ia)\cdots T$ von den Punkten $(\beta + i\gamma)$ und $(\beta - i\gamma)$ aus erscheint, liegt zwischen 0 und π. Denn $|\varphi_1|$ ist kleiner als der Basiswinkel δ des gleichschenkeligen Dreiecks mit der Spitze T und

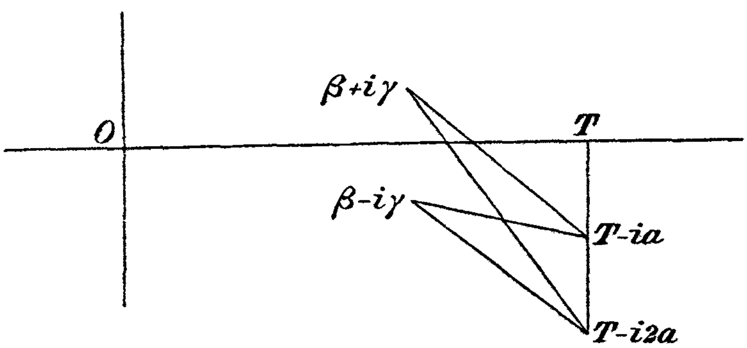

Fig. 3.

$(\delta + |\varphi_2|)$ ist $< \pi$. Ebenso ist (Fig. 3) die Summe der Winkel, unter welchen die Strecke $(T-i2a)\cdots(T-ia)$ von den Punkten $(\beta + i\gamma)$ und

$(\beta - i\gamma)$ erscheint, absolut genommen $< \pi$, weil beide Gesichtswinkel spitz sind. Zugleich hat diese Summe stets das nämliche Vorzeichen wie die Summe $(\varphi_1 + \varphi_2)$.

Die Differenz der beiden eben erwähnten Summen ist daher absolut genommen $< \pi$. Diese Differenz stellt aber den Beitrag dar, welchen die den Nullstellen $(\beta + i\gamma)$ und $(\beta - i\gamma)$ entsprechenden Linearfaktoren zusammengenommen zu der Zahl ω_1 liefern. Jeder solche Gesamtbeitrag ist somit absolut genommen $< \pi$, so daß durchschnittlich auf den *einzelnen* Linearfaktor ein Beitrag entfällt, dessen absoluter Wert $< \frac{\pi}{2}$ ist.

Da ferner zwei Nullstellen, deren reelle Teile auf verschiedenen Seiten von T liegen, zu Beiträgen von *entgegengesetzten* Vorzeichen Anlaß geben, so erhält man bei der Abschätzung von $|\omega_1|$ sicher zu viel, wenn man nur diejenigen Nullstellen in Betracht zieht, deren reelle Teile im Innern des *einen* der beiden Intervalle $(T-2k) \cdots T$ und $T \cdots (T+2k)$ liegen, nämlich desjenigen, dem die *meisten* Nullstellen entsprechen, und für jede einzelne derselben $\frac{\pi}{2}$ in Ansatz bringt. So ergibt sich

$$|\omega_1| < K\frac{\pi}{2},$$

wie behauptet wurde.

Im zweiten Fall, wenn $|T-\beta| \geqq 2k$ ist, empfiehlt es sich, den oben angegebenen Beitrag des Linearfaktors $\left(1 - \frac{t}{\beta + i\gamma}\right)$ zu der Differenz $(\Phi_2 - \Phi_3)$ durch Anwendung des Taylorschen Satzes in der einfachsten Form umzuformen. Man erhält so:

$$\begin{aligned}
&-\left\{\operatorname{arctg}\frac{2a+\gamma}{T-\beta} - \operatorname{arctg}\frac{a+\gamma}{T-\beta} - \left(\operatorname{arctg}\frac{a+\gamma}{T-\beta} - \operatorname{arctg}\frac{\gamma}{T-\beta}\right)\right\} \\
&\quad = -\frac{a}{T-\beta}\left\{\frac{1}{1+\left(\frac{a(1+\vartheta)+\gamma}{T-\beta}\right)^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{a\vartheta+\gamma}{T-\beta}\right)^2}\right\} \\
&\quad = \frac{a(T-\beta)\{[a(1+\vartheta)+\gamma]^2 - (a\vartheta+\gamma)^2\}}{\{(T-\beta)^2 + [a(1+\vartheta)+\gamma]^2\}\{(T-\beta)^2 + (a\vartheta+\gamma)^2\}} \\
&\quad = a^2[a(1+2\vartheta)+2\gamma]\cdot\frac{(T-\beta)^2}{(T-\beta)^2+(a\vartheta+\gamma)^2}\cdot\frac{1}{(T-\beta)\{(T-\beta)^2+[a(1+\vartheta)+\gamma]^2\}}
\end{aligned}$$

$$(0 < \vartheta < 1).$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
&\left|\operatorname{arctg}\frac{2a+\gamma}{T-\beta} - \operatorname{arctg}\frac{a+\gamma}{T-\beta} - \left(\operatorname{arctg}\frac{a+\gamma}{T-\beta} - \operatorname{arctg}\frac{\gamma}{T-\beta}\right)\right| \\
&\qquad < a^2(3a+2\gamma)\cdot\frac{1}{|T-\beta|^3} \\
&\qquad < a^2(3a+1)\cdot\frac{1}{|T-\beta|^3}.
\end{aligned}$$

Die Reihe der Beiträge, welche diejenigen Linearfaktoren $\left(1-\frac{t}{\beta+i\gamma}\right)$, bei denen $|T-\beta| \geqq 2k$ ist, zu der Differenz $(\Phi_2-\Phi_3)$ liefern, ist daher *unbedingt* konvergent. Deswegen kann die früher angedeutete Voraussetzung über die Anordnung der Glieder dieser Reihe jetzt fallen gelassen und an Stelle der früheren jede andere Anordnung gesetzt werden. Insbesondere kann man zunächst alle positiven Glieder, das sind diejenigen, in welchen $\beta < T$ ist, zu einer Summe Σ_1, und dann alle negativen Glieder, das sind diejenigen, wo $\beta > T$ ist, zu einer Summe $(-\Sigma_2)$ vereinigen, und die Summe ω_2 der Beiträge aller Linearfaktoren der betrachteten Art gleich der Differenz $(\Sigma_1-\Sigma_2)$ setzen. Hieraus geht hervor, daß $|\omega_2|$ kleiner ist als die größere der beiden Zahlen Σ_1, Σ_2, also erst recht kleiner als

$$a^2(3a+1)\Sigma' \frac{1}{|T-\beta|^3},$$

wo die Summe Σ' entweder nur über diejenigen Nullstellen $(\beta+i\gamma)$ zu erstrecken ist, für welche $\beta \geqq T+2k$ ist, oder nur über diejenigen, für welche $\beta \leqq T-2k$ ist, je nachdem der eine oder der andere Fall den größeren Wert von Σ' ergibt.

Durch Zusammenfassung der Ergebnisse, zu denen die Betrachtung der beiden vorhin unterschiedenen Fälle geführt hat, erhält man

$$(6) \qquad |\Phi_2-\Phi_3| < K\frac{\pi}{2} + a^2(3a+1)\Sigma' \frac{1}{|T-\beta|^3}.$$

Nun ist die Abschätzung von Φ_2 ausführbar. Durch Verbindung der Formeln (5) und (6) ergibt sich nämlich aus

$$\Phi_2 = \Phi_3 + (\Phi_2-\Phi_3)$$

die Gleichung

$$(7) \quad \begin{aligned} \Phi_2 = &-a\frac{\pi}{4} + Z(a,T) - Z(2a,T) \\ &+ \eta\left\{K\frac{\pi}{2} + a^2(3a+1)\Sigma' \frac{1}{|T-\beta|^3} + \frac{2}{3T}\right\} \\ &+ \left\{\vartheta\frac{36a^2+68a-1}{16} - \vartheta'\frac{24a^2+40a-1}{16}\right\}\frac{1}{T} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} -1<\eta<1 \\ 0<\vartheta<1 \\ 0<\vartheta'<1 \end{pmatrix}.$$

Und für die durch die Gleichung

$$N = \frac{\Phi_1+\Phi_2}{\pi}$$

bestimmte Anzahl N derjenigen Nullstellen der Funktion $\xi(t)$, deren reelle Teile zwischen 0 und T liegen, folgt aus den Gleichungen (4) und (7) der Ausdruck

$$(8)\qquad \begin{aligned} N = {} & \frac{T}{2\pi} l \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + \frac{2Z(a,T) - Z(2a,T)}{\pi} \\ & + \eta \left\{ \frac{K}{2} + \frac{a^2(3a+1)}{\pi} \Sigma' \frac{1}{|T-\beta|^3} + \frac{1}{\pi T} \right\} \\ & + \left\{ \vartheta \frac{5a^2+9a}{2} - \vartheta' \frac{32a^2+72a-3}{16} \right\} \frac{1}{\pi T} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} -1 < \eta < 1 \\ 0 < \vartheta < 1 \\ 0 < \vartheta' < 1 \end{pmatrix}.$$

3.

Wenn man sich nun lediglich davon überzeugen will, daß der absolute Wert des Unterschiedes zwischen der Anzahl N und dem Riemannschen Näherungswert $\frac{T}{2\pi} l \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$ bei unbegrenzt wachsendem T höchstens von der Ordnung lT unendlich werden kann, so genügt es, in Gleichung (8) $a = \frac{3}{2}$ zu setzen und für k den Wert

$$\varkappa = \operatorname{tg} 1 = 1{,}55741$$

zu wählen. Dann wird nämlich

$$\begin{aligned} Z(a,T) & \leqq |l\zeta(2+iT)| \\ & \leqq \left| \sum \left\{ \frac{1}{p^{2+iT}} + \frac{1}{2} \frac{1}{p^{2(2+iT)}} + \frac{1}{3} \frac{1}{p^{3(2+iT)}} + \cdots \right\} \right|, \end{aligned}$$

wo die Summe über alle Primzahlen p von 2 bis ins Unendliche zu erstrecken ist, folglich

$$|Z(a,T)| \leqq \sum \left\{ \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{p^4} + \frac{1}{3} \frac{1}{p^6} + \cdots \right\} = l\zeta(2) = l \frac{\pi^2}{6}.$$

Ebenso ergibt sich, daß auch $|Z(2a,T)|$ den endlichen Wert $l\frac{\pi^2}{6}$ nicht zu überschreiten vermag.

Ferner bleibt die Anzahl K bei den angegebenen Werten von a und k nach einem Satze, den ich früher bewiesen habe*) beständig kleiner als

$$\varkappa l(T+\varkappa) < \varkappa l T + \frac{\varkappa^2}{T}.$$

Daß endlich auch die Summe $\sum' \frac{1}{|T-\beta|^3}$ höchstens von der Ordnung lT unendlich werden kann, ergibt sich durch folgende Betrachtung:

Wenn ν irgend eine ganze positive Zahl bedeutet, so ist dafür, daß

$$(9)\qquad 2\nu\varkappa \leqq |T-\beta| < 2(\nu+1)\varkappa$$

sei, notwendig, daß β entweder dem Intervall

$$T + 2\nu\varkappa \cdots T + 2(\nu+1)\varkappa,$$

oder dem Intervall

$$T - 2(\nu+1)\varkappa \cdots T - 2\nu\varkappa$$

*) v. Mangoldt, Journal f. d. r. u. a. Math. 114, 1895, S. 265.

angehöre. Die Anzahl derjenigen Nullstellen $\beta + i\gamma$ der Funktion $\xi(t)$, für welche β nicht außerhalb des zuerst erwähnten Intervalles liegt, ist aber nach dem gleichen Satze wie oben kleiner als

$$\varkappa l[T + (2\nu + 1)\varkappa],$$

und dieser Ausdruck stellt, wie aus der zum Nullpunkt symmetrischen Verteilung der Nullstellen der Funktion $\xi(t)$ folgt, auch für das zweite Intervall eine Grenze dar, hinter welcher die Anzahl derjenigen Nullstellen, für die β dem zweiten Intervall angehört, in allen Fällen zurückbleibt. Daher erhält man für $k = \varkappa$, indem man in der Summe Σ' immer alle diejenigen Glieder, für welche ein und dieselbe Ungleichung von der Form (9) besteht, zu einer Gruppe zusammenfaßt,

$$\begin{aligned}
\sum{}' \frac{1}{|T - \beta|^3} &< \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varkappa l[T + (2\nu + 1)\varkappa]}{8\nu^3 \varkappa^3} \\
&< \frac{1}{8\varkappa^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^3} \cdot lT + \frac{1}{8\varkappa^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{l\left(1 + \frac{(2\nu+1)\varkappa}{T}\right)}{\nu^3} \\
&< \frac{\zeta(3)}{8\varkappa^2} lT + \frac{1}{8\varkappa} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu + 1}{\nu^3} \cdot \frac{1}{T} \\
&< \frac{\zeta(3)}{8\varkappa^2} lT + \frac{2\zeta(2) + \zeta(3)}{8\varkappa} \cdot \frac{1}{T}.
\end{aligned}$$

Die Summe Σ' kann daher höchstens wie lT unendlich werden, womit auch die hinsichtlich der Anzahl N ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

4.

Wenn man nun aber für den absoluten Wert des Unterschiedes zwischen der Anzahl N und dem Riemannschen Näherungswert

$$\frac{T}{2\pi} l \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$$

eine obere Schranke von der Form

$$AlT + B$$

gewinnen will, in welcher A eine *möglichst kleine* positive Konstante und B einen Ausdruck von niedrigerer Größenordnung als lT bedeutet, so sind noch einige weitere Betrachtungen erforderlich: Man setze in Gleichung (8)

$$a = \frac{1}{2} + u,$$

wo u eine später in geeigneter Weise zu bestimmende Zahl bedeutet, welche, wie sich herausstellen wird, zweckmäßig von der Ordnung $\frac{1}{lT}$ zu wählen ist und von vorn herein der Ungleichung

$$0 < u < 0{,}97413 \tag{10}$$

unterworfen werden kann. Dann erhält man zunächst

$$|Z(a, T)| = \left|Z\left(\frac{1}{2}+u, T\right)\right| \leqq |l\zeta(1+u+iT)| \leqq l\zeta(1+u).$$

Nun ist aber

$$\zeta(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+u}} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1+u}} = 1 + \frac{1}{u} = \frac{1+u}{u},$$

also

$$l\zeta(1+u) < l(1+u) - lu < u - lu,$$

folglich auch

$$\left|Z\left(\frac{1}{2}+u, T\right)\right| < -lu + u. \tag{11}$$

Zweitens ist

$$|Z(2a, T)| = |Z(1+2u, T)| \leqq \left|l\zeta\left(\frac{3}{2}+2u+iT\right)\right|,$$

folglich

$$|Z(2a, T)| \leqq l\zeta\left(\frac{3}{2}+2u\right) < l\zeta\left(\frac{3}{2}\right). \tag{12}$$

Um drittens für K eine obere Grenze zu gewinnen, fasse man zunächst diejenigen Nullstellen der Funktion $\xi(t)$ ins Auge, deren reelle Teile nicht außerhalb des Intervalles $T \cdots (T+2k)$ liegen. Die Anzahl K_1 dieser Nullstellen genügt der Ungleichung

$$K_1 \operatorname{arctg} \frac{2k}{1+u} < \Phi_1\left(\frac{1}{2}+u, T+2k\right) - \Phi_1\left(\frac{1}{2}+u, T\right). \tag{13}$$

Denn, wenn die Veränderliche t stetig die Strecke

$$T - i\left(\frac{1}{2}+u\right) \cdots T + 2k - i\left(\frac{1}{2}+u\right)$$

durchläuft, erfährt die Abweichung jedes einzelnen Linearfaktors der Funktion $\xi(t)$ einen *positiven* Zuwachs*), und dabei entspricht jeder Nullstelle, deren reeller Teil nicht außerhalb des Intervalles $T \cdots (T+2k)$ liegt, ein Zuwachs, der größer ist als $\operatorname{arctg} \frac{2k}{1+u}$.

Schon die Summe dieser Zunahmen übersteigt daher den Wert $K_1 \operatorname{arctg} \frac{2k}{1+u}$. Umsomehr muß der Gesamtzuwachs der Abweichung der Funktion $\xi(t)$, welche durch die Differenz $\Phi_1\left(\frac{1}{2}+u, T+2k\right) - \Phi_1\left(\frac{1}{2}+u, T\right)$ dargestellt wird, größer sein als $K_1 \operatorname{arctg} \frac{2k}{1+u}$.

*) Vgl. H. v. Mangoldt, Journal f. d. r. u. a. Math. 114, 1895, S. 258f.

Nun folgt aber aus Gleichung (4)

$$\Phi_1(a, T+2k) - \Phi_1(a, T) = \left(\frac{T+2k}{2} l \frac{T+2k}{2\pi} - \frac{T+2k}{2}\right) - \left(\frac{T}{2} l \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2}\right)$$
$$+ Z(a, T+2k) - Z(a, T) + \frac{\eta}{T}\left\{\frac{2}{3} + \frac{12a^2+36a-1}{16}\right\}.$$

Für $a < \frac{1}{2} + 0{,}97413 = 1{,}47413$ ergibt sich hieraus nach Umformung der am Anfang der rechten Seite stehenden Differenz mittels des Taylorschen Satzes

$$\Phi_1(a, T+2k) - \Phi_1(a, T) = 2k \cdot \frac{1}{2} l \frac{T+\vartheta 2k}{2\pi} + Z(a, T+2k) - Z(a, T + \frac{\eta}{T} \cdot 5{,}5511$$
$$= kl \frac{T}{2\pi} + kl\left(1 + \frac{\vartheta 2k}{T}\right) + Z(a, T+2k) - Z(a, T)$$
$$+ \frac{\eta}{T} \cdot 5{,}5511$$
$$= kl \frac{T}{2\pi} + Z(a, T+2k) - Z(a, T) + \frac{\eta}{T}(2k^2 + 5{,}5511).$$

Setzt man nunmehr $a = \frac{1}{2} + u$, so erhält man unter Berücksichtigung der Ungleichung (11)

$$\Phi_1\left(\frac{1}{2} + u, T + 2k\right) - \Phi_1\left(\frac{1}{2} + u, T\right) < kl \frac{T}{2\pi} - 2lu + 2u + \frac{1}{T}(2k^2 + 5{,}5511).$$

Folglich ist

$$K_1 < \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{2k}{1+u}} \left\{kl \frac{T}{2\pi} - 2lu + 2u + \frac{1}{T}(2k^2 + 5{,}5511)\right\}. \tag{14}$$

Wie sich später herausstellen wird, ist für k ein zwischen 0,67 und 0,68 enthaltener Wert zu wählen. Ferner kann $T > 12$ genommen werden, da die Funktion $\xi(t)$ keine Nullstelle hat, deren reeller Teil absolut genommen $\leqq 12$ wäre. Für Werte von k und T, welche diese Bedingungen erfüllen, nimmt aber die rechte Seite der Ungleichung (14) mit wachsendem T zu. Diese rechte Seite stellt daher, falls $T > 12$ ist, nicht nur für das Intervall $T \cdots (T+2k)$ eine obere Grenze für die Anzahl derjenigen Nullstellen der Funktion $\xi(t)$ dar, deren reelle Teile diesem Intervall angehören, sondern zugleich auch für jedes andere Intervall von der Länge $(2k)$, dessen dem Nullpunkt zunächst gelegenes Ende von diesem einen Abstand hat, der $< T$ ist. Insbesondere ist die rechte Seite der Ungleichung (14) auch eine obere Grenze für die Anzahl derjenigen Nullstellen, deren reelle Teile dem Intervall $(T-2k) \cdots T$ angehören, also auch für die früher mit K bezeichnete Anzahl, so daß auf der linken

Seite der Ungleichung (14) der Index 1 wegbleiben darf. Berücksichtigt man nun noch, daß $k < 0{,}68$, also $2k^2 < 0{,}9248$ ist, so erhält man

$$K < \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}}\left(kl\frac{T}{2\pi} - 2lu + 2u + \frac{6{,}4759}{T}\right). \tag{15}$$

Für den ersten Faktor der rechten Seite dieser Ungleichung liefert die Entwickelung nach dem Mac-Laurinschen Satze

$$\frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}} = \frac{1}{\operatorname{arctg}(2k)} + \frac{2ku}{\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+\vartheta u}\right)^2[(1+\vartheta u)^2+4k^2]}$$

und, wenn man noch um ein Glied weitergeht,

$$\frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}} = \frac{1}{\operatorname{arctg}(2k)} + \frac{1}{[\operatorname{arctg}(2k)]^2}\cdot\frac{2k}{1+4k^2}u$$
$$+ 2k\frac{2k-(1+\vartheta u)\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+\vartheta u}}{\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+\vartheta u}\right)^3[(1+\vartheta u)^2+4k^2]^2}u^2.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}} < \frac{1}{\operatorname{arctg}(2k)} + \frac{2ku}{\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}\right)^2(1+4k^2)},$$

beziehungsweise

$$\frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}} < \frac{1}{\operatorname{arctg}(2k)} + \frac{1}{[\operatorname{arctg}(2k)]^2}\cdot\frac{2k}{1+4k^2}\cdot u$$
$$+ 2k\cdot\frac{2k-\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}}{\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}\right)^3(1+4k^2)^2}\cdot u^2.$$

Somit ergibt sich

$$K < \frac{k}{\operatorname{arctg}(2k)}\cdot l\frac{T}{2\pi} + \frac{1}{[\operatorname{arctg}(2k)]^2}\cdot\frac{2k^2}{1+4k^2}ul\frac{T}{2\pi} - \frac{2lu}{\operatorname{arctg}(2k)}$$
$$+ 2k^2\frac{2k-\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}}{\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}\right)^3(1+4k^2)^2}u^2l\frac{T}{2\pi} - \frac{4kulu}{\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}\right)^2(1+4k^2)}$$
$$+ \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}}\left(2u + \frac{6{,}4759}{T}\right).$$

Wird nun im zweiten Gliede der rechten Seite für $l\frac{T}{2\pi}$ die Differenz $lT - l(2\pi)$ eingesetzt und sodann zur Abkürzung

$$(16)\qquad M = \frac{k}{\operatorname{arctg}(2k)} \cdot l\frac{T}{2\pi} + \frac{1}{[\operatorname{arctg}(2k)]^2} \cdot \frac{2k^2}{1+4k^2} ulT - \frac{2lu}{\operatorname{arctg}(2k)}$$

und

$$(17)\qquad P = 2k^2 \frac{2k - \operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}}{\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}\right)^3 (1+4k^2)^2} u^2 l\frac{T}{2\pi} - \frac{4kulu}{\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}\right)^2 (1+4k^2)}$$
$$- \frac{2k^2 l(2\pi)u}{[\operatorname{arctg}(2k)]^2 \cdot (1+4k^2)} + \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}} \left(2u + \frac{6{,}4759}{T}\right)$$

gesetzt, so ergibt sich

$$(18)\qquad K < M + P.$$

Zur Abschätzung der Summe $\sum' \frac{1}{|T-\beta|^3}$ dienen ähnliche Überlegungen wie früher. Die Anzahl derjenigen in Betracht zu ziehenden Nullstellen $(\beta + i\gamma)$, für welche

$$2\nu k \leqq |T-\beta| \leqq 2(\nu+1)k$$

ist, erweist sich auf Grund der eben durchgeführten Betrachtungen kleiner als derjenige Ausdruck, der aus der Summe $(M+P)$ hervorgeht, wenn man T durch $(T+2\nu k)$ ersetzt, also bei Berücksichtigung der Ungleichungen

$$l(T+2\nu k) < lT + \frac{2\nu k}{T} \quad \text{und} \quad \frac{1}{T+2\nu k} < \frac{1}{T}$$

kleiner als

$$M + P + \frac{2\nu k}{T} Q,$$

wo zur Abkürzung

$$(19)\qquad Q = \frac{k}{\operatorname{arctg}(2k)} + \frac{2k^2 u}{[\operatorname{arctg}(2k)]^2 (1+4k^2)} + 2k^2 \frac{2k - \operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}}{\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}\right)^3 (1+4k^2)^2} u^2$$

gesetzt ist. Daher ist

$$\sum' \frac{1}{|T-\beta|^3} < \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{M + P + \frac{2\nu k}{T} Q}{8\nu^3 k^3},$$

oder

$$\sum' \frac{1}{|T-\beta|^3} < \frac{M+P}{8k^3} \zeta(3) + \frac{\zeta(2)}{4k^2} \frac{Q}{T}.$$

Ferner ist

$$a^2(3a+1) = \left(\frac{1}{4} + u + u^2\right)\left(\frac{5}{2} + 3u\right) = \frac{5}{8} + \frac{13}{4}u + \frac{11}{2}u^2 + 3u^3,$$

also

$$\frac{a^2(3a+1)}{\pi} \sum' \frac{1}{|T-\beta|^3} = \left(\frac{5}{8} + \frac{13}{4}u + \frac{11+6u}{2}u^2\right) \frac{\zeta(3)}{8\pi k^3} M$$
$$+ \frac{1}{4\pi k^2}\left(\frac{5}{8} + \frac{13}{4}u + \frac{11}{2}u^2 + 3u^3\right)\left[\frac{\zeta(3)}{2k} P + \frac{\zeta(2)}{T} Q\right],$$

und, da $u < 0{,}97415$ ist,

$$(20)\qquad \frac{a^2(3a+1)}{\pi}\sum{}'\frac{1}{|T-\beta|^3} < \left(\frac{5}{8}+\frac{13}{4}u+8{,}4225u^2\right)\frac{\zeta(3)}{8\pi k^3}M + \frac{94{,}272}{32\pi k^2}\left[\frac{\zeta(3)}{2k}P+\frac{\zeta(2)}{T}Q\right].$$

Mit Hilfe der Formeln (11), (12), (18), (20) und der Ungleichung

$$a < 1{,}47415$$

folgt jetzt aus Gleichung (8)

$$N = \frac{T}{2\pi}l\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+\frac{7}{8}$$
$$+\eta\left\{\left[\frac{1}{2}+\frac{5\zeta(3)}{64\pi k^3}\right]M-\frac{2}{\pi}lu+\frac{13\zeta(3)}{32\pi k^3}uM+\frac{1}{\pi}l\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\right.$$
$$+\frac{2}{\pi}u+\frac{8{,}4225}{8\pi k^3}\zeta(3)u^2M+\frac{P}{2}\left[1+\frac{94{,}272}{32\pi k^3}\zeta(3)\right]$$
$$\left.+\frac{1}{\pi T}\left[13{,}067+\frac{94{,}272}{32k^2}\zeta(2)Q\right]\right\}.$$

Setzt man hier für M den durch Gleichung (16) gegebenen Wert ein, so bekommt man

$$(21)\quad N = \frac{T}{2\pi}l\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+\frac{7}{8}$$
$$+\eta\left\{\frac{32\pi k^3+5\zeta(3)}{64\pi k^2 \operatorname{arctg}(2k)}l\frac{T}{2\pi}\right.$$
$$+\left[\frac{32\pi k^3+5\zeta(3)}{32\pi k[\operatorname{arctg}(2k)]^2(1+4k^2)}+\frac{13\zeta(3)}{32\pi k^2\operatorname{arctg}(2k)}\right]ulT$$
$$-\left[\frac{32\pi k^3+5\zeta(3)}{32\pi k^3\operatorname{arctg}(2k)}+\frac{2}{\pi}\right]lu+\frac{1}{\pi}l\zeta\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{2}{\pi}u$$
$$+\frac{8{,}4225\zeta(3)}{8\pi k^2\operatorname{arctg}(2k)}u^2lT$$
$$+\frac{\zeta(3)(13+33{,}6900u)u}{32\pi k^3\operatorname{arctg}(2k)}\left[\frac{2k^2ulT}{\operatorname{arctg}(2k)(1+4k^2)}-2lu-kl(2\pi)\right]$$
$$\left.+\frac{P}{2}\left[1+\frac{94{,}272}{32\pi k^3}\zeta(3)\right]+\frac{1}{\pi T}\left[13{,}067+\frac{94{,}272}{32k^2}\zeta(2)Q\right]\right\}$$

Der Ausdruck

$$\frac{32\pi k^3+5\zeta(3)}{64\pi k^2\operatorname{arctg}(2k)}=\frac{1}{64\pi}\cdot\frac{32\pi k^3+5\zeta(3)}{k^2\operatorname{arctg}(2k)}$$

wird ein Minimum, wenn k die Gleichung

$$k^2\operatorname{arctg}(2k)\cdot 96\pi k^2-[32\pi k^3+5\zeta(3)]\left[2k\operatorname{arctg}(2k)+\frac{2k^2}{1+4k^2}\right]=0$$

oder

$$48\pi k^3\operatorname{arctg}(2k)-[32\pi k^3+5\zeta(3)]\left[\operatorname{arctg}(2k)+\frac{k}{1+4k^2}\right]=0$$

oder

$$\operatorname{arctg}(2k) = \frac{32\pi k^3 + 5\zeta(3)}{16\pi k^3 - 5\zeta(3)} \cdot \frac{k}{1+4k^2} \tag{22}$$

befriedigt. Der Wert von $\zeta(3)$ findet sich in einer von Herrn J. P. Gram mitgeteilten Tabelle*) bis auf 15 Dezimalen angegeben. Bei Abrundung auf fünf Dezimalen ist

$$\zeta(3) = 1{,}2020\underline{6}.$$

Unter Benutzung dieses Ergebnisses zeigt die numerische Rechnung, daß die Gleichung (22) eine zwischen 0,67 und 0,68 enthaltene Wurzel hat, die näherungsweise gleich 0,675 ist. Nimmt man für k diesen Näherungswert

$$k = 0{,}675$$

so findet man

$$\frac{32\pi k^3 + 5\zeta(3)}{64\pi k^2 \operatorname{arctg}(2k)} < 0{,}43200. \tag{23}$$

Ferner ergeben sich erstens, wenn man $k = 0{,}675$ setzt, für die Koeffizienten von ulT und von $(-lu)$ auf der rechten Seite der Gleichung (21) die folgenden etwas zu großen Näherungswerte:

$$\frac{32\pi k^3 + 5\zeta(3)}{32\pi k[\operatorname{arctg}(2k)]^2(1+4k^2)} + \frac{13\zeta(3)}{32\pi k^2 \operatorname{arctg}(2k)} < 0{,}58704, \tag{24}$$

$$\frac{32\pi k^3 + 5\zeta(3)}{32\pi k^3 \operatorname{arctg}(2k)} + \frac{2}{\pi} < 1{,}91662, \tag{25}$$

und es handelt sich zweitens darum, auch den Ausdruck

$$0{,}58704\, ulT - 1{,}91662\, lu$$

zu einem Minimum zu machen. Dies wird erreicht, wenn

$$0{,}58704\, lT - 1{,}91662\, \frac{1}{u} = 0$$

oder

$$u = \frac{1{,}91662}{0{,}58704} \frac{1}{lT} = \frac{3{,}2650}{lT}$$

ist.

Nun darf man mit Rücksicht auf die hinsichtlich der kleinsten Nullstellen der Funktion $\xi(t)$ bis jetzt sichergestellten Ergebnisse die Veränderliche T der Bedingung

$$T > 28{,}558$$

unterwerfen, was für u die im Vorangehenden bereits benutzte Ungleichung

$$u < 0{,}97413$$

zur Folge hat. Denn über diejenigen Nullstellen der Funktion $\xi(t)$, deren reelle Teile zwischen 0 und 28,558 liegen, ist man vollständig unter-

*) J. P. Gram, Mémoires de l'Académie Royale de Copenhague (6) 2, 1884, S. 269.

richtet. Diese Nullstellen sind nämlich, wie Herr Ch. J. de la Vallée Poussin*) bewiesen hat, sämtlich *reell*. Ferner sind sie sämtlich *einfach*, was zwar von Herrn de la Vallée Poussin nicht ausdrücklich hervorgehoben worden ist, aber aus seinen Betrachtungen ohne weiteres folgt. Endlich sind die numerischen Werte der fraglichen Nullstellen durch die von Herrn J. P. Gram**) durchgeführten Rechnungen mit großer Schärfe bekannt geworden, nämlich

$$\alpha_1 = 14{,}134725; \quad \alpha_2 = 21{,}022040; \quad \alpha_3 = 25{,}010856.$$

Nimmt man nunmehr

$$k = 0{,}675; \quad u = \frac{3{,}2650}{lT} \quad \text{und} \quad T > 28{,}558,$$

so ergibt sich durch numerische Ausrechnung

$$\log \frac{2k}{1+u} > 9{,}83495 \quad \text{und} \quad \operatorname{arctg} \frac{2k}{1+u} > 0{,}59977$$

und hierauf aus (17)

$$\frac{P}{2} < k^2 \frac{2k - 0{,}59977}{(0{,}59977)^3(1+4k^2)^2} u^2 lT - k^2 \frac{2k - 0{,}59977}{(0{,}59977)^2(1+4k^2)^2} l(2\pi)u^2$$
$$- \frac{2k}{(0{,}59977)^2(1+4k^2)} ulu + \left(\frac{1}{0{,}59977} - \frac{k^2 l(2\pi)}{[\operatorname{arctg}(2k)]^2(1+4k^2)}\right) u + \frac{3{,}2380}{0{,}59977} \cdot \frac{1}{T}.$$

Wenn man nun im ersten Gliede der rechten Seite

$$ulT = 3{,}2650$$

setzt und sodann die Koeffizienten numerisch ausrechnet, so erhält man:

$$\frac{P}{2} < 0{,}64943u - 0{,}36555u^2 - 1{,}3298ulu + 1{,}32677u + \frac{5{,}3990}{T}$$
$$< 1{,}97620u - 0{,}36555u^2 - 1{,}3298ulu + \frac{5{,}3990}{T}.$$

Nun ist

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{lT} \cdot \frac{lT}{T} = \frac{1}{3{,}2650} \cdot \frac{lT}{T} \cdot u,$$

und da $\frac{lT}{T}$ höchstens den Wert $\frac{l28{,}558}{28{,}558}$ hat, so ist

$$\frac{5{,}3990}{T} < 0{,}19410u.$$

Also ist

$$\frac{P}{2} < 2{,}17030u - 0{,}36555u^2 - 1{,}3298ulu.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung nimmt für die in Betracht kommenden Werte von u mit wachsendem u zu, so daß man aus ihr für

---

*) Ch.-J. de la Vallée Poussin, „Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée", Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique, Bd. 59, 1899, S. 23.

**) J.-P. Gram, „Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann", Bulletin de l'Académie royale des sciences et des lettres de Danemark, 1902, S. 8.

$\frac{P}{2}$ eine obere Schranke erhält, wenn man $u = 0{,}97413$ setzt. So ergibt sich

$$\frac{P}{2} < 1{,}80131. \tag{26}$$

Ferner folgt aus (19) für $k = 0{,}675$ und $u < 0{,}97413$

$$Q < 1{,}46195. \tag{27}$$

Endlich ist

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 2{,}612\underline{4}, \tag{28}$$

und

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}6449\underline{4}. \tag{29}$$

Wendet man nunmehr die durch die Formeln (23) bis (29) ausgedrückten Ergebnisse zur Abschätzung der rechten Seite der Gleichung (21) an, so erhält man, für $T > 28{,}558$, nach Ausführung der numerischen Rechnungen

$$N = \frac{T}{2\pi}\, l\, \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8}$$
$$+ \eta(0{,}43200\, lT + 1{,}91662\, llT + 12{,}20373) \quad (-1 < \eta < 1).$$

Aachen, den 6. Mai 1904.