Ueber die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung.

Von

Heinrich Bruns in Leipzig.

[Wiederabdruck einer im Jahre 1875 zum Doctorjubiläum von V. J. Buniakowsky von der physiko-mathematischen Facultät der Universität Dorpat dargebrachten Festschrift.]

Bei Gelegenheit einer Untersuchung über die säcularen Störungen der Bahnelemente periodischer Kometen wurde ich auf die Aufgabe geführt, die Perioden der zu der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{dx}{du} = y, \quad y^2 = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

gehörigen Integrale erster und zweiter Gattung analytisch darzustellen unter der Voraussetzung, dass die Coefficienten in y^2 gegebene rationale Functionen eines unbeschränkt veränderlichen Parameters ξ sind. Wenn man um die Untersuchung zu vereinfachen von der üblichen Normalform

$$\frac{dx}{du} = K\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

obiger Differentialgleichung ausgeht, so werden die Perioden, abgesehen von dem Factor K, Functionen von k allein. Hierbei ist es jedoch lästig, dass K und k immerhin nicht ganz einfache algebraische Functionen von A, B, C, B' und A' werden, deren explicite Darstellung die Auflösung der Gleichung $y^2 = 0$ voraussetzt. Dieser Uebelstand lässt sich jedoch vermeiden, wenn man von derjenigen Normalform der Gleichung (1) ausgeht, welche Herr Prof. Weierstrass seinen Vorlesungen über elliptische Functionen zu Grunde legt. Die Perioden lassen sich dann mit Hülfe hypergeometrischer Reihen darstellen, deren viertes Element eine einfache lineare Function der absoluten Invariante von y^2 ist.

I.

Zunächst mögen hier diejenigen auf die Weierstrass'sche Normalform bezüglichen Formeln zusammengestellt werden, welche für die folgenden Entwicklungen nöthig sind. Führt man in (1) statt x die Veränderliche s ein, welche mit x durch eine Gleichung von der Form

$$(px^2+qx+r)s^2+(p'x^2+q'x+r')s+p''x^2+q''x+r''=0$$

verbunden ist, so lassen sich die $p, q, r \ldots$ so als Functionen der A, B, C, B', A' und einer willkürlichen Constante bestimmen, dass

$$\frac{dx}{y}=\frac{ds}{t}, \quad t^2=4s^3-g_2 s-g_3$$

wird, wo

$$g_2=AA'-4BB'+3C^2,$$
$$g_3=ACA'+2BCB'-AB'B'-A'BB-C^3$$

die beiden fundamentalen Invarianten von y^2 bedeuten. (1) geht dann über in

$$(2) \qquad \frac{ds}{du}=\sqrt{4s^3-g_2 s-g_3},$$

und die Integrale erster und zweiter Gattung nehmen die Gestalt

$$(3) \qquad \int\frac{ds}{t} \quad \text{und} \quad -\int\frac{s\,ds}{t}$$

an. Bezeichnet man mit pu diejenige zu (2) gehörige elliptische Function, welche für $u=0$ unendlich wird und die sich für kleine Werthe von u durch die Potenzreihe

$$pu=\frac{1}{u^2}+\frac{g_2 u^2}{20}+\frac{g_3 u^4}{28}+\cdots$$

darstellen lässt, so existirt eine beständig convergente Potenzreihe

$$\sigma u=u-\frac{g_2 u^5}{2\cdot 5!}-\frac{6 g_3 u^7}{7!}-\cdots,$$

welche der Bedingung

$$pu=-\frac{d^2}{du^2}\log\sigma u$$

genügt. — Sind e_1, e_2, e_3 die Wurzeln der Gleichung $t^2=0$, also

$$4s^3-g_2 s-g_3=4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3),$$

so ist

$$(4) \qquad \begin{aligned} &e_1+e_2+e_3=0, \quad e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2=-\frac{1}{4}g_2, \quad e_1e_2e_3=\frac{1}{4}g_3, \\ &(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2(e_1-e_2)^2=\frac{1}{16}(g_2{}^3-27g_3{}^2)=\frac{27}{16}g_3{}^2(g-1), \end{aligned}$$

wo

$$g = \frac{g_2^3}{27\, g_3^2}$$

die absolute Invariante von y^2 bedeutet. Wenn g_2 und g_3 reell sind, so sind für $g > 1$ alle drei Wurzeln reell, für $g < 1$ dagegen nur eine. Wenn $g = 1$ und g_3 von Null verschieden, so sind zwei Wurzeln einander gleich; wenn jedoch die Discriminante verschwindet, indem g_2 und g_3 gleichzeitig gleich Null werden, so sind alle drei Wurzeln einander gleich. — Es seien nun L und L' zwei einfache geschlossene Curven in der Ebene der s, von denen die erste nur die Punkte e_2 und e_3, die zweite nur e_1 und e_2 einschliesst, ohne diese Punkte zu berühren, dann sind die Werthe $2\omega, 2\omega', 2\eta, 2\eta'$ der längs L und L' genommenen Integrale (3) Fundamentalperioden der Integrale erster und zweiter Gattung. Wenn wir hierbei annehmen, dass, falls e_1, e_2, e_3 in gerader Linie liegen, e_2 zwischen e_1 und e_2 liege, so können wir auch schreiben

$$\omega = \int_{e_2}^{e_3} \frac{ds}{t}, \quad \omega' = \int_{e_2}^{e_1} \frac{ds}{t}, \quad \eta = -\int_{e_3}^{e_2} \frac{s\,ds}{t}, \quad \eta' = -\int_{e_2}^{e_1} \frac{s\,ds}{t}, \tag{5}$$

wo die Integration längs der geradlinigen Strecken $e_3 e_2$, $e_2 e_1$ auszuführen ist. Das Vorzeichen von t ist hierbei vorläufig gleichgültig, nur muss es für ω und η, sowie für ω' und η' dasselbe sein. Es möge jedoch so bestimmt werden, dass in der Gleichung

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \pm \frac{\pi i}{2} \tag{6}$$

das obere Zeichen gilt. Ferner soll, wenn e_1, e_2, e_3 reell sind, $e_1 > e_2 > e_3$ sein und das Vorzeichen so gewählt werden, dass ω und damit auch η positiv reell wird; ω' und η' sind dann, so lange $g - 1$ nicht sehr klein, resp. positiv und negativ rein imaginär. — Ferner gelten dann die Relationen

$$\begin{gathered} \frac{\sigma'(u+2\omega)}{\sigma(u+2\omega)} = \frac{\sigma' u}{\sigma u} + 2\eta, \quad \frac{\sigma'(u+2\omega')}{\sigma(u+2\omega')} = \frac{\sigma' u}{\sigma u} + 2\eta', \\ p\omega = e_1, \; p(\omega+\omega') = e_2, \; p\omega' = e_3, \end{gathered} \tag{7}$$

und wenn man für den Augenblick $p\omega_\alpha = e_\alpha$ schreibt,

$$(pu - e_\alpha)\big(p(u+\omega_\alpha) - e_\alpha\big) = (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma). \tag{8}$$

Hieraus ergiebt sich für eine längs L und L' vorgenommene Integration

$$\begin{gathered} \int \frac{1}{s-e_\alpha}\frac{ds}{t} = -2\,\frac{e_\alpha\omega + \eta}{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}, \\ \int \frac{1}{s-e_\alpha}\frac{ds}{t} = -2\,\frac{e_\alpha\omega' + \eta'}{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}. \end{gathered} \tag{9}$$

Endlich hat man, wenn

$$h = e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}$$

gesetzt wird

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_2 - e_3} = 2h^{\frac{1}{4}} + 2h^{\frac{9}{4}} + 2h^{\frac{25}{4}} + \cdots$$

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1 - e_3} = 1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \cdots$$

Hieraus folgt, dass, wenn $e_2 - e_3 = k(e_1 - e_3)$ gesetzt wird, h sich in der Form

(10) $$\frac{k}{16} + k\mathfrak{P}(k)$$

darstellen lässt, wo $\mathfrak{P}(k)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von k fortschreitende Reihe bedeutet.

Wenn nun g_2 und g_3 gegebene Functionen von ξ sind, so erhält man durch Differentiiren der längs des Weges L genommenen Integrale (3) nach ξ

$$2\frac{d\omega}{d\xi} = \int \frac{g_2' s + g_3'}{2t^2}\frac{ds}{t}, \quad 2\frac{d\eta}{d\xi} = -\int \frac{g_2' s + g_3'}{2t^2}\frac{s\,ds}{t},$$

wo

$$\frac{dg_2}{d\xi} = g_2', \quad \frac{dg_3}{d\xi} = g_3'$$

gesetzt ist. Da nun

$$\frac{1}{2t^2} = \frac{1}{8}\sum \frac{1}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}\frac{1}{s - e_1},$$

$$\frac{s}{2t^2} = \frac{1}{8}\sum \frac{e_1}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}\frac{1}{s - e_1},$$

$$\frac{s^2}{2t^2} = \frac{1}{8}\sum \frac{e_1^2}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}\frac{1}{s - e_1},$$

so wird

$$\int \frac{ds}{2t^3} = -\frac{1}{4}\sum \frac{e_1\omega + \eta}{(e_1 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2},$$

$$\int \frac{s\,ds}{2t^3} = -\frac{1}{4}\sum \frac{e_1^2\omega + e_1\eta}{(e_1 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2},$$

$$\int \frac{s^2\,ds}{2t^3} = -\frac{1}{4}\sum \frac{e_1^3\omega + e_1^2\eta}{(e_1 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2},$$

oder es ist

(11) $$\begin{cases} \dfrac{d\omega}{d\xi} = -P\eta - Q\omega, \quad \dfrac{d\eta}{d\xi} = R\omega + Q\eta, \\ \text{und analog} \\ \dfrac{d\omega'}{d\xi} = -P\eta' - Q\omega', \quad \dfrac{d\eta'}{d\xi} = R\omega' + Q\eta', \end{cases}$$

wo

$$P = \frac{1}{8}\sum \frac{g_2' e_1 + g_3'}{(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2}, \quad Q = \frac{1}{8}\sum \frac{g_2' e_1^2 + g_3' e_1}{(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2},$$

$$R = \frac{1}{8}\sum \frac{g_2' e_1^3 + g_3' e_1^2}{(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2}.$$

Führt man statt der Wurzeln ihre symmetrischen Functionen ein, so wird

$$(19)\quad \begin{cases} 8(g_2^3-27g_3^2)P = -36g_3g_2'+24g_2g_3', \\ 8(g_2^3-27g_3^2)Q = 2g_2^2g_2'-36g_3g_3', \\ 8(g_2^3-27g_3^2)R = -3g_2g_3g_2'+2g_2^2g_3'. \end{cases}$$

Substituirt man nun in (11) für ω und η resp.

$$\Omega g_3^{-\frac{1}{6}} g^{\frac{1}{3}} \quad \text{und} \quad H g_3^{\frac{1}{6}},$$

so lassen sich die Coefficienten der so entstehenden Differentialgleichungen durch g allein und seine nach ξ genommene Ableitung ausdrücken, und man erhält

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Omega}{d\xi} = \dfrac{g'}{6g(g-1)}H - g'\left(\dfrac{1}{12(g-1)}+\dfrac{1}{3g}\right)\Omega, \\ \dfrac{dH}{d\xi} = \dfrac{g'}{12(g-1)}H - \dfrac{g'}{24(g-1)}\Omega. \end{cases}$$

Wenn g von ξ unabhängig, also $g'=0$ wäre, so würden auch Ω und H ξ nicht enthalten, folglich die Perioden einfache algebraische Functionen von ξ sein. Diesen Ausnahmefall wollen wir hier nicht weiter berücksichtigen und g als unabhängige Veränderliche einführen, indem wir für $g'd\xi$ dg schreiben. Eliminirt man dann aus den beiden Gleichungen (13) der Reihe nach H und Ω, so erhält man

$$(14)\quad \begin{cases} 0 = g(g-1)\dfrac{d^2\Omega}{dg^2} + \left(\dfrac{7}{3}g-\dfrac{4}{3}\right)\dfrac{d\Omega}{dg} + \dfrac{55}{144}\Omega, \\ 0 = g(g-1)\dfrac{d^2H}{dg^2} + \left(\dfrac{4}{3}g-\dfrac{1}{3}\right)\dfrac{dH}{dg} - \dfrac{5}{144}H. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind aber weiter nichts, als die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe

$$(15)\quad 0 = x(x-1)\frac{d^2F}{dx^2} + \big(x(\alpha+\beta+1)-\gamma\big)\frac{dF}{dx} + \alpha\beta F,$$

wo

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha = \frac{11}{12}, & \beta = \frac{5}{12}, & \gamma = \frac{4}{3}, \\ \text{oder} & & \\ \alpha = \frac{5}{12}, & \beta = -\frac{1}{12}, & \gamma = \frac{1}{3}, \end{array}\right\} \alpha+\beta=\gamma,$$

zu setzen ist. Ω und H haben also, als Functionen von g betrachtet, in der ganzen Zahlenebene den Charakter ganzer rationaler Functionen;

Ausnahmestellen können nur die Punkte 0, 1, ∞ sein. Zur Ermittelung der vollständigen Integrale von (14) ist jetzt weiter nichts erforderlich, als aus den bekannten Gaussischen Abhandlungen über die hypergeometrische Reihe die verschiedenen Ausdrücke zu entnehmen, welche für die Umgebung der Ausnahmestellen gültige Darstellungen der particulären Integrale liefern, und die Integrationsconstanten zu bestimmen. Der Uebersichtlichkeit halber mögen zunächst die hierher gehörigen Formeln aus der zweiten Gaussischen Abhandlung kurz zusammengestellt werden.

II.

Zu der Differentialgleichung (15) gehören für die Umgebung des Punktes $x = 0$ die beiden particulären Integrale

$$(16)\qquad \begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, x) &= (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right) \\ &= (1-x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \gamma, \frac{x}{x-1}\right), \end{aligned}$$

$$(17)\qquad \begin{cases} x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x) \\ = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1} F\left(\alpha+1-\gamma, 1-\beta, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}\right) \\ = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1} F\left(\beta+1-\gamma, 1-\alpha, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}\right). \end{cases}$$

Diese Darstellungen sind gültig für alle x innerhalb eines um den Nullpunkt mit dem Halbmesser Eins beschriebenen Kreises, resp. innerhalb derjenigen Halbebene, welche auf der negativen Seite der durch den Punkt $x = \frac{1}{2}$ senkrecht zur Axe der reellen Zahlen gezogenen Geraden liegt.

In der Umgebung des Punktes $x = 1$ hat man die particulären Integrale

$$(18)\qquad \begin{aligned} &F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x) \\ &\quad = x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}\right) \\ &\quad = x^{-\beta} F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}\right), \end{aligned}$$

und, weil $\alpha + \beta = \gamma$

$$(19)\qquad F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x) \log(x-1) + G(\alpha, \beta, 1-x),$$

wo $G(\alpha, \beta, x)$ die Reihe

$$\frac{\alpha\beta}{1\ 1} Ax + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2.3}\ \frac{\beta(\beta+1)}{1.2.3}(A+B)x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3}\ \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3}(A+B+C)x^3 + \cdots$$

bedeutet, und

$$A=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{2}{1},\ B=\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+1}-\frac{2}{2},\ C=\frac{1}{\alpha+2}+\frac{1}{\beta+2}-\frac{2}{3},\ldots$$

ist. Für (19) kann man auch setzen

$$\text{(20)}\qquad F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x)\log\frac{x-1}{x}+x^{-\beta}G\left(\beta,1-\alpha,\frac{x-1}{x}\right)$$

$$=F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x)\log\frac{x-1}{x}+x^{-\alpha}G\left(\alpha,1-\beta,\frac{x-1}{x}\right),$$

Von der Identität der Ausdrücke (19) und (20) überzeugt man sich leicht, wenn man berücksichtigt, dass (19) und (20) der Differentialgleichung (15) genügen, und dass ihre Differenz für $x=1$ verschwindet, so lange man die Logarithmen so wählt, dass sie für reelle x reell werden. Diese Darstellungen sind gültig für alle x innerhalb eines um den Punkt $x=1$ mit dem Halbmesser Eins beschriebenen Kreises, resp. innerhalb der Halbebene auf der positiven Seite der oben erwähnten Geraden.

Für die Umgebung des unendlich fernen Punktes hat man endlich die particulären Integrale

$$\text{(21)}\qquad x^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha+1-\gamma,\alpha+1-\beta,\frac{1}{x}\right)$$

$$=(x-1)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta,\alpha+1-\beta,\frac{1}{1-x}\right),$$

$$\text{(22)}\qquad x^{-\beta}F\left(\beta,\beta+1-\gamma,\beta+1-\alpha,\frac{1}{x}\right)$$

$$=(x-1)^{-\beta}F\left(\beta,\gamma-\alpha,\beta+1-\gamma,\frac{1}{1-x}\right).$$

Diese Reihen convergiren, so lange der absolute Betrag von x resp. $1-x$ grösser ist als Eins.

Von den linearen Relationen zwischen diesen verschiedenen Reihen mögen hier nur die beiden folgenden angeführt werden. Es ist

$$\text{(23)}\qquad F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x)=\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\,\Pi(-\gamma)}{\Pi(\alpha-\gamma)\,\Pi(\beta-\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma,x)$$

$$+\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\,\Pi(\gamma-2)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}F(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma,x)x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta},$$

und

$$\text{(24)}\qquad \frac{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha+\beta-1)}F(\alpha,\beta,\alpha+\beta,x)$$

$$=-F(\alpha,\beta,1,1-x)\log(1-x)-G(\alpha,\beta,1-x)$$

$$+F(\alpha,\beta,1,1-x)\Big(2\Psi(0)-\Psi(\alpha-1)-\Psi(\beta-1)\Big),$$

wo Π und Ψ die bekannten Gaussischen Zeichen sind. Um die folgenden Entwicklungen etwas übersichtlicher zu machen, sollen noch folgende Bezeichnungen gebraucht werden:

$$
(25)\left\{
\begin{aligned}
H_1(x) &= F\left(\tfrac{11}{12}, \tfrac{5}{12}, \tfrac{16}{12}, x\right),\\
H_2(x) &= F\left(\tfrac{7}{12}, \tfrac{1}{12}, \tfrac{8}{12}, x\right),\\
H_3(x) &= F\left(\tfrac{11}{12}, \tfrac{5}{12}, 1, 1-x\right),\\
H_4(x) &= F\left(\tfrac{11}{12}, \tfrac{5}{12}, 1, 1-x\right)\log(x-1)+G\left(\tfrac{11}{12}, \tfrac{5}{12}, 1-x\right),\\
H_5(x) &= F\left(\tfrac{11}{12}, \tfrac{7}{12}, \tfrac{18}{12}, \tfrac{1}{x}\right),\\
H_6(x) &= F\left(\tfrac{5}{12}, \tfrac{1}{12}, \tfrac{6}{12}, \tfrac{1}{x}\right),\\
K_1(x) &= F\left(\tfrac{5}{12}, -\tfrac{1}{12}, \tfrac{4}{12}, x\right),\\
K_2(x) &= F\left(\tfrac{13}{12}, \tfrac{7}{12}, \tfrac{20}{12}, x\right),\\
K_3(x) &= F\left(\tfrac{5}{12}, -\tfrac{1}{12}, 1, 1-x\right),\\
K_4(x) &= F\left(\tfrac{5}{12}, -\tfrac{1}{12}, 1, 1-x\right)\log(x-1)+G\left(\tfrac{5}{12}, -\tfrac{1}{12}, 1-x\right),\\
K_5(x) &= F\left(\tfrac{5}{12}, \tfrac{13}{12}, \tfrac{18}{12}, \tfrac{1}{x}\right),\\
K_6(x) &= F\left(-\tfrac{1}{12}, \tfrac{7}{12}, \tfrac{6}{12}, \tfrac{1}{x}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

III.

Die Grössen ω, ω', η, η' sind nun aus den Ausdrücken (25) linear zusammengesetzt. Da jedoch die so definirten Functionen wegen der darin auftretenden algebraischen und logarithmischen Glieder mehrdeutig, resp. unendlichvieldeutig sind, so soll das Gebiet der g durch einen geradlinigen Verzweigungsschnitt, welcher von dem Punkte $g=1$ über $g=0$ nach $g=-\infty$ verläuft, in ein einfach zusammenhängendes verwandelt werden. Innerhalb dieses Gebietes sind dann Ω, Ω', H, H' eindeutige Functionen und man kann jetzt die Integrationsconstanten so bestimmen, dass die Werthe von ω, ω', η, η', welche durch die Ausdrücke (25) geliefert werden, identisch sind mit denen, welche die Integrale (5) ergeben, wobei vorläufig g_2 und g_3 immer reell sein sollen.

Zu dem Ende seien zunächst e_1, e_2, e_3 reell, also g reell und >1. Dann ist einerseits, weil $e_1 > e_2 > e_3$,

$$
(26)\quad \begin{cases}
\omega = \displaystyle\int_{e_3}^{e_2} ds\left\{\ \ 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)\right\}^{-\frac{1}{2}}, \\[2ex]
\omega' = \displaystyle i\int_{e_2}^{e_1} ds\left\{-4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)\right\}^{-\frac{1}{2}}, \\[2ex]
\eta = -\displaystyle\int_{e_3}^{e_2} s\,ds\left\{\ \ 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)\right\}^{-\frac{1}{2}}, \\[2ex]
\eta' = -\displaystyle i\int_{e_2}^{e_1} s\,ds\left\{-4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)\right\}^{-\frac{1}{2}},
\end{cases}
$$

wo die Wurzeln sämmtlich reell und positiv sind. Andrerseits hat man nach einer kleinen Umformung für ω und ω', sowie für η und η' Ausdrücke von der Gestalt

$$
C g_2^{-\frac{1}{4}} H_6(g) + C' g_2^{\frac{1}{4}} \frac{g_3}{g_2^2} H_5(g)
$$

und

$$
C g_2^{\frac{1}{4}} K_6(g) + C' g_2^{-\frac{1}{4}} \frac{g_3}{g_2} K_5(g).
$$

Wenn man nun g_2 für den Augenblick als constant ansieht und die Perioden als Functionen von g_3 betrachtet, so enthalten diese Ausdrücke offenbar nichts anderes, als die Entwicklung der Perioden nach steigenden Potenzen von g_3. Man erhält also die Constanten C und C' sofort, wenn man $g_2 = 1$ setzt und die Werthe aufsucht, welche die Perioden und ihre ersten Ableitungen nach g_3 für $g_3 = 0$ annehmen. In diesem Falle ist

$$
e_1 = \frac{1}{2}, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = -\frac{1}{2};
$$

also wird, wenn man setzt

$$
(27)\quad \begin{cases}
\omega_0 = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} ds\,(4s^3 - s)^{-\frac{1}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}}, \\[2ex]
\eta_0 = -\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} s\,ds\,(4s^3 - s)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,\cos^2\varphi\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}},
\end{cases}
$$

und für $g_2 = 1$ und $g_3 = 0$,

$$\omega = \omega_0, \quad \omega' = i\omega_0, \quad \eta = \eta_0, \quad \eta' = -i\eta_0.$$

Die Werthe der ersten Ableitungen erhält man aus (11) und (12), wenn man $g_2' = 0$, $\xi = g_3$, $g_3' = 1$, also $P = 3$, $Q = 0$, und $R = \frac{1}{4}$ setzt. Dieselben werden dann resp.

$$-3\eta_0, \quad +3\eta_0 i, \quad \frac{1}{4}\omega_0, \quad \frac{i}{4}\omega_0.$$

Hieraus folgt schliesslich

$$(28)\quad \begin{cases} \omega = \omega_0 g_2^{-\frac{1}{4}} H_6(g) - 3\eta_0 g_2^{\frac{1}{4}} \frac{g_3}{g_2^2} H_5(g), \\ \omega' = i\omega_0 g_2^{-\frac{1}{4}} H_6(g) + 3i\eta_0 g_2^{\frac{1}{4}} \frac{g_3}{g_2^2} H_5(g), \\ \eta = \eta_0 g_2^{\frac{1}{4}} K_6(g) + \frac{1}{4}\omega_0 g_2^{-\frac{1}{4}} \frac{g_3}{g_2} K_5(g), \\ \eta' = -i\eta_0 g_2^{\frac{1}{4}} K_6(g) + \frac{i}{4}\omega_0 g_2^{-\frac{1}{4}} \frac{g_3}{g_2} K_5(g). \end{cases}$$

Die Bedingung $\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{1}{2}\pi i$ liefert, weil $4\eta_0\omega_0 = \pi$, noch die Relation

$$1 = \frac{1}{36g} \cdot K_5 H_5 + K_6 H_6.$$

Die Gleichung $\eta\omega' - \eta'\omega =$ constans ist übrigens eine einfache Folge aus den Gleichungen (11), wie man sich leicht durch blosses Differentiiren dieses Ausdrucks überzeugt. Da nun die Perioden als Functionen von ξ betrachtet den Charakter ganzer rationaler Functionen besitzen, abgesehen von den in endlicher Anzahl vorhandenen Ausnahmestellen, so muss die Constante, wenn sie für irgend einen Punkt ξ gleich $\frac{1}{2}\pi i$ ist, stets diesen Werth besitzen, verausgesetzt, dass man in (6) für die Perioden ein System simultaner Werthe substituirt.

Es seien nun wieder wie vorhin die drei Wurzeln reell, also $g > 1$ und reell, so werden, wenn g von $+\infty$ auf $+1$ zurückt, zwei Wurzeln einander gleich, und zwar wird wegen der Relationen (4) für $g_3 > 0$ $e_2 = e_3$, für $g_3 < 0$ $e_1 = e_2$; im ersten Falle bleiben ω und η endlich, während ω' und η' unendlich werden, im zweiten Falle findet das Umgekehrte statt. Es sei zunächst g_3 positiv, dann hat man, weil ω und η endlich bleiben müssen,

$$\omega = C g_2^{-\frac{1}{4}} g^{\frac{5}{12}} H_3 \quad \eta = C' g_2^{\frac{1}{4}} g^{-\frac{1}{12}} K_3.$$

Zur Bestimmung von C und C' setze man $g = 1$, $g_3 = 1$, also $g_2 = 3$, dann wird $e_1 = 1$, $e_2 = e_3 = -\frac{1}{2}$ und

$$\frac{\pi}{\sqrt{6}} = \frac{C}{\sqrt[4]{3}}, \quad \frac{\pi}{\sqrt{24}} = C'\sqrt[4]{3},$$

oder

(29) $$\omega = \frac{\pi}{\sqrt[4]{12}} g_2^{-\frac{1}{4}} g^{\frac{5}{12}} H_3(g), \quad \eta = \frac{\pi}{\sqrt[4]{1728}} g_2^{\frac{1}{4}} g^{-\frac{1}{12}} K_3(g),$$

wofür man auch etwas einfacher schreiben kann

(30) $$\omega = \frac{\pi}{\sqrt{54}} \frac{g_2 g_3^{\frac{1}{6}}}{g_3} H_3(g), \quad \eta = \frac{\pi}{\sqrt{24}} g_3^{\frac{1}{6}} K_3(g).$$

Da nach (18)

$$g^{\frac{5}{12}} H_3 = F\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{12}, 1, \frac{g-1}{g}\right),$$

$$g^{-\frac{1}{12}} K_3 = F\left(-\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, 1, \frac{g-1}{g}\right),$$

so erhält man durch Vergleichung von (28) und (29) für ein ins Unendliche wachsendes g die Relationen

$$\omega_0 \sqrt[4]{12} = \pi F\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{12}, 1, 1\right),$$

$$\eta_0 \sqrt[4]{1728} = \pi F\left(-\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, 1, 1\right)$$

oder

(31) $$\begin{cases} \omega_0 \sqrt[4]{12}\, \Pi\left(-\frac{1}{12}\right) \Pi\left(-\frac{5}{12}\right) = \pi\sqrt{\pi}, \\ \eta_0 \sqrt[4]{1728}\, \Pi\left(\frac{1}{12}\right) \Pi\left(-\frac{7}{12}\right) = \pi\sqrt{\pi}. \end{cases}$$

Um ω' zu finden, berücksichtige man, dass $\frac{\omega'}{\omega}$ die Form

$$C + C'\frac{H_4}{H_3} = C + C' \log(g-1) + C' \frac{G\left(\frac{11}{12}, \frac{5}{12}, 1-g\right)}{H_3}$$

besitzen muss, oder dass die Grösse $\frac{1}{\pi i} \log h$ sich in der Gestalt

$$C + C' \log(g-1) + (1-g)\,\mathfrak{P}(1-g)$$

darstellen lässt. Man erhält also C und C' sofort, wenn man h nach Potenzen von $g-1$ entwickelt. Zu dem Ende setze man in der Gleichung $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$

$$s = n \sin\left(N - \frac{\pi}{6}\right), \quad n = g^{\frac{1}{3}} g^{\frac{1}{6}}.$$

Es wird dann

$$\cos 3N = \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad \sin 3N = \sqrt{\frac{g-1}{g}}, \quad \operatorname{tg} 3N = \sqrt{g-1},$$

also, wenn $g = 1 + k^2$ gesetzt wird ($k > 0$), so erhält man

$$N = \frac{1}{3}\left(k - \frac{k^3}{3} + \frac{k^5}{5} - \cdots\right),$$

$$\operatorname{tg} N = \frac{1}{3} k + k^3 \mathfrak{P}(k^2),$$

$$e_1 = n \sin\left(N - \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right), \quad e_2 = n \sin\left(N - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$e_3 = n \sin\left(N - \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{2 \operatorname{tg} N}{\sqrt{3} + \operatorname{tg} N} = \frac{2}{3\sqrt{3}} k + k^3 \mathfrak{P}(k^2).$$

Hiernach wird also h ausgedrückt durch eine Reihe von der Form

$$\frac{\sqrt{g-1}}{24\sqrt{3}} \left(1 + (g-1)\, \mathfrak{P}(g-1)\right),$$

und es ist

$$C = -\frac{\log 24\sqrt{3}}{\pi i}, \quad C' = \frac{1}{2\pi i},$$

oder

$$(32) \quad \omega' = \frac{\omega}{2\pi i}\left(\log(g-1) - 2\log 24\sqrt{3}\right) - \frac{i}{\sqrt{216}} \frac{g_2 g_3^{\frac{1}{6}}}{g_3} G\left(\frac{11}{12}, \frac{5}{12}, 1-g\right),$$

oder auch mit Berücksichtigung von (20)

$$(33) \quad \omega' = \frac{\omega}{2\pi i}\left(\log\frac{g-1}{g} - 2\log 24\sqrt{3}\right) - \frac{i}{\sqrt[4]{192}}\, g_2^{-\frac{1}{4}}\, G\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{12}, \frac{g-1}{g}\right).$$

Durch ähnliche Schlüsse gelangt man zu dem Ausdruck für η'. Beachtet man, dass $\frac{\eta'}{\eta}$ die Form

$$C + C' \log(g-1) + C' \frac{G\left(\frac{5}{12}, -\frac{1}{12}, 1-g\right)}{K_3}$$

besitzt, dass ausserdem wegen (6) und (29) oder (30)

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{\omega'}{\omega} - \frac{\pi i}{2\eta\omega} = \frac{\omega'}{\omega} - \frac{6i}{\pi} + (g-1)\, \mathfrak{P}(g-1)$$

ist, so erhält man

$$(34)\qquad \eta' = \frac{\eta}{2\pi i}\left(\log(g-1) + 12 - 2\log 24\sqrt{3}\right)$$
$$- \frac{i}{\sqrt{96}}\, g_3^{\frac{1}{6}}\, G\left(\frac{5}{12}, -\frac{1}{12}, 1-g\right)$$
$$(35)\qquad = \frac{\eta}{2\pi i}\left(\log\frac{g-1}{g} + 12 - 2\log 24\sqrt{3}\right)$$
$$- \frac{i}{\sqrt{96}\sqrt[4]{3}}\, g_2^{\frac{1}{4}}\, G\left(-\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{g-1}{g}\right).$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in (6) liefert noch die Relation

$$12 g^{-\frac{1}{3}} = 12 H_3(g) K_3(g) + H_3(g)\, G\left(\frac{5}{12}, -\frac{1}{12}, 1-g\right)$$
$$- K_3(g)\, G\left(\frac{11}{12}, \frac{5}{12}, 1-g\right).$$

Um die Ausdrücke für ein negatives g_3 zu ermitteln, ist es nicht erforderlich, die ebengemachten Schlüsse zu wiederholen; ein Blick auf die Gleichungen (28) zeigt vielmehr, dass, wenn $-g_3$ für g_3 gesetzt wird, die Grössen ω, ω', η, η' übergehen in $-\omega' i$, ωi, $\eta' i$, $-\eta i$. Man erhält also die gewünschten Ausdrücke, wenn man in den Gleichungen (29), (30) etc. für g_3, ω, ω', η, η' einfach $-g_3$, $-\omega' i$, ωi, $\eta' i$, $-\eta i$ schreibt; also

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned}
\omega' &= \frac{\pi i}{\sqrt{54}}\,\frac{g_2(-g_3)^{\frac{1}{6}}}{g_3} H_3(g), \quad \eta' = -\frac{\pi i}{\sqrt{24}}(-g_3)^{\frac{1}{6}} K_3(g),\\
\omega &= -\frac{\omega'}{2\pi i}\left(\log(g-1) - 2\log 24\sqrt{3}\right)\\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{216}}\,\frac{g_2(-g_3)^{\frac{1}{6}}}{g_3}\, G\left(\frac{11}{12}, \frac{5}{12}, 1-g\right)\\
&= -\frac{\omega'}{2\pi i}\left(\log\frac{g-1}{g} - 2\log 24\sqrt{3}\right)\\
&\quad - \frac{1}{\sqrt[4]{192}}\, g_2^{-\frac{1}{4}}\, G\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{12}, \frac{g-1}{g}\right),\\
\eta &= -\frac{\eta'}{2\pi i}\left(\log(g-1) + 12 - 2\log 24\sqrt{3}\right)\\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{96}}(-g_3)^{\frac{1}{6}}\, G\left(\frac{5}{12}, -\frac{1}{12}, 1-g\right)\\
&= -\frac{\eta'}{2\pi i}\left(\log\frac{g-1}{g} + 12 - 2\log 24\sqrt{3}\right)\\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{96}\sqrt[4]{3}}\, g_2^{\frac{1}{4}}\, G\left(-\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{g-1}{g}\right).
\end{aligned}\right.$$

Von den in Vorstehendem entwickelten Ausdrücken haben offenbar diejenigen, in denen kein Logarithmus auftritt, in der Umgebung des Punktes $g = 1$ den Charakter einer ganzen rationalen Function, abgesehen natürlich von dem Fall, wo g_2 und g_3 gleichzeitig gleich Null oder Unendlich und $g = 1$ wird. Diese Ausdrücke lassen sich also mit Hülfe der Formeln (23) ohne Zweideutigkeit bis zur Umgebung des Punktes $g = 0$ fortsetzen, während bei den anderen wegen des Logarithmus eine von dem Wege der Fortsetzung abhängige Vieldeutigkeit stattfindet. Wir wollen dieselbe berücksichtigen, indem wir in (24) $\log(1-g) = \log(g-1) + \varepsilon\pi i$ setzen, wo ε eine beliebige ungerade Zahl bedeutet, die vorläufig $= \pm 1$ sein soll. Ferner hat man nach den von Gauss gegebenen Formeln

$$2\Psi(0) - \Psi\left(-\tfrac{1}{12}\right) - \Psi\left(-\tfrac{7}{12}\right) = 2\log 24\sqrt{3} - \pi\sqrt{3},$$

$$2\Psi(0) - \Psi\left(-\tfrac{13}{12}\right) - \Psi\left(-\tfrac{7}{12}\right) = 2\log 24\sqrt{3} - 12 - \pi\sqrt{3},$$

folglich werden die Gleichungen (23) und (24)

$$H_3 = \frac{\Pi\left(-\frac{16}{12}\right)}{\Pi\left(-\frac{5}{12}\right)\Pi\left(-\frac{11}{12}\right)} H_1 + \frac{\Pi\left(-\frac{8}{12}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{12}\right)\Pi\left(-\frac{7}{12}\right)} g^{-\frac{1}{3}} H_2,$$

$$K_3 = \frac{\Pi\left(-\frac{4}{12}\right)}{\Pi\left(\frac{1}{12}\right)\Pi\left(-\frac{5}{12}\right)} K_1 + \frac{\Pi\left(-\frac{20}{12}\right)}{\Pi\left(-\frac{7}{12}\right)\Pi\left(-\frac{13}{12}\right)} g^{\frac{2}{3}} K_2,$$

$$\begin{aligned}\frac{\Pi\left(-\frac{7}{12}\right)\Pi\left(-\frac{7}{12}\right)}{\Pi\left(\frac{4}{12}\right)} H_1 &= -H_3\left(\log(g-1) - 2\log 24\sqrt{3}\right)\\ &\quad - G\left(\tfrac{11}{12}, \tfrac{5}{12}, 1-g\right) - H_3(\varepsilon\pi i + \pi\sqrt{3}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Pi\left(-\frac{7}{12}\right)\Pi\left(-\frac{13}{12}\right)}{\Pi\left(-\frac{8}{12}\right)} K_1 &= -K_3\left(\log(g-1) + 12 - 2\log 24\sqrt{3}\right)\\ &\quad - G\left(\tfrac{5}{12}, \tfrac{1}{12}, 1-g\right) - K_3(\varepsilon\pi i + \pi\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Wenn wir wieder zunächst $g_3 > 0$ voraussetzen, so erhält man aus (30)

$$\omega = \frac{\pi}{\sqrt{54}} \frac{\Pi\left(-\frac{4}{3}\right)}{\Pi\left(-\frac{5}{12}\right)\Pi\left(-\frac{11}{12}\right)} \frac{g_2 g_3^{\frac{1}{6}}}{g_8} H_1 + \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{\Pi\left(-\frac{2}{3}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{12}\right)\Pi\left(-\frac{7}{12}\right)} g_3^{-\frac{1}{6}} H_2,$$

$$\eta = \frac{\pi}{\sqrt{24}} \frac{\Pi\left(-\frac{1}{3}\right)}{\Pi\left(\frac{1}{12}\right)\Pi\left(-\frac{5}{12}\right)} g_3^{\frac{1}{6}} K_1 + \frac{\pi}{9\sqrt{24}} \frac{\Pi\left(-\frac{5}{3}\right)}{\Pi\left(-\frac{7}{12}\right)\Pi\left(-\frac{13}{12}\right)} \frac{g_2^2 g_3^{-\frac{1}{6}}}{g_8} K_2.$$

Diese Reihen enthalten offenbar die Entwicklung der Perioden nach steigenden Potenzen von g_2. Bezeichnet man deshalb die Werthe von ω und η für $g_2 = 0$, $g_3 = 1$ mit ω_1 und η_1, so ist

$$(37) \qquad \omega_1 = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{\Pi\left(-\frac{2}{3}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{12}\right)\Pi\left(-\frac{7}{12}\right)}, \quad \eta_1 = \frac{\pi}{\sqrt{24}} \frac{\Pi\left(-\frac{1}{3}\right)}{\Pi\left(\frac{1}{12}\right)\Pi\left(-\frac{5}{12}\right)}.$$

Hieraus folgt dann nach einigen Umformungen oder, indem man wieder wie früher die Differentialgleichungen (11) zur Bestimmung der Coefficienten von g_2 und g_2^2 verwendet,

$$(38) \qquad \omega = \omega_1 g_3^{-\frac{1}{6}} H_2(g) - \frac{\eta_1}{6} \frac{g_2 g_3^{\frac{1}{6}}}{g_3} H_1(g),$$

$$(39) \qquad \eta = \eta_1 g_3^{\frac{1}{6}} K_1(g) + \frac{\omega_1}{144} \frac{g_2^2 g_3^{-\frac{1}{6}}}{g_3} K_2(g).$$

Multiplicirt man ferner die oben angesetzten Gleichungen, welche Logarithmen enthalten, mit

$$\frac{i}{\sqrt{216}} \frac{g_2 g_3^{\frac{1}{6}}}{g_3} \quad \text{resp.} \quad \frac{i}{\sqrt{96}} g_3^{\frac{1}{6}},$$

so erhält man nach Ausführung der nöthigen Reductionen

$$(40) \qquad \omega' = \frac{-\varepsilon + i\sqrt{3}}{2} \omega_1 g_3^{-\frac{1}{6}} H_2(g) - \frac{-\varepsilon - i\sqrt{3}}{2} \frac{\eta_1}{6} \frac{g_2 g_3^{\frac{1}{6}}}{g_3} H_1(g),$$

$$(41) \qquad \eta' = \frac{-\varepsilon - i\sqrt{3}}{2} \eta_1 g_3^{\frac{1}{6}} K_1(g) + \frac{-\varepsilon + i\sqrt{3}}{2} \frac{\omega_1}{144} \frac{g_2^2 g_3^{-\frac{1}{6}}}{g_3} K_2(g).$$

Die für ein negatives g_3 geltenden Formeln erhält man wieder wie früher, nämlich

$$(42) \left\{ \begin{aligned} \omega' &= \quad i\omega_1(-g_3)^{-\frac{1}{6}} H_2(g) + \frac{i\eta_1}{6} \frac{g_2(-g_3)^{\frac{1}{6}}}{g_3} H_1(g), \\ \eta' &= -i\eta_1(-g_3)^{\frac{1}{6}} K_1(g) + \frac{i\omega_1}{144} \frac{g_2^2(-g_3)^{-\frac{1}{6}}}{g_3} K_2(g), \\ \omega &= -\frac{-\varepsilon + i\sqrt{3}}{2} i\omega_1(-g_3)^{-\frac{1}{6}} H_2(g) - \frac{-\varepsilon - i\sqrt{3}}{2} \frac{i\eta_1}{6} g_2(-g_3)^{\frac{1}{6}} H_1(g), \\ \eta &= \quad \frac{-\varepsilon - i\sqrt{3}}{2} i\eta_1(-g_3)^{\frac{1}{6}} K_1(g) - \frac{-\varepsilon + i\sqrt{3}}{2} \frac{i\omega_1}{144} \frac{g_2^2(-g_3)^{-\frac{1}{6}}}{g_3} K_2(g). \end{aligned} \right.$$

Aus den Gleichungen (37) und (6) folgt dann noch

$$\pi = \omega_1 \eta_1 \sqrt{12}, \quad 1 = K_1 H_2 + \frac{g}{32} K_2 H_1.$$

IV.

Durch die in dem letzten Abschnitt aufgestellten Ausdrücke ist für jedes Werthepaar $g_2\, g_3$ ein System von simultanen Werthen der Fundamentalperioden der Integrale erster und zweiter Gattung gegeben. Es ist dabei gleichgültig, wie man die Werthe der mehrdeutigen Grössen $g_2^{\frac{1}{4}}$, $g_3^{\frac{1}{6}}$, $\log(g-1)$ fixirt, vorausgesetzt natürlich, dass dieselben innerhalb einer jeden einzelnen Reihe von Ausdrücken dieselben sind. Ferner gestatten die verschiedenen Formen, welche im zweiten Abschnitt für die hier benutzten hypergeometrischen Reihen aufgeführt worden sind, zu bewirken, dass man für jedes beliebige g convergente Entwicklungen erhält. Es ist dazu nur erforderlich, von den Grössen

$$g,\ \frac{g}{g-1},\ 1-g,\ \frac{g-1}{1},\ \frac{1}{g},\ \frac{1}{g-1}$$

diejenige auszuwählen, deren absoluter Betrag kleiner als Eins ist. Nur die beiden Punkte $g=\frac{1}{2}\pm\frac{i}{2}\sqrt{3}$ machen eine Ausnahme. Für diese beiden Punkte liegen die eben genannten Grössen stets an der Grenze des Convergenzgebietes der verschiedenen Reihen. Da jedoch Ω, Ω', H, Θ' an diesen beiden Stellen den Charakter ganzer rationaler Functionen besitzen, so wollen wir diesen Ausnahmefall hier nicht weiter berücksichtigen.

Es ist nun noch übrig zu untersuchen, wie sich die Perioden als Functionen von ξ verhalten. Dieselben haben im Allgemeinen den Charakter einer ganzen rationalen Function; Ausnahmestellen können nur diejenigen Punkte ξ sein, in welchen eine der folgenden Gleichungen stattfindet:

$$g_2=0,\ g_2=\infty,\ g_3=0,\ g_3=\infty,\ g=1.$$

Denkt man sich alle diese singulären Punkte durch eine gebrochene Linie M einander verbunden, welche durch keinen Punkt der ξ-Ebene zweimal hindurch geht und ins Unendliche verläuft, wenn $\xi=\infty$ ebenfalls eine Ausnahmestelle ist, so ist durch diesen Schnitt die ganze ξ-Ebene in ein zweifach, resp. einfach zusammenhängendes Gebiet zerlegt. Innerhalb dieses Gebietes sind dann die Grössen ω, ω', η, η' eindeutig definirt, wenn man einem beliebigen nicht singulären Punkte ξ_0 ein bestimmtes Werthsystem $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}'$, $\bar{\eta}$, $\bar{\eta}'$, wie es durch die Formeln des vorigen Abschnittes gegeben ist, zuordnet, und die so definirten Functionen nach allen Punkten ξ hin fortsetzt, ohne jedoch die Linie M zu passiren. Zu beiden Seiten der Linie M werden offenbar $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}'$, $\bar{\eta}$, $\bar{\eta}'$ verschiedene Werthe besitzen können. Um sich von diesen Werthdifferenzen ein allgemeines Bild zu verschaffen, ist es nur nöthig, zu ermitteln, wie sich die im vorigen Abschnitt dargestellten ω, ω', η, η' verhalten, wenn ξ eine der Ausnahmestellen umwindet, während die Untersuchung über das Verhalten der Perioden in jedem einzelnen Punkte des Verzweigungsschnittes einfacher in jedem besonderen Falle besonders für gegebene g_2 und g_3 durchgeführt wird.

Es seien die Grössen a und b niemals $= 0$ oder $= \infty$, c niemals $= 0$ oder $= 1$ oder $= \infty$, dann kann ξ höchstens in einem der folgenden 13 Fälle singulärer Punkt sein:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$g_2 =$	a	a	0	0	0	0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$g_3 =$	b	∞	0	0	0	0	∞	b	0	∞	∞	∞	∞
$g =$	1	0	c	0	1	∞	0	∞	∞	c	0	1	∞

In den drei noch übrigen möglichen Fällen haben offenbar die Perioden den Charakter einer rationalen oder einer ganzen rationalen Function. In dem Falle (1) können die Perioden logarithmisch, in den Fällen (5) und (12) logarithmisch und algebraisch, in allen übrigen Fällen nur algebraisch unstetig werden. Es sind nun vier Gruppen von Fällen, nämlich $g = 0$, $g = \infty$, $g = c$, $g = 1$ zu unterscheiden.

Es sei zunächst $g = 0$. Man setze in den Formeln (38) bis (41) $\varepsilon = 1$ und bezeichne den zu $\varepsilon = -1$ gehörigen Werth von ω', η' mit ω'', η'', so ist $\omega + \omega' = \omega''$, $\eta + \eta' = \eta''$. Sind

$$\varepsilon_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

die beiden complexen cubischen Wurzeln der Einheit, also $-\varepsilon_3$ eine primitive sechste Wurzel der Einheit, ist ferner n die Ordnungszahl für das Null- oder Unendlichwerden von g_3, wo für ein Unendlichwerden von g_3 n negativ zu nehmen ist, schreibt man endlich die Gleichungen (38) bis (41) für einen beliebig fixirten Wurzelwerth von $g_3^{\frac{1}{6}}$ in der Gestalt

$$\omega = a + b, \quad \omega' = a\varepsilon_2 + b\varepsilon_3, \quad \omega'' = -a\varepsilon_3 - b\varepsilon_2,$$
$$\eta = c + d, \quad \eta' = c\varepsilon_2 + d\varepsilon_3, \quad \eta'' = -c\varepsilon_3 - d\varepsilon_2,$$

so sind offenbar alle Werthsysteme, welche $\omega, \omega', \omega'', \eta, \eta', \eta''$ annehmen können, wenn ξ den betreffenden singulären Punkt ein oder mehrere Male umwindet, in folgenden Ausdrücken enthalten:

$$\omega = a(-\varepsilon_3)^{-kn} + b(-\varepsilon_3)^{kn}, \quad \omega' = a\varepsilon_2(-\varepsilon_3)^{-kn} + b\varepsilon_3(-\varepsilon_3)^{kn},$$
$$\omega'' = -a\varepsilon_3(-\varepsilon_3)^{-kn} - b\varepsilon_2(-\varepsilon_3)^{kn},$$
$$\eta = c(-\varepsilon_3)^{-kn} + d(-\varepsilon_3)^{kn}, \quad \eta' = c\varepsilon_2(-\varepsilon_3)^{-kn} + d\varepsilon_3(-\varepsilon_3)^{kn},$$
$$\eta'' = -c\varepsilon_3(-\varepsilon_3)^{-kn} - b\varepsilon_2(-\varepsilon_3)^{kn},$$

wo k die Anzahl der Windungen bedeutet. Wenn $n \equiv \pm 1 \pmod{6}$, so erhält man folgende sechs Werthsysteme:

$$\begin{array}{cccccc}
\omega & \omega' & \omega'' & \eta & \eta' & \eta'', \\
-\omega' & \omega'' & \omega & -\eta' & \eta'' & \eta, \\
-\omega'' & \omega & -\omega' & -\eta'' & \eta & -\eta', \\
-\omega & -\omega' & -\omega'' & -\eta & -\eta' & -\eta'', \\
\omega' & -\omega'' & -\omega & \eta' & -\eta'' & -\eta, \\
\omega'' & -\omega & \omega' & \eta'' & -\eta & \eta'.
\end{array}$$

Wenn $n \equiv \pm 2 \pmod{6}$, so fällt das zweite, vierte und sechste Werthsystem fort; ist $n \equiv 3 \pmod{6}$, so findet nur ein Zeichenwechsel statt; ist endlich $n \equiv 0 \pmod{6}$, so haben die Perioden an der betreffenden Stelle den Charakter einer rationalen Function. Die Formeln (42) liefern offenbar ein analoges Resultat.

Wenn $g = \infty$, so erkennt man sofort, dass, wenn die Ordnungszahl von g_2 m und $m \equiv \pm 1 \pmod{4}$ ist, nur folgende vier Werthsysteme auftreten können:

$$\begin{array}{cccc}
\omega & \omega' & \eta & \eta', \\
-\omega' & \omega & -\eta' & \eta, \\
-\omega & -\omega' & -\eta & -\eta', \\
\omega' & -\omega & \eta' & -\eta,
\end{array}$$

Wenn $m \equiv 2 \pmod{4}$, so findet nur ein Zeichenwechsel statt, und wenn $m \equiv \pmod{4}$, so haben die Perioden den Charakter einer rationalen Function.

Wenn ferner $g = c$ oder $g = 1$ ist, so muss $3m - 2n = 0$, also $m = 2p$, $n = 3p$ sein; die algebraischen Glieder wechseln also für ein ungerades p ihr Zeichen, für ein gerades p werden sie rational. Ferner wächst, wenn $g = 1$, der Logarithmus beim Umkreisen der singulären Stelle um ein Vielfaches von $2\pi i$, also die eine Periode um ein Vielfaches der andern.

Hiernach sind also sämmtliche zu einem bestimmten Werthe von ξ gehörigen Werthe der Perioden in der allgemeinen Form

$$\omega = f\bar{\omega} + g\bar{\omega}', \quad \bar{\omega}' = f'\bar{\omega} + g'\bar{\omega}',$$
$$\eta = f\bar{\eta} + g\bar{\eta}', \quad \bar{\eta}' = f'\bar{\eta} + g'\bar{\eta}',$$

enthalten, wo wegen (6)

$$fg' - f'g = 1$$

sein muss. Der Weg, auf welchem man von ξ_0 nach ξ übergeht, lässt sich dabei stets so wählen, dass die ganzen Zahlen f, g, f', g'

alle beliebigen mit jener Bedingungsgleichung verträglichen Werthe annehmen.

Ich muss es mir hier versagen, auf die Folgerungen näher einzugehen, welche sich in Bezug auf den Zusammenhang zwischen den Invarianten g_2, g_3, g und der Grösse

$$h = e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}$$

aus den bisherigen Entwicklungen ziehen lassen. Es mag hier nur bemerkt werden, dass es möglich ist, g als Quotienten zweier Potenzreihen von h mit ganzzahligen Coefficienten darzustellen, welche unbedingt convergiren, so lange der absolute Betrag von h kleiner ist als Eins.

Dorpat, im April 1875.