Ueber trigonometrische Reihen.

Von Giulio Ascoli in Mailand.

In einer Abhandlung über trigonometrische Reihen (Borchardt's Journal, Bd. 71) hat Herr Heine folgenden Satz bewiesen:

Eine im allgemeinen stetige, nicht nothwendig endliche Function $f(x)$ lässt sich höchstens auf eine Art in eine trigonometrische Reihe von der Form

$$(1.)\qquad \sum_{0} (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

entwickeln, wenn die Reihe der Bedingung unterworfen ist, im allgemeinen in gleichem Grade zu convergiren.

Einige Zeit darauf zeigte Herr Cantor (dasselbe Journal Bd. 72 und 73), wie eine Function, die durch eine trigonometrische, für jeden Werth von x allgemein zu reden convergente Reihe gegeben ist, sich nicht durch eine andere Reihe derselben Form darstellen lasse. Hieraus dürfte zu folgern sein, dass die in Heine's Satze gemachten Voraussetzungen, sowohl über die Stetigkeit der Function, als auch über die Art der Convergenz der Reihe, unnöthig sind.

Auch scheint mir, dass, wenn eine nach dem Intervall 2π periodisch sich wiederholende Function, die im allgemeinen continuirlich und so beschaffen ist, dass die 2τ Hauptintegrale

$$\int_{x_{\sigma-1}-\eta}^{x_{\sigma-1}-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_{\sigma-1}+\eta} f(x)\,dx, \quad \int_{x_{\sigma-1}-\eta}^{x_{\sigma-1}-\varepsilon} f(x)\,(x_{\sigma-1}-x)\,dx + \int_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_{\sigma-1}+\eta} f(x)\,(x_{\sigma-1}-x)\,dx$$

$$(\sigma = 1, 2, \ldots, \tau),$$

wo die Punkte $x_0\ (=0)$, $x_1, \ldots x_{\tau-1}$ nicht nothwendigerweise alle singuläre Punkte der gegebenen Function sind, bei *unendlichem* Abnehmen der Grösse ε convergiren, allgemein zu reden, d. h. ohne eine Ausnahme für einzelne Punkte auszuschliessen, durch eine trigonometrische Reihe der Form (1) darstellbar ist, die Entwickelung nicht nur einzig, sondern gerade die Fourier'sche sein muss.

Diesen Satz versuche ich in der vorliegenden Abhandlung nach der Methode Riemann's (siehe dessen Arbeit: Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe) zu beweisen.

Es sei also die Function $f(x)$ durch eine Reihe von der Form (1) darstellbar, und sie genüge den soeben genannten Bedingungen. Da der Voraussetzung nach $f(x)$ im allgemeinen continuirlich ist, so wird man das Intervall zwischen Null und 2π in eine endliche Anzahl Intervalle theilen können, die zwischen $x_0 (= 0)\, x_1$, $x_1 x_2, \ldots,$ $x_{\sigma-1} x_\sigma, \ldots, x_{\tau-1} x_\tau$ $(= 2\pi)$ liegen und die so beschaffen sind, dass für jeden Zwischenwerth derselben die Function stetig ist. Betrachten wir insbesondere die Entfernung zwischen $x_{\sigma-1}$ und x_σ und untersuchen wir, welche Werthe die gegebene Function durchläuft, wenn man sich einem Grenzwerthe ($x_{\sigma-1}$ z. B.) ins Unendliche nähert. Lässt sich eine Grösse angeben, wie gross sie auch sei, deren Werth nie vom absolutem Werthe der Function übertroffen wird bei unendlichem Annähern an den Werth $x_{\sigma-1}$, so sagt man, die Function sei endlich für $x = x_{\sigma-1} + 0$, entweder convergirend, was z. B. bei der Function $\operatorname{arctg} \frac{1}{x - x_{\sigma-1}}$, für welche $f(x_{\sigma-1} + 0) = \frac{\pi}{2}$, der Fall ist, oder keinem Werthe zustrebend, wie dies bei der Function $\sin \frac{1}{x - x_{\sigma-1}}$ eintritt. Wenn aber bei unendlichem Abnehmen von ε, $f(x_{\sigma-1} + \varepsilon)$ zuletzt jede beliebig gegebene Grösse überschreitet, so sagt man die Function werde unendlich für $x = x_{\sigma-1} + 0$. Es ist nützlich, zwei Arten von Unendlichwerden der Functionen zu unterscheiden: je nachdem nämlich die Function in der äussersten Nähe von $x_{\sigma-1} + 0$ dem absoluten Werthe nach nie abnimmt, wie z. B. $\pm \frac{1}{x - x_{\sigma-1}}$, oder unendlich viele Maxima und Minima hat, wie z. B. $\frac{1}{x - x_{\sigma-1}} \sin \frac{1}{x - x_{\sigma-1}}$. In den Punkten x_0, x_1, .. kann $f(x)$ ohne Bedeutung sein, wie z. B. $\frac{1}{x - x_0}$, $\sin \frac{1}{x - x_1}$, oder auch einen Werth besitzen, wie z. B. die Reihe $\psi(x) = \sum_0 \frac{\sin nx}{n}$, welche für $x = 0$ gleich Null ist, während doch $\psi(+0) = \frac{\pi}{2}$ und $\psi(-0) = -\frac{\pi}{2}$ ist. Wir nehmen ferner an, dass unter den Punkten x_0, x_1, ... sich auch solche befinden, für welche $f(x)$ stetig ist.

Von der Function $f(x)$ wird also vorausgesetzt

1) dass sie, allgemein zu reden, stetig sei.

2) dass die 2τ Hauptintegrale

$$\int\limits_{x_{\sigma-1}-\eta}^{x_{\sigma-1}-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_{\sigma-1}+\eta} f(x)\,dx\,,\quad \int\limits_{x_{\sigma-1}-\eta}^{x_{\sigma-1}-\varepsilon} f(x)\,(x_{\sigma-1}-x)\,dx + \int\limits_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_{\sigma-1}+\eta} f(x)\,(x_{\sigma-1}-x)\,dx$$

$$(\sigma = 1, 2, \ldots, \tau)$$

bei unendlichem Abnehmen der Grösse ε convergiren.

Diese Bedingung beschränkt offenbar die Arten des Unendlichwerdens der gegebenen Function.

3) dass sie für jeden Werth von x durch eine trigonometrische Reihe der Form (1) darstellbar sei, ausgenommen für die Werthe x_0, $x_1, \ldots, x_\tau$, für welche *nichts über die Bedeutnng der Reihe vorausgesetzt wird.*

Für jeden Zwischenwerth im Intervalle $x_{\sigma-1} x_\sigma$ ist nun wegen der Convergenz der Reihe (1)

$$\lim\,(a_n \sin nx + b_n \cos nx) = 0 \quad (n = \infty),$$

mithin einem bekannten Satze gemäss (s. diese Annalen Bd. IV. Seite 139)

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \quad (n = \infty).$$

Folglich hat die Function

$$F(x) = b_0 \frac{x^2}{2} - \sum_0 \frac{a_n \sin nx + b_n \cos nx}{n^2}$$

(s. Riemannn S. 25 und fg.) diese Eigenschaften:

1) Ihr Werth $F(x)$ ändert sich mit x stetig.

2) Es ist

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha^2} = \sum_0 (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

für alle Werthe von x, für welche die Reihe (1) convergirt.

3) $$\frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha}$$

wird stets mit α unendlich klein.

4) Die Reihe, welcher $F(x)$ gleich ist, convergirt in gleichem Grade. (S. die Abhandlung von Heine S. 356.) Der letzten Eigenschaft gemäss haben wir also

$$-\frac{A_n}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left(F(t) - b_0 \frac{t^2}{2}\right) \cos n\,(t-x)\,dt\,.$$

Es sei $a_{\sigma-1}$ eine zwischen $x_{\sigma-1}$ und x_σ liegende Grösse, und es werde das Integral betrachtet:

$$\varphi_{\sigma-1}(x) = \int\limits_{a_{\sigma-1}}^{x} f(x)\,dx \quad (\sigma = 1, \cdots, \tau)\,,$$

welches eine continuirliche Function von x für alle Werthe im Intervalle $x_{\sigma-1}\, x_\sigma$ (die Grenzen ausgenommen) ist. Es soll nun das Verhalten der Function $\varphi_{\sigma-1}(x)$ für den Fall untersucht werden, dass man einem Grenzwerthe, z. B. $x_{\sigma-1}$, sich unendlich nähert. Setzt man der Einfachheit halber $\sigma = 1$, so wird das Integral

$$\int_{a_0}^{x} f(x)\, dx,$$

wenn die Function $f(x)$ für $x = +0$ endlich bleibt, offenbar convergiren, ähnlich wie z. B. die Integrale:

$$\int_{a_0}^{x} d\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right) = \int_{a_0}^{x}\left(2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) dx = x^2 \sin\frac{1}{x} - a_0^2 \sin\frac{1}{a_0},$$

$$\int_{a_0}^{x} \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \int_{a_0}^{x} \frac{\pi - x}{2}\, dx = \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} - \left(\frac{\pi a_0}{2} - \frac{a_0^2}{4}\right).$$

Wenn aber für $x = +0$ die Function $f(x)$ unendlich gross wird, und dabei dem absoluten Werthe nach niemals abnimmt, so kann das Integral convergiren oder nicht, ähnlich wie die Integrale:

$$\int_{a_0}^{x} \frac{dx}{x^\nu} = \frac{x^{1-\nu}}{1-\nu} - \frac{a_0^{1-\nu}}{1-\nu}\,(0 < \nu < 1), \qquad \int_{a_0}^{x} \frac{dx}{x} = lx - la_0.$$

Hat endlich $f(x)$ für $x = +0$ unendlich viele Maxima und Minima, und wird dabei unendlich gross, so kann das Integral einer bestimmten Grenze zustreben, wie z. B.

$$\int_{a_0}^{x} d\left(x \cos\frac{1}{x}\right) = \int_{a_0}^{x}\left(\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right) dx = x\cos\frac{1}{x} - a_0 \cos\frac{1}{a_0},$$

oder auch unbestimmt sein, wie

$$\int_{a_0}^{x} d\sin\frac{1}{x} = \int_{a_0}^{x}\left(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\right) dx = \sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{a_0},$$

u. s. w.

Auch das Integral

$$F_{\sigma-1}(x) = \int_{a_{\sigma-1}}^{x} \varphi_{\sigma-1}(x)\, dx \qquad (\sigma = 1, \cdots, \tau)$$

stellt eine Function, die *zwischen* $x_{\sigma-1}\, x_\sigma$ stetig ist, dar, und welche in diesem Intervalle $f(x)$ als zweiten Differentialquotient hat. Die zwei Functionen $F(x)$ und $F_{\sigma-1}(x)$ sind also continuirlich, wenn $x_{\sigma-1} < x < x_\sigma$ ist, die erste auch an den Grenzen, und haben $f(x)$ als zweiten Differentialquotienten.

Von der Function

$$\Theta_{\sigma-1}(x) = F(x) - F_{\sigma-1}(x) \qquad (\sigma = 1, \cdots, \tau)$$

wird man daher sagen können

1) dass sie stetig für jeden Zwischenwerth im Intervalle $x_{\sigma-1} x_\sigma$,

2) dass ihr zweiter Differentialquotient Null ist in demselben Intervalle.

Wenn man nun statt $x_{\sigma-1}$, x_σ die etwas engeren Grenzen $x_{\sigma-1} + \varepsilon$, $x_\sigma - \varepsilon$ einführt, wobei ε beliebig klein ist, so wird $\Theta_{\sigma-1}(x)$ continuirlich auch an den Grenzen sein, und folglich gleich einem Ausdrucke von der Form $c_{\sigma-1} x + c'_{\sigma-1}$ (wo $c_{\sigma-1}$, $c'_{\sigma-1}$ Constanten sind) für jeden Werth im Intervalle und für die Grenzwerthe $x_{\sigma-1} + \varepsilon$, $x_\sigma - \varepsilon$ sein. Dass dies stattfindet, wurde von Herrn Schwarz aus Zürich bewiesen (s. Borchardt's Journal Bd. 72, S. 141). Da nun $F(x)$ überall stetig ist, so wird die vorige Gleichung für jeden Werth von x im Intervalle $x_{\sigma-1} x_\sigma$ gelten und folglich

$$F(x_{\sigma-1}) = F_{\sigma-1}(x_{\sigma-1} + 0) + c_{\sigma-1} x_{\sigma-1} + c'_{\sigma-1},$$
$$F(x_\sigma) = F_{\sigma-1}(x_\sigma - 0) + c_{\sigma-1} x_\sigma + c'_{\sigma-1}$$

sein; das Integral

$$\int_{a_{\sigma-1}}^{x} \varphi_{\sigma-1}(x)\, dx \qquad (\sigma = 1, \cdots, \tau)$$

convergirt also für $x = x_{\sigma-1} + 0, = x_\sigma - 0$.

Betrachten wir jetzt die Relation

$$-\frac{A_n}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(F(t) - b_0 \frac{t^2}{2}\right) \cos n(t-x)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon=0} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} \int_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon} \left(F(t) - b_0 \frac{t^2}{2}\right) \cos n(t-x)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon=0} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} \int_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon} \left(F_{\sigma-1}(t) + c_{\sigma-1} t + c'_{\sigma-1} - b_0 \frac{t^2}{2}\right) \cos n(t-x)\, dt.$$

Offenbar ist:

$$\int_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon} \left(F_{\sigma-1}(t) + c_{\sigma-1} t + c'_{\sigma-1} - b_0 \frac{t^2}{2}\right) \cos n(t-x)\, dt$$

$$= \left[\left(F_{\sigma-1}(t) + c_{\sigma-1} t + c'_{\sigma-1} - b_0 \frac{t^2}{2}\right) \frac{\sin n(t-x)}{n}\right]_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon}$$

$$- \frac{1}{n} \int_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon} \left(\varphi_{\sigma-1}(t) + c_{\sigma-1} - b_0 t\right) \sin n(t-x)\, dt,$$

folglich wird:

$$\frac{A_n}{n} = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon=0} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} \int\limits_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon} \left(\varphi_{\sigma-1}(t) + c_{\sigma-1} - b_0 t\right) \sin n(t-x)\, dt.$$

Andrerseits ist:

$$\int\limits_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon} \left(\varphi_{\sigma-1}(t) + c_{\sigma-1} - b_0 t\right) \sin n(t-x)\, dt$$

$$= - \left[\left(\varphi_{\sigma-1}(t) + c_{\sigma-1} - b_0 t\right) \frac{\cos n(t-x)}{n}\right]_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon}$$

$$+ \frac{1}{n} \int\limits_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon} \left(f(t) - b_0\right) \cos n(t-x)\, dt,$$

also

$$\frac{A_n}{n} = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon=0} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} \left[\left(\varphi_{\sigma-1}(t) + c_{\sigma-1} - b_0 t\right) \frac{\cos n(t-x)}{n}\right]_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon}$$

$$+ \frac{1}{\pi}\frac{1}{n} \lim_{\varepsilon=0} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} \int\limits_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon} \left(f(t) - b_0\right) \cos n(t-x)\, dt,$$

welche Zerlegung möglich ist, da das Hauptintegral

$$\lim_{\varepsilon=0} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} \int\limits_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon} f(t) \cos n(t-x)\, dt$$

convergirt. Es ist nun leicht zu zeigen, dass unter den für die Function $f(x)$ gemachten Voraussetzungen

$$\lim_{\varepsilon=0} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} \left[\left(\varphi_{\sigma-1}(t) + c_{\sigma-1} - b_0 t\right) \frac{\cos n(t-x)}{n}\right]_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon} = 0$$

ist. In der That erhält man:

$$\left(\varphi_{\sigma-1}(x_\sigma-\varepsilon) + c_{\sigma-1} - b_0(x_\sigma-\varepsilon)\right) \frac{\cos n(x_\sigma-\varepsilon-x)}{n}$$

$$- \left(\varphi_\sigma(x_\sigma+\varepsilon) + c_\sigma - b_0(x_\sigma+\varepsilon)\right) \frac{\cos n(x_\sigma+\varepsilon-x)}{n}$$

$$= \left(\varphi_{\sigma-1}(x_\sigma-\varepsilon) + c_{\sigma-1} - \varphi_\sigma(x_\sigma+\varepsilon) - c_\sigma + 2 b_0 \varepsilon\right) \frac{\cos n(x_\sigma-x) \cos n\varepsilon}{n}$$

$$+ \left(\varphi_{\sigma-1}(x_\sigma-\varepsilon) + c_{\sigma-1} + \varphi_\sigma(x_\sigma+\varepsilon) + c_\sigma - 2 b_0 x_\sigma\right) \frac{\sin n(x_\sigma-x) \sin n\varepsilon}{n};$$

nun ist aber

$$\varphi_{\sigma-1}(x_\sigma - \varepsilon) = \int\limits_{a_{\sigma-1}}^{x_\sigma - \varepsilon} f(x)\,dx\,, \quad \varphi_\sigma(x_\sigma + \varepsilon) = \int\limits_{a_\sigma}^{x_\sigma + \varepsilon} f(x)\,dx\,,$$

folglich

$$\varphi_{\sigma-1}(x_\sigma - \varepsilon) - \varphi_\sigma(x_\sigma + \varepsilon) = \int\limits_{a_{\sigma-1}}^{x_\sigma - \varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{x_\sigma + \varepsilon}^{a_\sigma} f(x)\,dx\,,$$

und da das Hauptintegral der gegebenen Function convergirt, so strebt die Grösse

$$\varphi_{\sigma-1}(x_\sigma - \varepsilon) - \varphi_\sigma(x_\sigma + \varepsilon)$$

einer Grenze zu für $\varepsilon = +0$.

Um diese Grenze zu finden erinnern wir, dass

$$\frac{F(x_\sigma + \alpha) - 2F(x_\sigma) + F(x_\sigma - \alpha)}{\alpha}$$

oder

$$\frac{F_\sigma(x_\sigma + \alpha) + c_\sigma \alpha - F_\sigma(x_\sigma + 0) + F_{\sigma-1}(x_\sigma - \alpha) - c_{\sigma-1}\alpha - F_{\sigma-1}(x_\sigma - 0)}{\alpha}$$

mit α unendlich klein wird; nun ist

$$F_\sigma(x_\sigma + \alpha) = \int\limits_{a_\sigma}^{x_\sigma + \alpha} \varphi_\sigma(x)\,dx\,, \qquad F_\sigma(x_\sigma + 0) = \int\limits_{a_\sigma}^{x_\sigma + 0} \varphi_\sigma(x)\,dx\,,$$

$$F_{\sigma-1}(x_\sigma - \alpha) = \int\limits_{a_{\sigma-1}}^{x_\sigma - \alpha} \varphi_{\sigma-1}(x)\,dx\,, \qquad F_{\sigma-1}(x_\sigma - 0) = \int\limits_{a_{\sigma-1}}^{x_\sigma - 0} \varphi_{\sigma-1}(x)\,dx\,,$$

also

$$F_\sigma(x_\sigma + \alpha) - F_\sigma(x_\sigma + 0) = \int\limits_{+0}^{+\alpha} \varphi_\sigma(x_\sigma + x)\,dx\,,$$

$$F_{\sigma-1}(x_\sigma - \alpha) - F_{\sigma-1}(x_\sigma - 0) = -\int\limits_{+0}^{+\alpha} \varphi_{\sigma-1}(x_\sigma - x)\,dx\,,$$

folglich

$$\lim_{\alpha=0} \frac{1}{\alpha} \int\limits_{+0}^{+\alpha} \Big(\varphi_\sigma(x_\sigma + x) - \varphi_{\sigma-1}(x_\sigma - x)\Big)\,dx + c_\sigma - c_{\sigma-1}$$

$$= \varphi_\sigma(x_\sigma + 0) - \varphi_{\sigma-1}(x_\sigma - 0) + c_\sigma - c_{\sigma-1} = 0.$$

Keinem Zweifel unterliegt es, dass die Grösse

$$\Big(\varphi_{\sigma-1}(x_\sigma - \varepsilon) + \varphi_\sigma(x_\sigma + \varepsilon)\Big) \sin n\varepsilon$$

$$= n\Big(\varphi_{\sigma-1}(x_\sigma - \varepsilon) + \varphi_\sigma(x_\sigma + \varepsilon)\Big) \frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon} \cdot \varepsilon$$

für $\varepsilon = +0$ einer Grenze zustreben muss; aber die beiden Integrale

$$F_{\sigma-1}(x) = \int\limits_{a_{\sigma-1}}^{x} \varphi_{\sigma-1}(x)\, dx\,, \qquad F_\sigma(x) = \int\limits_{a_\sigma}^{x} \varphi_\sigma(x)\, dx$$

convergiren für $x = x_\sigma - 0$, $= x_\sigma + 0$, folglich ist

$$\lim_{\varepsilon=0} \Big(\varphi_{\sigma-1}(x_\sigma - \varepsilon) + \varphi_\sigma(x_\sigma + \varepsilon)\Big)\, \varepsilon = 0,$$

denn andernfalls hätte man

$$F_{\sigma-1}(x_\sigma - 0) - F_\sigma(x_\sigma + 0) = \pm\infty\,.$$

Sehr leicht ist es zu beweisen, dass auch die Grösse $[\varphi_{\tau-1}(2\pi - \varepsilon) - \varphi_0(\varepsilon) + c_{\tau-1} - c_0 - b_0 2\pi + 2 b_0 \varepsilon] \cos n(2\pi - x) \cos n\varepsilon$ $+ [\varphi_{\tau-1}(2\pi - \varepsilon) + \varphi_0(\varepsilon) + c_{\tau-1} + c_0 - b_0 2\pi] \sin n(2\pi - x) \sin n\varepsilon$ für $\varepsilon = +0$ der Null zustrebt.

In der That, $a_\tau = 2\pi + a_0$ gesetzt, haben wir

$$\lim_{\varepsilon=0} \Big(\varphi_{\tau-1}(2\pi - \varepsilon) - \varphi_\tau(2\pi + \varepsilon) + c_{\tau-1} - c_\tau\Big) = 0,$$

aber für hinlänglich kleine Werthe von x ist

$$\varphi_\tau(2\pi + x) = \int\limits_{a_\tau}^{2\pi + x} f(x)\, dx = \int\limits_{a_0}^{x} f(x)\, dx = \varphi_0(x)\,,$$

und da

$$F(x) - b_0 \frac{x^2}{2} = F(2\pi + x) - b_0 \frac{(2\pi + x)^2}{2}\,,$$

so hat man durch Differentiation

$$\varphi_0(x) - b_0 x + c_0 = \varphi_\tau(2\pi + x) + c_\tau - b_0(2\pi + x),$$

daher

$$c_\tau = c_0 + b_0 \cdot 2\pi\,,$$

und

$$\lim_{\varepsilon=0} \Big(\varphi_{\tau-1}(2\pi - \varepsilon) - \varphi_0(\varepsilon) + c_{\tau-1} - c_0 - b_0 2\pi\Big) = 0.$$

Wir haben also das Resultat gewonnen, dass

$$A_n = \frac{1}{\pi} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} \int\limits_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma - \varepsilon} f(t) \cos n(t - x)\, dt$$

für $\varepsilon = +0$ ist.

Die Gleichung

$$F(x) = b_0 \frac{x^2}{2} - \sum_1 \frac{a_n \sin nx + b_n \cos nx}{n^2}$$

giebt durch zweimalige Differentiation

$$f(x) = b_0 - \frac{d^2}{dx^2} \sum_1 \frac{a_n \sin nx + b_n \cos nx}{n^2}\,,$$

also

$$\lim_{\varepsilon=0} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} \int_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon} f(x)\,dx = b_0 2\pi + \lim_{\varepsilon=0} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} \Big[\varphi_{\sigma-1}(t) + c_{\sigma-1} - b_0 t\Big]_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon} = b_0 \cdot 2\pi .$$

Betreffs der Bedeutung der Reihe in den Punkten $x_0, x_1, \ldots$ wurde anfangs keine Voraussetzung gemacht; was aber bemerkenswerth scheint, ist, dass, wenn die Reihe für einen Unstetigkeitspunkt $x = x_\nu$ z. B. convergirt, und wenn die Function $f(x_\nu + \varepsilon) + f(x_\nu - \varepsilon)$ bei unendlichem Abnehmen der Grösse ε einer Grenze sich nähert, man alsdann hat

$$\tfrac{1}{2}\Big(f(x_\nu + 0) + f(x_\nu - 0)\Big) = \sum_0 (a_n \sin nx_\nu + b_n \cos nx_\nu) .$$

In der That ist:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x_\nu + \alpha) - 2F(x_\nu) + F(x_\nu - \alpha)}{\alpha^2} = \sum_0 (a_n \sin nx_\nu + b_n \cos nx_\nu) ,$$

während andrerseits für hinlänglich kleine α (solche nämlich, dass $x_\nu + \alpha < x_{\nu+1}$, $x_\nu - \alpha > x_{\nu-1}$) sich ergiebt:

$$F(x_\nu + \alpha) + F(x_\nu - \alpha) = 2F(x_\nu) + \frac{\alpha}{1}\Big(F'(x_\nu + 0) - F'(x_\nu - 0)\Big)$$
$$+ \frac{\alpha^2}{1.2}\Big(F''(x_\nu + \theta\alpha) + F''(x_\nu - \theta\alpha)\Big),$$

folglich wird:

$$F(x_\nu + \alpha) + F(x_\nu - \alpha) - 2F(x_\nu)$$
$$= \frac{\alpha}{1}\Big(\varphi_\nu(x_\nu + 0) + c_\nu - \varphi_{\nu-1}(x_\nu - 0) - c_{\nu-1}\Big)$$
$$+ \frac{\alpha^2}{1.2}\Big(f(x_\nu + \theta\alpha) + f(x_\nu - \theta\alpha)\Big) \qquad (0 < \theta < 1);$$

man hat aber, wie wir vorher gesehen haben,

$$\varphi_\nu(x_\nu + 0) - \varphi_{\nu-1}(x_\nu - 0) + c_\nu - c_{\nu-1} = 0,$$

somit folgt:

$$\frac{F(x_\nu + \alpha) - 2F(x_\nu) + F(x_\nu - \alpha)}{\alpha^2} = \tfrac{1}{2} f(x_\nu + \theta\alpha) + \tfrac{1}{2} f(x_\nu - \theta\alpha) ,$$

und endlich

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x_\nu + \alpha) - 2F(x_\nu) + F(x_\nu - \alpha)}{\alpha^2} = \tfrac{1}{2}\Big(f(x_\nu + 0) + f(x_\nu - 0)\Big)$$
$$= \sum (a_n \sin nx_\nu + b_n \cos nx_\nu) .$$

Es scheint noch der Mühe werth zu bemerken, dass die Convergenz der Grösse

$$\tfrac{1}{2}\Big(f(x_\nu + \varepsilon) + f(x_\nu - \varepsilon)\Big)$$

nicht zur nöthigen Folge hat, dass jeder der beiden Ausdrücke

$$f(x_\nu + \varepsilon), \qquad f(x_\nu - \varepsilon)$$

einer Grenze zustrebt, was sowohl eintreten kann wie auch nicht; denn es genügt, dass der ganze Ausdruck

$$f(x_\nu + \varepsilon) + f(x_\nu - \varepsilon)$$

für $\varepsilon = 0$ convergire, was z. B. geschieht, wenn die Function $f(x)$ rechts von x_ν gleich

$$\sin \frac{1}{x - x_\nu},$$

links dagegen gleich

$$\sin \frac{1}{x - x_\nu} + \psi(x)$$

ist, falls nur $\psi(x_\nu - 0)$ einen bestimmten Sinn hat; oder $f(x)$ könnte sich rechts von x_ν wie

$$\log(x - x_\nu),$$

links wie

$$-\log(x_\nu - x) + \varphi(x)$$

verhalten, falls nur wiederum $\varphi(x_\nu - 0)$ einen bestimmten Sinn hat.

Im April 1872.