Die Irreducibilität der homogenen linearen Differentialgleichungen.

Von

EMANUEL BEKE in Budapest.

Den überaus wichtigen Begriff der Irreducibilität der Differentialgleichungen führte zuerst Herr Frobenius*) ein, und zwar speciell bei linearen Differentialgleichungen, welche functionentheoretisch am leichtesten zu behandeln waren. Seither wurde dieser Begriff besonders durch die Untersuchungen des Herrn Königsberger**) erweitert und mehrfach angewandt. Der Irreducibilitätsbegriff fand bislang mehrfach Verwendung bei der Bestimmung der regulären Integrale beliebiger linearer Differentialgleichungen, aber es scheint, dass die Wichtigkeit und eigentliche Fruchtbarkeit desselben durch die Untersuchungen der Herren Picard***) und Vessiot†), welche der Galois'schen Theorie der algebraischen Gleichungen analog sind, im höchsten Grade gesteigert wurde. —

Es ist von Wichtigkeit, dass der Begriff der Irreducibilität, der practischen Anwendungen halber, nicht nur ein *logischer* Begriff bleibe, sondern, wie es in der Theorie der algebraischen Gleichungen geschah, aus dem rein logischen, denkbaren Ideenkreise, in das Gebiet des mathematisch Ausführbaren hereingezogen werde.

In der Theorie der algebraischen Gleichungen ist es möglich, bei einem gegebenen Rationalitätsbereich — am einfachsten bei dem natürlichen Rationalitätsbereich — durch eine endliche Anzahl von Versuchen, die gegebene Gleichung in ihre irreduciblen Factoren zu zerlegen. Wir stellen uns hier die analoge Aufgabe. *Wir wollen durch eine endliche angebbare Anzahl von Schritten entscheiden, ob eine gegebene homogene lineare Differentialgleichung reducibel ist oder nicht, und wir wollen im*

---

*) Frobenius: Journ. f. r. u. a. Math. 76 und 80.

**) Königsberger: J. f. r. u. a. M. 96. 1884.

***) Picard: Ann. de Toulouse 1887.

†) Vessiot: Ann. de l'Ecole Norm. 1892.

ersteren Falle eine irreducible Gleichung aufstellen, welche ihre sämmtlichen Lösungen mit der gegebenen reduciblen Gleichung gemein hat.

Wir fassen aber den Begriff der Irreducibilität anders als in den genannten Untersuchungen geschehen und zwar eben aus dem Grunde, damit wir einen Anschluss an die erwähnten Untersuchungen der Herren Picard und Vessiot erhalten.

Bei Herrn Frobenius ist eine homogene lineare Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten irreducibel, wenn sie mit keiner anderen linearen homogenen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung — mit ebensolchen Coefficienten — eine Lösung gemein hat.

In einer späteren Abhandlung hat sich Herr Frobenius*), zu einem speciellen Zweck sogar nur auf die Umgebung eines Punktes beschränkt. — Bei Herrn Königsberger ist eine lineare Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten dann irreducibel, wenn sie mit keiner anderen Differentialgleichung (also nicht nur mit einer linearen) von niedrigerer Ordnung, mit ebensolchen Coefficienten, ein Integral gemeinsam hat.

Wir werden die Definition dahin einschränken, dass wir nur lineare Differentialgleichungen betrachten, welche *rationale* Coefficienten haben, *und eine solche Gleichung irreducibel nennen, wenn sie mit keiner anderen, ebenfalls linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, von niedrigerer Ordnung gemeinsame Lösung hat.* —

Die Irreducibilität ist, wie Herr C. Jordan**) gezeigt hat, auch mit der Beschaffenheit der Monodromiegruppe der linearen Differentialgleichung eng verbunden. Wenn nämlich die Monodromiegruppe *nicht primitiv* ist, d. h. bei jedem Umlauf der unabhängigen Variablen eine gewisse lineare Mannigfaltigkeit der Lösungen der linearen Differentialgleichung (welche aber nicht die ganze n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Lösungen umfasst) in sich transformirt wird, dann ist die Gleichung reducibel und umgekehrt, wenn die Gleichung reducibel ist, dann ist die Monodromiegruppe nicht primitiv.

Bei diesem wichtigen Satze Jordan's ist aber die Frobenius'sche Begriffsbestimmung der Irreducibilität zu Grunde gelegt. Wenn nämlich die Monodromiegruppe im Sinne Jordan's imprimitiv ist, dann lässt sich eine homogene lineare Differentialgleichung mit *eindeutigen* Coefficienten bilden, welche von niedrigerer Ordnung ist, als die gegebene, und ihre sämmtlichen Lösungen mit der gegebenen gemeinsam hat. Wenn wir aber statt der Eindeutigkeit der Coefficienten, ihre *Rationalität* wünschen — was übrigens in vielen Fällen dasselbe bedeutet — so müssen wir statt der Monodromiegruppe *diejenige*

---

*) Frobenius, Journ. f. r. u. ang. Math. 80. 1875.

**) Jordan, Bulletin de la Soc. Math. de France, 1883.

algebraische Transformationsgruppe betrachten, welche die Herren Picard und Vessiot eingeführt haben und die wir nach dem Vorschlage von Herrn F. Klein die *Rationalitätsgruppe* der Gleichung nennen. Wenn diese Gruppe im Lie'schen Sinne transitiv ist, dann ist die Gleichung überhaupt irreducibel, (auch im Königsberger'schen Sinne) wenn sie andererseits in solchem Maasse intransitiv ist, wie es die Monodromiegruppe nach dem erwähnten Jordan'schen Satze sein sollte — dass nämlich eine weniger als n-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit invariant bleibt —, dann hat die Gleichung mit einer anderen Gleichung mit *rationalen* Coefficienten, (von niedrigerer Ordnung) gemeinsame Lösungen, ist also in unserem Sinne reducibel. —

Die Lösung des Problems wollen wir so in Angriff nehmen, wie es auch in der Theorie der algebraischen Gleichungen geschieht*). Wenn nämlich eine algebraische ganzzahlige Gleichung gegeben ist:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

deren Wurzeln wir mit

$$x_1\, x_2 \ldots x_n$$

bezeichnen, und die Frage gestellt wird, ob die linke Seite dieser Gleichung einen ganzzahligen Factor vom m^{ten} Grade hat, oder nicht, dann müssen wir die Resolventen für alle möglichen Coefficienten dieses Factors aufstellen und die rationalen Lösungen dieser Resolventen aufsuchen. So müssen wir die Resolventengleichungen für die Functionen

$$z = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_1^m x_i,$$

$$u = \sum_1^m x_i x_k,$$

$$v = \sum_1^m x_i x_k x_l \ldots$$

in der bekannten Weise aufstellen und dann zuschauen, ob diese Gleichungen rationale Lösungen haben oder nicht, was durch eine endliche Anzahl von Versuchen bestimmt werden kann. In solcher Weise erhalten wir eine endliche Anzahl von Factoren, wo dann wieder durch eine endliche Anzahl von Versuchen bestimmbar ist, welcher von den gefundenen Factoren brauchbar ist. —

In ebensolcher Weise werden wir eine lineare Differentialgleichung niederer Ordnung, welche mit der gegebenen linearen Differentialgleichung ihre sämmtlichen Lösungen gemein hat, gegebenenfalls wirklich construiren.

*) J. König, Math. Ann. 15, p. 167.

1. Sei die gegebene homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten die Folgende:

$$(1)\qquad f(y) \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y = 0,$$

wo wir gewohntermassen

$$y^{(i)} = \frac{d^i y}{dx^i}$$

setzen. Wenn eine andere homogene lineare Differentialgleichung von der m^{ten} Ordnung, mit ebenfalls rationalen Coefficienten

$$(2)\qquad \varphi = y^{(m)} + q_1 y^{(m-1)} + q_2 y^{(m-2)} + \cdots + q_m y = 0$$

existirt, welche ihre sämmtlichen Lösungen mit der gegebenen Gleichung gemeinsam hat, und

$$(3)\qquad Y_1\, Y_2 \ldots Y_m$$

ein Fundamentalsystem dieser Lösungen darstellt, dann sind die Coefficienten der Gleichung (2) durch dieses Fundamentalsystem darstellbar. Wenn wir diese Determinante:

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} Y_1 & Y_1' & Y_2'' & \ldots & Y_1^{(m-1)} \\ Y_2 & Y_2' & Y_2'' & \ldots & Y_2^{(m-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_m & Y_m' & Y_m'' & \ldots & Y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

mit Δ bezeichnen, dann ist:

$$(5)\qquad \Delta q_i = - \begin{vmatrix} Y_1 & Y_1' & \ldots & Y_1^{(i-1)} & Y_1^{(m)} & Y_1^{(i+1)} & \ldots & Y_1^{(m-1)} \\ Y_2 & Y_2' & \ldots & Y_2^{(i-1)} & Y_2^{(m)} & Y_2^{(i+1)} & \ldots & Y_2^{(m-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_m & Y_m' & \ldots & Y_m^{(i-1)} & Y_m^{(m)} & Y_m^{(i+1)} & \ldots & Y_m^{(m-1)} \end{vmatrix} = \Delta_i$$

und speciell:

$$q_1 = -\frac{d \log \Delta}{dx}.$$

2. Wir wollen zuerst q_1 bestimmen. Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass überhaupt jede Determinante Δ_i einer homogenen linearen Differentialgleichung genügt, deren Coefficienten rational durch die Coefficienten (und Differentialquotienten) der gegebenen Gleichung (1) darstellbar sind. Diese Bemerkung fliesst aus dem allgemeineren Satze, dass eine *jede rationale ganze Function der Lösungen einer oder mehrerer homogenen linearen Differentialgleichungen, einer homogenen linearen Differentialgleichung genügt, deren Coefficienten rational durch die Coefficienten der gegebenen Gleichungen* (und durch die Differential-

quotienten der Coefficienten) *darstellbar sind.* Wir wollen diesen, für das Folgende wichtigen bekannten Satz nur angeführt haben mit der einzigen Bemerkung, dass zum Beweise genügen würde den einfachen speciellen Fall zu beweisen, dass das Product zweier Lösungen zweier homogenen linearen Differentialgleichungen einer solchen Gleichung genüge. —

In dem vorliegenden Falle ist es besonders einfach die Gleichung für Δ_i (welche wir nach Herrn F. Klein als *Differentialresolvente* der Δ_i bzeichnen wollen) direct aufzustellen.

Wenn wir nämlich die Determinante Δ_i nach der unabhängigen Variablen differentiiren, dann bekommen wir ein lineares Aggregat von Determinanten, und wenn wir die Differentiation fortsetzen und dafür sorgen, dass in den erhaltenen Ausdrücken die höheren Differentialquotienten durch die n ersten (die Grössen Y als 0^{te} Differentialquotienten aufgefasst) mittels der gegebenen Gleichung (1) heruntergedrückt werden, dann wird ein jeder Differentialquotient von Δ_i als ein lineares Aggregat der Determinante

$$(6)\qquad \Delta_{k_1 k_2 \cdots k_m} = \begin{vmatrix} Y_1^{(k_1)}, & Y_1^{(k_2)}, & \ldots, & Y_m^{(k_m)} \\ Y_2^{(k_1)}, & Y_2^{(k_2)}, & \ldots, & Y_m^{(k_m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_m^{(k_1)}, & Y_m^{(k_2)}, & \ldots, & Y_m^{(k_m)} \end{vmatrix}$$

ausgedrückt, wo die Ordnungszahlen $k_1 k_2 \ldots k_m$ beliebige m Zahlen aus der Reihenfolge: $0, 1, 2, \ldots, n-1$ bedeuten. Wenn wir diese Determinanten der Kürze halber mit

$$D_1 D_2 \ldots D_{\binom{n}{m}}$$

bezeichnen, dann erhalten wir also ein Gleichungssystem:

$$(7)\qquad \frac{d^\varrho \Delta_i}{dx^\varrho} = a_{\varrho i 1} D_1 + a_{\varrho i 2} D_2 + \cdots + a_{\varrho i \sigma} D_\sigma,$$

$$\sigma = \binom{n}{m}, \quad \varrho = 1, 2, \ldots, \sigma$$

wo unter den Grössen D eine mit Δ_i identisch ist, und wo die Coefficienten $a_{\varrho i k}$ rationale Functionen von x bedeuten. —

Aus diesem System erhalten wir also eine homogene lineare Differentialgleichung von höchstens $\binom{n}{m}^{\text{ter}}$ Ordnung für Δ_i. —

Zuerst stellen wir auf diese Weise die Differentialgleichung für Δ auf. Sei diese Gleichung:

$$(8)\qquad \frac{d^\sigma \Delta}{dx^\sigma} + P_1 \frac{d^{\sigma-1} \Delta}{dx^{\sigma-1}} + \cdots + P_\sigma \Delta = 0.$$

Damit die Gleichung (2) vorhanden sei, muss $q_1 = \frac{\Delta'}{\Delta}$ rational sein; d. h. die Gleichung (8) *muss eine solche Lösung haben, deren logarithmische Ableitung rational sei.*

3. Wir müssen also jetzt aus der Gleichung (8) eine Gleichung für q_1 herleiten. Wir bemerken, dass es im Allgemeinen möglich ist für eine rationale Function der Lösungen einer oder mehrerer linearen Differentialgleichungen eine — nicht lineare — Differentialgleichung aufzustellen, deren Coefficienten rational durch die Coefficienten der gegebenen Gleichungen ausdrückbar sind. Ohne auf den Beweis dieses wichtigen Satzes einzugehen, bemerke ich nur, dass er nach einer früheren Bemerkung immer darauf zurückgeführt werden kann, dass man für den Quotienten zweier Lösungen *einer* homogenen linearen Differentialgleichung, eine Resolvente aufstellen soll.

In unserem Falle ist die Resolventengleichung für q_1, welche gewissermassen eine Verallgemeinerung der Riccati'schen Gleichung ist, leicht aufzustellen. Wenn wir nämlich für einen Augenblick Δ mit z und q_1 mit u bezeichnen, dann ist

$$zu = z'$$

und wenn wir aus dieser Gleichung durch Differentiation $\sigma - 1$-mal hintereinander die daraus folgenden bilden und in der letzten Gleichung $z^{(\sigma)}$ mittels der Gleichung (6) eliminiren, dann erhalten wir ein System linearer Gleichungen, woraus durch Elimination von

$$z\ z',\ z'' \ldots z^{(\sigma-1)}$$

folgt:

$$(9)\quad 0 = \begin{vmatrix} u & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ u' & u & -1 & \cdot & \cdot \\ u'' & 2u' & u & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(\sigma-1)} + P_\sigma, & (\sigma-1)u^{(\sigma-2)} + P_{\sigma-1}, & \binom{\sigma-1}{2} u^{(\sigma-3)} + P_{\sigma-2}, & \ldots, & u + P_1 \end{vmatrix}.$$

Im Falle $\sigma = 2$ erhalten wir die gewöhnliche Riccati'sche Gleichung

$$u^2 + u' + P_1 u + P_2 = 0,$$

im Falle $\sigma = 3$, und $\sigma = 4$ die Gleichungen:

$$u^3 + 3u'u + u'' + P_1(u^2 + u') + P_2 u + P_3 = 0,$$

$$u^4 + 6u^2u' + 3u'^2 + 4uu'' + u''' + P_1(u^3 + 3uu' + u'')$$
$$+ P_2(u^2 + u') + P_3 u + P_4 = 0.$$

Die Gleichung (9) können wir auch in anderer Form erhalten, wenn wir nämlich in Gleichung (8) direct

(10) $$\Delta = e^{\int u dx}$$

substituiren und durch $e^{\int u dx}$ dividiren. —

4. Das gestellte Problem ist also darauf zurückgeführt, dass die rationalen Lösungen solcher allgemeinen Riccati'schen Gleichungen bestimmt werden sollen. Später werden wir einen speciellen Fall, den Fall der hypergeometrischen Differentialgleichung, behandeln; jetzt wollen wir uns in Bezug dieser Gleichungen auf allgemeine Bemerkungen beschränken.

1) Aus der Form der Gleichung (9) ersehen wir, dass solche Pole von u, welche eine höhere Ordnungszahl als 1 haben, gleichzeitig Pole einer oder mehrerer der Coefficienten $P_1\, P_2 \ldots P_\sigma$ sein müssen; denn wenn a ein Pol von der k^{ten} Ordnung wäre und

$$P_1(a),\ P_2(\alpha), \ldots, P_\sigma(a)$$

alle endlich wären, dann wäre die niedrigste Potenz von $x - a$, welche in der Gleichung (9) auftritt, die $-k\sigma^{\text{te}}$, welche in einem einzigen Gliede und zwar in dem ersten Gliede: u^σ vorkäme, folglich 0 zum Coefficienten haben müsste.

Wenn also c singulärer Punkt von u, aber kein singulärer Punkt der Coefficienten $P_1\, P_2 \ldots P_\sigma$ ist, dann kann $x - c$ nur in der -1^{ten} Potenz in u auftreten; und da er kein singulärer Punkt der Coefficienten der Gleichung (8) ist, so muss er ein gewöhnlicher Punkt der Lösungen Δ sein, und aus diesem Grunde muss $(x - c)^{-1}$ eine positive ganze Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, \sigma - 1$ zum Coefficienten haben. —

2) Es lässt sich sehr leicht aus der Form der Coefficienten $P_1\, P_2 \ldots P_\sigma$ eine obere Grenze für die Ordnung k eines Poles a der rationalen Function u angeben. Die höchsten negativen Potenzen von $x - a$ können nämlich nur in den folgenden Gliedern vorkommen

(11) $$u^\sigma + P_1 u^{\sigma-1} + P_2 u^{\sigma-2} + \cdots + P_\sigma.$$

Nehmen wir an, dass der höchste Exponent von $(x-a)^{-1}$, welcher in P_i vorkommt, p_i sei, dann ist der höchste Exponent von $(x-a)^{-1}$, in den einzelnen Gliedern von (11):

(12) $$\sigma k,\ (\sigma-1)k + p_1,\ (\sigma-2)k + p_2, \ldots, p_\sigma,$$

folglich darf k nicht grösser sein als die grösste der Zahlen

$$p_1, \left[\frac{p_2}{2}\right], \left[\frac{p_3}{3}\right], \ldots, \left[\frac{p_\sigma}{\sigma}\right],$$

wo wir mit den eckigen Klammern die grösste, in dem Bruch enthaltene ganze Zahl bezeichnen; denn wäre k grösser als die grösste dieser Zahlen, dann würde σk grösser sein als jeder andere, in der Reihe (12) vorhandene Exponent, also $(x-a)^{-\sigma k}$ würde *blos* in dem ersten Glied der Summe (11) vorkommen, also nothwendigerweise 0 zum Coefficienten haben. —

5. Die rationale Lösung u kann also nur solche höhere Pole haben, die zugleich Pole der Coefficienten sind; ausser diesen kann sie nur einfache Pole besitzen mit positiven ganzzahligen Coefficienten. Diese 2 Bemerkungen in Verbindung mit der oberen Grenze der Ordnungszahlen der einzelnen Pole genügen, um die Form der rationalen Lösungen zu bestimmen. Wenn nämlich die Pole der Coefficienten

$$a_1\, a_2 \ldots a_\varrho$$

sind und zu ihnen nach der zweiten Bemerkung von 4) die oberen Grenzen der Ordnungszahlen:

$$k_1\, k_2 \ldots k_\varrho$$

gehören, dann ist die Form von u:

$$\sum_1^{\varrho}{}_i \frac{A_{i1}}{x-a_i} + \frac{A_{i2}}{(x-a_i)^2} + \cdots + \frac{A_{ik_i}}{(x-a)^{k_i}} + \varphi(x), \tag{13}$$

wo $\varphi(x)$ eine rationale Function von der Gestalt ist:

$$\sum \frac{\alpha_i}{x-b_i},$$

unter dem α_i positive ganze Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, \sigma - 1$ verstanden. Wenn wir diesen Ausdruck in die Gleichung (9) einsetzen, dann erhalten wir ein algebraisches Gleichungssystem zur Bestimmung der Coefficienten A_{ik} und dadurch den ersten Theil von u, welchen wir mit $R(x)$ bezeichnen wollen.

Aus der Gleichung (10) erhalten wir dann den Ausdruck von Δ in der Form:

$$\Delta = e^{\int R(x)\,dx} \cdot v,$$

wo v in Folge der Beschaffenheit von $\varphi(x)$ im Falle, dass eine rationale Lösung q_1 wirklich existirt, *eine rationale ganze Function sein muss.* Wenn wir also diesen Ausdruck von Δ in die Gleichung (8) einsetzen, dann erhalten wir eine homogene lineare Differentialgleichung für v:

$$\frac{d^\sigma v}{dx^\sigma} + Q_1 \frac{d^{\sigma-1} v}{dx^{\sigma-1}} + Q_2 \frac{d^{\sigma-2} v}{dx^{\sigma-2}} + \cdots + Q_\sigma v = 0.$$

Diese Gleichung muss eine rationale ganze Lösung haben. Ob sie eine solche Lösung hat, oder nicht, das lässt sich leicht entscheiden durch Einsetzen einer ganzen Function mit unbestimmten Coefficienten, die man nach einander recursiv bestimmt. Der Grad dieser ganzen rationalen Function lässt sich vorneherein durch Aufstellung der determinirenden Gleichung für die Stelle ∞ festlegen. — Wenn diese Differentialgleichung keine ganze rationale Lösung hat, dann ist die gegebene

Gleichung (1) gewiss irreducibel. Hat sie aber eine oder mehrere solche Lösungen, dann müssen wir zur Bestimmung der übrigen Coefficienten der Gleichung (2) schreiten. Wir sahen, dass aus dem System (7) eine homogene lineare Differentialgleichung für Δ_i aufstellbar ist. Sei diese Gleichung

$$\frac{d^\sigma z}{dx^\sigma} + Q_1 \frac{d^{\sigma-1} z}{dx^{\sigma-1}} + \cdots + Q_\sigma z = 0.$$

Aus (5) ersehen wir, dass

$$\Delta_i = q_i \Delta.$$

Wenn wir jetzt in diese Gleichung

$$z = y\Delta$$

substituiren, wo Δ den früher bestimmten Ausdruck bedeutet, dann erhalten wir eine homogene lineare Differentialgleichung für y. Hat diese Differentialgleichung in y keine rationale Lösung, so ist die gegebene Gleichung (1) irreducibel; wenn sie aber rationale Lösung hat, und die übrigen, für die anderen Coefficienten analog gebildeten Gleichungen ebenfalls, dann kann die Gleichung reducibel sein.

Wenn nämlich die so bestimmten rationalen Functionen

$$q_1\, q_2 \cdots q_m$$

sind, dann müssen wir nur nachsehen, ob die Gleichung (1) mit der Gleichung

$$\varphi = y^{(m)} + q_1 q^{(m-1)} + \cdots + q_m y = 0$$

gemeinsame Lösungen hat oder nicht. Diese Frage ist aber bekanntlich nach der Methode zu behandeln, welche dem Aufsuchen des grössten gemeinsamen Theilers analog ist, oder nach einer Methode, welche der Resultantenbildung nachgebildet ist. —

7. Um an einem Beispiel die Lösung der aufgestellten Riccati'schen Gleichung durchzuführen und zugleich die Bedingungen der Reducibilität in einem ausgezeichneten Falle zu behandeln, werden wir die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen der Reducibilität der hypergeometrischen Differentialgleichung aufstellen.

Es sei die hypergeometrische Differentialgleichung in bekannter Form:

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0. \tag{14}$$

Die Riccati'sche Gleichung ist in diesem Falle die Differentialgleichung, welcher $\frac{y'}{y}$ genügt. Wir stellen statt dessen die Gleichung auf, welcher

$$u = \frac{y'}{y} + \frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{2x(1-x)}$$

genügt, denn mit $\frac{y'}{y}$ muss auch u rational sein.

Diese Gleichung ist aus der Gleichung (9) leicht zu bilden. Sie ist:

$$(15)\qquad \frac{du}{dx}+u^2+\frac{h_1}{x}+\frac{h_2}{x^2}+\frac{k_1}{1-x}+\frac{k_2}{(1-x)^2}=0,$$

wo wir der Kürze halber die folgenden Bezeichnungen einführten:

$$h_1=k_1=-\alpha\beta-\frac{1}{2}\gamma(\gamma-\alpha-\beta-1),$$

$$h_2=-\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2+\frac{\gamma}{2},$$

$$k_2=-\left(\frac{\gamma-\alpha-\beta-1}{2}\right)^2-\frac{\gamma-\alpha-\beta-1}{2}.$$

Wenn die rationale Function u von 0 und 1 verschiedene Pole hat, so kann sie diese nach unseren allgemeinen Bemerkungen nur in der ersten Ordnung besitzen. Wenn c ein solcher Pol ist, dann ist es aus der Gleichung (15) leicht ersichtlich, dass der Coefficient von $(x-c)^{-1}$ nur 1 sein kann, also die rationale Function u diese Pole nur in der Form

$$\frac{g'(x)}{g(x)}$$

enthalten kann, wo $g(x)$ eine rationale ganze Function von x ist. Aus der Gleichung (15) ersehen wir auch, dass u überhaupt keine Pole von höherer als der ersten Ordnung enthalten kann, folglich ist u von der Form:

$$(16)\qquad u=\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{1-x}+\frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Wenn wir diesen Ausdruck in die Gleichung (15) einsetzen, und die erhaltenen Ausdrücke in Partialbrüche zerlegen, erhalten wir zunächst die folgenden Gleichungen für α_1 und α_2

$$\alpha_1^2-\alpha_1=\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2-\frac{\gamma}{2},$$

$$\alpha_2^2+\alpha_2=\left(\frac{\gamma-\alpha-\beta-1}{2}\right)^2+\frac{\gamma-\alpha-\beta-1}{2},$$

woraus wir für α_1 und α_2 die folgenden Werthsysteme erhalten:

$$(17)\qquad \begin{array}{ll} \alpha_1'=\frac{\gamma}{2}, & \alpha_1''=\quad 1-\frac{\gamma}{2},\\ \alpha_2'=\frac{\gamma-\alpha-\beta-1}{2}, & \alpha_2''=-1-\frac{\gamma-\alpha-\beta-1}{2}. \end{array}$$

Zur Bestimmung der ganzen Function $g(x)$ erhalten wir sodann aus (15) die hypergeometrische Differentialgleichung

$$(18)\qquad g''x(1-x)+2g'[\alpha_1(1-x)+\alpha_2 x]+(2\alpha_1\alpha_2+h_1)g=0.$$

Die höchste vorkommende Potenz von x liefert uns hier die Gleichung

$$(19)\quad -n(n-1)+2n(\alpha_2-\alpha_1)+2\alpha_1\alpha_2-\alpha\beta-\frac{1}{2}\gamma(\gamma-\alpha-\beta-1)=0,$$

wo n den Grad der ganzen Function $g(x)$ bedeutet. Wenn wir in diese Gleichung die vier möglichen Combinationen der Werthe von α_1, α_2 aus (17) einsetzen, dann erhalten wir die folgenden vier Werthsysteme für n:

$$(20)\quad \begin{array}{llll} 1)\; n=-\alpha, & 2)\; n=-\alpha+1, & 3)\; n=\alpha-\gamma, & 4)\; n=\alpha-\gamma+1, \\ n=-\beta; & n=-\beta+1; & n=\beta-\gamma; & n=\beta-\gamma+1. \end{array}$$

Wir erhalten also auf diese Weise das bekannte Resultat, dass die hypergeometrische Differentialgleichung dann und nur dann reducibel ist, wenn eine der 4 Grössen:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma-\beta$$

eine negative ganze Zahl ist. Aus Gleichung (18) erhalten wir dann nach einander die Coefficienten der ganzen hypergeometrischen Functionen $g(x)$.

8. Bei diesem Beispiel gestaltete sich die Behandlung der Riccati'schen Gleichung, auf welche die Bestimmung des Coefficienten q_1 zurückgeführt wurde, besonders einfach. Der Grund der Vereinfachung lag darin, dass die behandelte Differentialgleichung nur reguläre Integrale besitzt. Wenn die zu untersuchende Differentialgleichung nur reguläre Integrale besitzt, so wird die Behandlung der Riccati'schen Gleichung immer vereinfacht; denn in diesem Falle sind die in 5) bestimmten oberen Grenzen der Ordnungszahlen alle gleich 1. In diesem Falle können wir sogar die möglichen Zahlenwerthe von A_{i1} welche wir jetzt blos mit A_i bezeichnen wollen (Gleichung 13) von vorneherein in endlicher Zahl angeben; denn in diesem Falle ist:

$$q_1=\sum\frac{A_i}{x-a_i}+\sum\frac{\alpha_i}{x-b_i},$$

und wenn wir für die Stelle a_i die determinirende Fundamentalgleichung aufstellen, so lautet diese folgendermassen:

$$\varrho(\varrho-1)(\varrho-2)\cdots(\varrho-m+1)+\varrho\cdot(\varrho-1)\cdots(\varrho-m+2)A_i+\cdots=0$$

oder geordnet:

$$\varrho^m-\left(\frac{m(m-1)}{2}-A_i\right)\varrho^{m-1}+\cdots=0.$$

Die Summe der Exponenten ist also im Punkte a_i

$$(21)\qquad \frac{m(m-1)}{2}-A_i.$$

Aus der determinirenden Fundamentalgleichung für die gegebene, ursprüngliche Gleichung (1) für den Punkt a_i sind aber die Exponenten:

$$\varrho_1\ \varrho_2\ \cdots\ \varrho_n$$

bekannt. Aus dieser Reihe müssen wir also auf alle mögliche Arten

m Exponenten auswählen. Die Summe einer Combination von m Exponenten muss mit dem Werth des Ausdrucks (21) gleich sein, folglich haben wir nur eine endliche Anzahl von Möglichkeiten zur Bestimmung von A_i. —

9. Es wurde schon erwähnt, wie die Irreducibilität der linearen Differentialgleichungen mit der Monodromiegruppe zusammenhängt. Wenn nämlich gewisse Lösungen der Gleichung (1)

$$Y_1\, Y_2 \dots Y_m,$$

wo $m < n$, vorhanden sind, so beschaffen, dass bei einem jeden Umlauf der unabhängigen Variabeln eine jede dieser Lösungen in eine andere von der Form

$$c_{i1}\, Y_1 + c_{i2}\, Y_2 + \cdots + c_{im}\, Y_m$$

übergeht, dann ist die Gleichung reducibel; denn in diesem Falle bleiben die Coefficienten der Gleichung:

$$(22) \qquad \begin{vmatrix} z & Y & Y_2 & \dots Y_m \\ z' & Y_1' & Y_2' & \dots Y_m' \\ z'' & Y_1'' & Y_2'' & \dots Y_m'' \\ . & . & . & \dots . \\ . & . & . & \dots . \\ z^{(m)} & Y_1^{(m)} & Y_2^{(m)} & \dots Y_m^{(m)} \end{vmatrix} = 0,$$

nachdem durch den Coefficienten von $z^{(m)}$ dividirt wurde, bei einem jeden Umlauf der unabhängigen Variabeln unverändert; sie sind also eindeutige Functionen von x; und umgekehrt, wenn die Gleichung:

$$z^{(m)} + Q_1 z^{(m-1)} + \cdots + Q_m z = 0$$

mit eindeutigen Coefficienten

$$Y_1\, Y_2 \dots Y_m$$

zu Lösungen hat, dann kann eine jede dieser Lösungen bei einem beliebigen Umlauf von x nur in eine andere Lösung

$$c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \cdots + c_m Y_m$$

übergehen. Wir sehen, dass bei diesem Criterium die ursprüngliche Frobenius'sche Bestimmung der Irreducibilität zu Grunde liegt. Wenn wir nicht nur die *Eindeutigkeit*, sondern die *Rationalität* der Coefficienten wünschen, dann müssen wir statt der *Monodromiegruppe* die *Rationalitätsgruppe* der Gleichung zu Grunde legen.

Ohne auf die betreffenden Untersuchungen der Herren Picard und Vessiot hier näher einzugehen, bemerke ich nur, dass zu einer jeden homogenen linearen Differentialgleichung eine homogene lineare algebraische Gruppe gehört von solcher Beschaffenheit, dass eine jede rationale Function der Lösungen (und ihrer Differentialquotienten), welche bei dieser Gruppe numerisch invariant bleibt, rational durch die Coefficienten der Gleichung (und ihrer Differentialquotienten und der adjungirten Functionen) ausdrückbar ist und umgekehrt.

Nehmen wir an, dass diese Gruppe im Lie'schen Sinne transitiv ist, d. h. dass es möglich ist eine jede Lösung

$$y_1 y_2 \ldots y_n$$

durch passende Bestimmung der Parameter der Gruppe in eine jede Lösung

$$Y_1 Y_2 \ldots Y_n$$

zu überführen. Wenn dann eine Lösung y eine algebraische Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten

$$\varphi(y) = 0 \tag{23}$$

befriedigt, dann muss auch eine jede andere Lösung diese Gleichung befriedigen; denn $\varphi(y)$ als 0 ist ja rational durch die Coefficienten der Gleichung ausdrückbar, sie bleibt also bei der Gruppe invariant. Durch die Gruppe kann aber y in eine beliebige Lösung übergeführt werden, folglich genügt eine jede Lösung der Gleichung (1) der Gleichung (23). Die gegebene Gleichung ist also irreducibel auch in *dem* Sinne, dass sie mit keiner anderen auch nicht linearen Differentialgleichung (mit rationalen Coefficienten) von niedrigerer Ordnung gemeinsame Lösungen haben kann.

Wenn hingegen die Rationalitätsgruppe so beschaffen ist, wie es nach dem Jordan'schen Satze die Monodromiegruppe im Falle der Reducibilität sein soll, d. h. wenn gewisse Lösungen

$$Y_1 Y_2 \ldots Y_m$$

vorhanden sind, welche durch die Rationalitätsgruppe nur in Lösungen von der Gestalt:

$$c_{i1} Y_1 + c_{i2} Y_2 + \cdots + c_{im} Y_m$$

übergeführt werden können, dann sind die Coefficienten der Gleichung (22) bei der Rationalitätsgruppe invariant, folglich rational durch die Coefficienten der Gleichung darstellbar; dann ist also die Gleichung auch in dem Sinne reducibel, dass sie mit einer anderen linearen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung — mit *rationalen* Coefficienten — Lösungen gemein hat.

Umgekehrt, wenn eine lineare Differentialgleichung von der $m < n^{\text{ten}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten existirt, welche ihre sämmtlichen Lösungen mit der gegebenen Gleichung gemein hat, dann ist die Rationalitätsgruppe so beschaffen, wie es der Satz von Jordan von der Monodromiegruppe wünscht. Sei nämlich die lineare Differentialgleichung von der m^{ten} Ordnung die folgende:

$$y^{(m)} + q_1 y^{(m-1)} + q_2 y^{(m-2)} + \cdots + q_m y = 0 \tag{24}$$

und ein Fundamentalsystem der Lösungen:

$$(25)\qquad Y_1 Y_2 \dots Y_m,$$

dann muss bei der Rationalitätsgruppe die lineare Schaar

$$\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \cdots + \alpha_m Y_m$$

invariant bleiben; denn gäbe es eine Transformation in dieser Gruppe, welche eine solche Lösung in eine, nicht in dieser Schaar enthaltene Y überführte, dann müsste die Gleichung (24) — da die linke Seite doch rational ausdrückbar ist (indem sie 0 ist) also bei dieser Transformation invariant bleibt — durch Y befriedigt werden, was nicht möglich ist, da doch (25) ein Fundamentalsystem der Lösungen ist. —

10. Zuletzt will ich noch einen speciellen Fall, welcher von Herrn Frobenius behandelt wurde, anführen, wo man leicht nachweisen kann, dass die Gleichung reducibel ist. Herr Frobenius*) bewies den Satz, dass wenn mit y_1 zugleich

$$(26)\qquad r(y_1) = c_0 y_1 + c_1 y_1' + c_2 y_1'' + \cdots + c_{n-1} y_1^{(n-1)},$$

wo die Coefficienten rationale Functionen von x bedeuten, eine Lösung der Gleichung (1) ist, diese Gleichung gewiss reductibel ist.

Wenn y_2 ein anderer Zweig von y_1 ist, dann ist auch, wie leicht zu sehen

$$r(y_2) = c_0 y_2 + c_1 y_2' + c_2 y_2'' + \cdots + c_{n-1} y_2^{(n-1)}$$

eine Lösung der Gleichung (1). Wenn also

$$(27)\qquad y_1 y_2 \dots y_n$$

n von einander unabhängige Zweige von y_1 sind, dann sind auch

$$(28)\qquad r(y_1),\ r(y_2),\ \dots,\ r(y_n),$$

die wir der Uebersicht halber mit

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \dots,\ \eta_n$$

bezeichnen wollen, Lösungen der Gleichung (1). Wenn diese Lösungen nicht unabhängig wären, d. h. wenn zwischen ihnen eine Gleichung

$$\gamma_1 \eta_1 + \gamma_2 \eta_2 + \cdots + \gamma_n \eta_n = 0$$

mit constanten Coefficienten bestünde, so würde

$$u = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \cdots + \gamma_n y_n$$

der folgenden Gleichung

$$c_0 u + c_1 u' + c_2 u'' + \cdots + c_{n-1} u^{(n-1)} = 0$$

genügen, d. h. einer homogenen linearen Differentialgleichung von der $n-1^{\text{ten}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten; die Gleichung (1) wäre also gewiss reducibel. Die zwei Fundamentalsysteme (27) und (28) sind in einer sehr engen Beziehung zu einander; wenn wir nämlich

*) Frobenius, Journ. f. r. u. ang. Math. 76. und Hamburger ib. 110.

mit der unabhängigen Variabeln einen beliebigen Umlauf machen, welche in der Reihe (27) die Substitution

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

verursacht, dann wird durch denselben Umlauf in der Reihe (28) dieselbe Substitution hervorgebracht. Diese Functionen sind, nach der Benennung des Herrn Klein *verwandte Functionen.* Den Satz des Herrn Frobenius können wir also in folgender durchsichtiger Weise fassen: *Wenn einer homogenen linearen Differentialgleichung verwandte Fundamentalsysteme genügen, dann ist sie reducibel.*

Den Satz können wir mit Benützung des Verwandtschaftsbegriffs folgendermassen beweisen: Es existirt immer eine Lösung, welche bei einem Umlauf um einen singulären Punkt mit einer Constanten multiplicirt wird. Sei eine solche Lösung, welche zum singulären Punkt a gehört, die folgende:

$$w = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \cdots + \gamma_n y_n,$$

welche bei einem Umlauf um a in sw übergeht. Dann geht nach dem Begriff der Verwandtschaft bei diesem Umlauf auch

$$\omega = \gamma_1 \eta_1 + \gamma_2 \eta_2 + \cdots + \gamma_n \eta_n$$

in $s\omega$ über. Diese Lösungen können daher — von den Ausnahmefällen abgesehen, wo die sämmtlichen Unterdeterminanten der zugehörigen Fundamentalgleichung verschwinden — nur um einen constanten Factor von einander verschieden sein, also:

$$\omega = kw.$$

Wenn wir in diese Gleichung den Werth von ω einsetzen und nach den rationalen Coefficienten $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ ordnen, dann erhalten wir die Gleichung:

$$(29) \qquad (c_0 - k)\, w + c_1 w' + c_2 w'' + \cdots + c_{n-1} w^{(n-1)} = 0,$$

welche beweist, dass die Gleichung (1) reducibel ist. — Dass der hiermit aufgestellten Gleichung (29) gerade diese ausgezeichnete Lösung genügt, welche sich bei dem Umlauf der unabhängigen Variabeln multiplicativ verhält, das liegt in der Natur der Sache. Denn, wie leicht einzusehen ist, müssen in jedem Falle, wenn die Gleichung reducibel ist, solche ausgezeichnete Lösungen auch der Gleichung niedriger Ordnung genügen, — diese letztere Gleichung muss ja auch solche Lösungen haben, die sich multiplicativ verhalten — und wenn nur nicht der genannte besondere Ausnahmefall vorhanden ist, so sind diese Lösungen bis auf constante Factoren bestimmt. — Wenn aber der genannte Ausnahmefall eintritt, nämlich dass bei einem jeden singulären Punkt unendlich viele Integrale vorhanden sind, die bei den Umläufen mit *derselben* Constanten multiplicirt werden, dann können wir die Reducibilität unserer Gleichung in folgender Weise beweisen:

Wenn

$$w_1 w_2 \ldots w_\varrho$$

die von einander unabhängigen Lösungen der Gleichung (1) sind, die bei einem Umlauf um den singulären Punkt *a alle* mit s multiplicirt werden, wo

$$w_i = \gamma_{i1} y_1 + \gamma_{i2} y_2 + \cdots + \gamma_{in} y_n,$$
$$i = 1, 2, \ldots, \varrho,$$

dann werden die analog gebildeten Lösungen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\varrho,$$

wo

$$\omega_i = \gamma_{i1} \eta_1 + \gamma_{i2} \eta_2 + \cdots + \gamma_{in} \eta_n,$$

bei diesem Umlauf ebenfalls mit s multiplicirt. Es bestehen also folgende Gleichungen:

$$\omega_i = \lambda_{i1} w_1 + \lambda_{i2} w_2 + \cdots + \lambda_{i\varrho} w_\varrho, \quad i = 1, 2, \ldots, \varrho. \tag{30}$$

Wir multipliciren diese Gleichungen (30) der Reihe nach mit den unbestimmten Constanten:

$$\mu_1 \mu_2, \ldots, \mu_\varrho$$

und bestimmen diese so, dass eine Gleichung besteht:

$$\mu_1 \omega_1 + \mu_2 \omega_2 + \cdots + \mu_\varrho \omega_\varrho = k(\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \cdots + \mu_\varrho w_\varrho). \tag{31}$$

Zu diesem Zweck müssen wir k so festlegen, dass das folgende Gleichungensystem besteht:

$$\begin{aligned} \mu_1 \lambda_{11} + \mu_2 \lambda_{21} + \cdots + \mu_\varrho \lambda_{\varrho 1} &= \mu_1 k, \\ \mu_1 \lambda_{12} + \mu_2 \lambda_{22} + \cdots + \mu_\varrho \lambda_{\varrho 2} &= \mu_2 k, \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdots \quad\quad \cdot \quad &\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdots \quad\quad \cdot \quad &\quad \cdot \\ \mu_1 \lambda_{1\varrho} + \mu_2 \lambda_{2\varrho} + \cdots + \mu_\varrho \lambda_{\varrho\varrho} &= \mu_\varrho k, \end{aligned} \tag{32}$$

also k eine Wurzel der folgenden Gleichung ist:

$$\begin{vmatrix} \lambda_{11} - k, & \lambda_{21}, & \ldots, & \lambda_{\varrho 1} \\ \lambda_{12}, & \lambda_{22} - k, & \ldots, & \lambda_{\varrho 2} \\ \cdot & \cdot & \ldots, & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots, & \cdot \\ \lambda_{1\varrho}, & \lambda_{2\varrho}, & \ldots, & \lambda_{\varrho\varrho} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{33}$$

Ist k Wurzel dieser Gleichung, dann können wir aus dem System (32) die Coefficienten

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\varrho$$

eindeutig, oder mehrdeutig so bestimmen, dass jedenfalls die Gleichung (31) besteht. Wenn jetzt

$$\mu_1 \gamma_{1i} + \mu_2 \gamma_{2i} + \cdots + \mu_\varrho \gamma_{\varrho i}$$

mit ε_i bezeichnet wird, und

$$u = \varepsilon_1 y_1 + \varepsilon_2 y_2 + \cdots + \varepsilon_n y_n,$$

so genügt u der homogenen linearen Differentialgleichung von der $n - 1^{\text{ten}}$ Ordnung:

$$(c_0 - k)\, u + c_1 u' + c_2 u'' + \cdots + c_{n-1} u^{(n-1)} = 0;$$

die vorgelegte Gleichung ist also auch in diesem Falle reducibel und wir erhalten zugleich eine ausgezeichnete Lösung der Gleichung niedrigerer Ordnung, welche sich bei dem Umlauf um den Punkt a multiplicativ verhält.*)

Göttingen, im Januar 1894.

---

*) Nachträglich habe ich von einer Arbeit des Hrn. Bendixson (Stockholm, Öfversicht, 1892) Kenntniss erhalten. Ein Theil der unter 4 und 5 enthaltenen Entwicklungen meiner Arbeit ist durch die Abhandlung des Herrn Bendixson überflüssig geworden und wurde nur des Zusammenhanges halber beibehalten.

März 1894. E. B.