Ueber einige besondere Fälle der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

§ 1.

Bei der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten

$$(1)\qquad (A_0 x + B_0)\frac{d^2y}{dx^2} + (A_1 x + B_1)\frac{dy}{dx} + (A_2 x + B_2) y = 0,$$

die sich nach der von Euler*) angegebenen Methode mittelst bestimmter Integrale lösen lässt, sind bekanntlich zunächst die zwei Fälle zu unterscheiden, ob A_0 von Null verschieden, oder ob A_0 gleich Null ist. Hat A_0 einen von Null verschiedenen Werth, so wird die Gleichung (1) durch die Substitution $x = x' - \frac{B_0}{A_0}$ auf eine Gleichung

$$(2)\qquad x'\frac{d^2y}{dx'^2} + (a_1 x' + b_1)\frac{dy}{dx'} + (a_2 x' + b_2)\, y = 0,$$

in der a_1, a_2, b_1, b_2 constant sind, reducirt, während im Falle $A_0 = 0$ durch Division mit B_0 eine Gleichung von der Form

$$(3)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + (a_1 x + b_1)\frac{dy}{dx} + (a_2 x + b_2)\, y = 0$$

erhalten wird.

In (2) setzt man

$$(4)\qquad y = e^{sx'}\, Y,$$

wodurch für Y die Differentialgleichung

$$(5)\quad x'\frac{d^2Y}{dx'^2} + [(2s + a_1)x' + b_1]\frac{dY}{dx'} + [(s^2 + a_1 s + a_2)x' + b_1 s + b_2]\, Y = 0$$

entsteht, und bestimmt die Constante s durch

$$(6)\qquad s^2 + a_1 s + a_2 = 0.$$

*) Institutiones calculi integralis, Vol. II, Cap. X. art. 1036.

Ist s keine Doppelwurzel von (6), also $2s + a_1$ von Null verschieden, so ergiebt sich aus (5) durch die Substitution

$$x' = -\frac{x''}{2s + a_1}$$

die Gleichung

$$x'' \frac{d^2 Y}{dx''^2} = (x'' - b_1) \frac{dY}{dx''} + \frac{b_1 s + b_2}{2s + a_1} Y,$$

welche, wenn x'', Y wieder durch x, y ersetzt, und α, ϱ als die Constanten

$$\alpha = \frac{b_1 s + b_2}{2s + a_1}, \quad \varrho = b_1$$

definirt werden, die Gestalt

$$(7) \qquad x \frac{d^2 y}{dx^2} = (x - \varrho) \frac{dy}{dx} + \alpha y$$

annimmt. Hat die Gleichung (6) dagegen eine Doppelwurzel $s = -\frac{a_1}{2}$, $\left(\text{also } a_2 = \frac{a_1^2}{4}\right)$, so substituirt man in (5)

$$x = -\frac{x''}{b_1 s + b_2}$$

und erhält hierdurch, wenn schliesslich x, y, ϱ statt x'', Y, b_1 geschrieben wird, die Gleichung

$$(8) \qquad x \frac{d^2 y}{dx^2} + \varrho \frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Die Constante $b_1 s + b_2$ darf als verschieden von Null angesehen werden, da die Gleichung (5) sonst in dem betrachteten Falle auf eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung zurückkommt.

Aus der obigen Rechnung folgt, dass die Differentialgleichung (1) sich stets auf eine der drei Formen (7), (8), (3) reduciren lässt. Die Gleichung (7) hat der Verfasser in einem im 36ten Bande dieser Annalen veröffentlichten Aufsatze*) behandelt. Es ergab sich, dass die Gleichung (7) durch bestimmte Integrale befriedigt wird, welche für beliebige Werthe der Constanten α und ϱ einen Sinn behalten. Die nachstehenden Untersuchungen führen zu einem ähnlichen Resultat in Bezug auf die Gleichungen (8) und (3), indem Lösungen der letzteren Gleichungen in Gestalt bestimmter Integrale, die allgemein convergent sind, abgeleitet werden. Geht man von den bestimmten Integralen zu den Potenzreihen über, so treten die zuerst von Hankel**) betrachteten Modificationen der Euler'schen Integrale als Factoren bei den Reihenentwickelungen auf.

---

*) Ueber die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten.

**) Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. Phys., Bd. 9, pag. 12, 1864.

Die Constante ϱ wird in (8) — wie hinsichtlich (7) auch in der soeben genannten Arbeit (in Bd. 36) geschieht — als nicht ganzzahlig vorausgesetzt. Hierdurch bleibt der Fall, dass die Differentialgleichung ein logarithmisches particuläres Integral besitzt, von der Betrachtung ausgeschlossen.

Auch die Gleichungen (8) und (3) lassen sich, wie Weiler*) gezeigt hat, durch gewisse Substitutionen auf die Form (7) zurückführen. Im Allgemeinen wird es indessen zweckmässiger sein, diese Reduction nicht vorzunehmen. Denn dieselbe liefert (von speciellen Fällen abgesehen) weniger einfache Integralausdrücke, als sich bei der directen Behandlung von (8) und (3) ergeben. Die Substitution, durch welche nach Weiler die Gleichung (8) auf die Form (7) gebracht wird,

$$x = \left(\frac{\xi}{4}\right)^2, \quad y = e^{-\frac{1}{2}\xi}\,\eta = e^{-2\sqrt{x}}\,\eta,$$

hat ausserdem, wie man leicht sieht, den Nachtheil, dass aus den Hauptintegralen von (7) nicht die Hauptintegrale von (8) erhalten werden. Noch weniger dürfte sich bei der Gleichung (3) die Reduction auf die Gleichung (7) empfehlen, da der Punkt $x = 0$ zwar für (7), nicht aber für (3) ein singulärer ist; es wird mithin durch das Weiler'sche Verfahren, gewissermassen willkürlich, ein neuer singulärer Punkt in die Differentialgleichung (3) eingeführt.

Die Gleichung (8) ist in den nachstehenden §§ 2—4, die Gleichung (3) in § 5 behandelt worden. Man setzt in die Gleichung (8) ein Integral von der Form $\int U(u-x)^\lambda\,du$ für y ein und bestimmt U als Function von u durch eine einfachere lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Der Gleichung (3) genügen bekanntlich, wenn $a_1 = 0$ ist, Functionen von wesentlich anderem Charakter, als wenn a_1 von Null verschieden ist; hinsichtlich des Falles $a_1 = 0$ wird auf einen nachfolgenden Aufsatz**) verwiesen.

In der oben erwähnten Arbeit im 36ten Bande dieser Annalen ist für die unendliche Reihe

$$1 + \frac{\alpha}{1\,.\,\varrho}\,x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2\,.\,\varrho(\varrho+1)}\,x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\varrho(\varrho+1)(\varrho+2)}\,x^3 + \cdots$$

die abgekürzte Benennung $F(\alpha;\varrho;x)$ angewendet worden. Analog wird im Folgenden durch $\mathfrak{F}(\varrho;x)$ die unendliche Reihe

$$\mathfrak{F}(\varrho;x) = 1 + \frac{x}{1\,.\,\varrho} + \frac{x^2}{1\,.\,2\,.\,\varrho(\varrho+1)} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\varrho(\varrho+1)(\varrho+2)} + \cdots$$

bezeichnet.

---

*) „Integration der linearen Differentialgleichungen etc.", Crelle's Journal, Bd. 51, 1856, pag. 127—129.

**) „Ueber eine binomische lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung", dieser Band, pag. 247.

§ 2.

Setzt man in die Differentialgleichung

(8) $$x\frac{d^2y}{dx^2}+\varrho\frac{dy}{dx}-y=0$$

für y das bestimmte Integral

(9) $$y=\int_g^h(u-x)^\lambda U\,du$$

ein, wo U von u allein abhängt, λ, g Constanten bedeuten, und h entweder constant oder gleich x ist, so ergiebt sich die Gleichung

$$\left.\begin{array}{r}\lambda(\lambda-1)\int_g^h(u-x)^{\lambda-2}\,u\,U\,du\\ -\lambda(\varrho+\lambda-1)\int_g^h(u-x)^{\lambda-1}\,U\,du-\int_g^h(u-x)^\lambda\,U\,du\end{array}\right\}=0.$$

Mittelst der Formel der theilweisen Integration findet man

$$\lambda\int_g^h(u-x)^{\lambda-1}\,U\,du=[(u-x)^\lambda\,U]_{u=g}^{u=h}-\int_g^h(u-x)^\lambda\frac{dU}{du}\,du$$

und durch zweimalige Anwendung derselben Formel

$$\lambda(\lambda-1)\int_g^h(u-x)^{\lambda-2}\,u\,U\,du$$

$$=\left[\lambda(u-x)^{\lambda-1}\,u\,U-(u-x)^\lambda\frac{d(uU)}{du}\right]_{u=g}^{u=h}+\int_g^h(u-x)^\lambda\frac{d^2(uU)}{du^2}\,du.$$

Wird also durch M der Ausdruck

$$M=\lambda(u-x)^{\lambda-1}\,u\,U-(u-x)^\lambda\left\{\frac{d(uU)}{du}+(\varrho+\lambda-1)\,U\right\}$$

bezeichnet, so folgt aus (8) die Gleichung

$$[M]_{u=g}^{u=h}+\int_g^h(u-x)^\lambda\left\{\frac{d^2(uU)}{du^2}+(\varrho+\lambda-1)\frac{dU}{du}-U\right\}du=0.$$

Die Grösse U werde als Function von u durch die Differentialgleichung

(10) $$\frac{d^2(uU)}{du^2}+(\varrho+\lambda-1)\frac{dU}{du}-U=0$$

bestimmt. Dann ist das Integral (9) eine particuläre Lösung von (8), unter der Bedingung, dass die Grenzen g und h so gewählt werden, dass

(11) $$[M]_{u=h}-[M]_{u=g}=0$$

ist.

Aus (10) erhält man durch die Substitution $u=t^2$ die Gleichung

$$\frac{d^2(tU)}{dt^2}+(2\varrho+2\lambda-1)\frac{dU}{dt}-4tU=0,$$

die, wenn

$$2\varrho + 2\lambda - 1 = 0, \quad \lambda = \frac{1}{2} - \varrho \tag{12}$$

genommen wird, in eine lineare Differentialgleichung für tU mit constanten Coefficienten übergeht. Es ist hiernach

$$tU = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t},$$

also

$$U = \frac{1}{\sqrt{u}} \left\{ C_1 e^{2\sqrt{u}} + C_2 e^{-2\sqrt{u}} \right\}, \tag{13}$$

wo C_1 und C_2 willkürliche Constanten bedeuten. Für U sollen nach einander die zwei Ausdrücke

$$U = \frac{1}{\sqrt{u}} \left(e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}} \right) \tag{14}$$

und

$$U = \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-2\sqrt{u}} \tag{15}$$

angewendet werden, die aus (13) für $C_1 = C_2 = 1$, resp. $C_1 = 0$ $C_2 = 1$ entstehen. Die Grösse M hat, wenn für U die Function (14) gesetzt wird, den Werth

$$M = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} - \varrho\right)(u-x)^{-\frac{1}{2}-\varrho} \sqrt{u} \left(e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}}\right) \\ -(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho} \left(e^{2\sqrt{u}} - e^{-2\sqrt{u}}\right), \end{cases} \tag{16}$$

und, wenn U gleich der Function (15) ist, den Werth

$$M = e^{-2\sqrt{u}} \left[\left(\frac{1}{2} - \varrho\right)(u-x)^{-\frac{1}{2}-\varrho} \sqrt{u} + (u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho} \right]. \tag{17}$$

Man nehme zunächst den reellen Bestandtheil der Constante $\frac{1}{2} + \varrho$ als negativ an. Dann haben die Summen (16) und (17) für $u = x$ den Werth Null. Der Ausdruck (16) verschwindet ausserdem für $u = 0$, so dass die Bedingung (11), wenn U gleich der Function (14) ist, durch die Werthe $g = 0$, $h = x$ befriedigt wird. Demnach stellt das bestimmte Integral

$$\int_0^x \left(e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}}\right)(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho} \frac{du}{\sqrt{u}} \tag{18}$$

eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (8) dar. Der Ausdruck (17) verschwindet für $u = \infty$, unter der Voraussetzung, dass bei $\sqrt{u}$ das positive Vorzeichen gewählt werde, so dass der Exponent von e negativ ist. Man kann daher bei Anwendung der Function (15) den Werth ∞ als Integralgrenze in (9) nehmen, worauf in § 4 näher eingegangen wird.

Integrirt man die Gleichung (8) durch eine Potenzreihe

$$y = x^{\varkappa} + \gamma_1 x^{\varkappa+1} + \gamma_2 x^{\varkappa+2} + \cdots,$$

so ergeben sich die particulären Integrale

(19) $$\mathfrak{F}(\varrho; x) = 1 + \frac{x}{1.\varrho} + \frac{x^2}{1.2.\varrho(\varrho+1)} + \frac{x^3}{1.2.3.\varrho(\varrho+1)(\varrho+2)} + \cdots$$

und

(20) $$x^{1-\varrho}\,\mathfrak{F}(2-\varrho; x) = x^{1-\varrho}\left\{1 + \frac{x}{1.(2-\varrho)} + \frac{x^2}{1.2.(2-\varrho)(3-\varrho)} + \cdots\right\}.$$

Der Ausdruck (19) ist das eindeutige, der Ausdruck (20) das mehrdeutige Hauptintegral der Gleichung (8). Die Reihen $\mathfrak{F}(\varrho; x)$ und $\mathfrak{F}(2-\varrho; x)$ haben, da die Constante ϱ als nicht ganzzahlig vorausgesetzt wird, für jedes endliche x einen bestimmten endlichen Werth. Von der Reihe (20) unterscheidet sich nun, wie gezeigt werden soll, das Integral (18) nur durch einen constanten Factor.

Man wendet auf das Integral (18), als dessen Integrationsweg die vom Punkte 0 zum Punkte x gezogene Gerade gewählt werden möge, die Substitution $u = wx$ an, wodurch dasselbe sich in den Ausdruck

$$(-1)^{\frac{1}{2}-\varrho} x^{1-\varrho}\int_0^1 \left(e^{2\sqrt{wx}} + e^{-2\sqrt{wx}}\right) w^{-\frac{1}{2}} (1-w)^{\frac{1}{2}-\varrho}\, dw$$

verwandelt. Da aber

$$e^{2\sqrt{wx}} + e^{-2\sqrt{wx}} = 2\left\{1 + \frac{2^2 wx}{1.2} + \frac{2^4 w^2 x^2}{1.2.3.4} + \cdots + \frac{2^{2\nu} w^\nu x^\nu}{(2\nu)!} + \cdots\right\}$$

ist, so entsteht aus (18) die Reihe

$$2(-1)^{\frac{1}{2}-\varrho} x^{1-\varrho}\left\{\begin{array}{l} E\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\varrho\right) + \frac{2^2 x}{1.2} E\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}-\varrho\right) \\ + \cdots + \frac{2^{2\nu} x^\nu}{(2\nu)!} E\left(\nu+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\varrho\right) + \cdots \end{array}\right\},$$

wo durch $E(p, q)$ das Euler'sche Integral erster Art

$$E(p, q) = \int_0^1 w^{p-1}(1-w)^{q-1}\, dw$$

bezeichnet wird. Der allgemeine Term dieser Reihe geht nach Benutzung der Formel

$$E\left(\nu+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\varrho\right) = \frac{1.3.5\ldots(2\nu-1)}{2^\nu(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots(\nu+1-\varrho)} E\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\varrho\right)$$

in den Quotienten

$$\frac{2(-1)^{\frac{1}{2}-\varrho} x^{1-\varrho+\nu} E\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\varrho\right)}{1.2.3\ldots\nu.(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots(\nu+1-\varrho)}$$

über, in welchem man den Factor $(-1)^{\frac{1}{2}-\varrho}$ fortzulassen hat, falls in (18) die Potenz $(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}$ durch $(x-u)^{\frac{1}{2}-\varrho}$ ersetzt wird. Man erhält daher die Gleichung

$$(21)\qquad \begin{cases} \int_0^x \left(e^{2\sqrt{u}}+e^{-2\sqrt{u}}\right)(x-u)^{\frac{1}{2}-\varrho}\frac{du}{\sqrt{u}} \\ = 2E\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\varrho\right) x^{1-\varrho}\,\mathfrak{F}(2-\varrho;x). \end{cases}$$

Es wurde bisher angenommen, dass der reelle Bestandtheil der Constante ϱ unterhalb des Werthes $-\frac{1}{2}$ liege. Die Convergenz des Integrals (18) erfordert jedoch nur, dass der reelle Theil von ϱ kleiner als $\frac{3}{2}$ sei; ebenso wird in der Gleichung (21) nur $\varrho<\frac{3}{2}$ vorausgesetzt. Die letztere Gleichung zeigt, dass das Integral (18), sobald es überhaupt einen Sinn hat, der Differentialgleichung (8) genügt. Daher wird die mehrdeutige Hauptlösung von (8) nicht nur im Fall $\varrho<-\frac{1}{2}$, sondern auch im Fall $-\frac{1}{2}\leqq\varrho<\frac{3}{2}$ durch das Integral (18) angegeben.

§ 3.

In (18) wurde eine gerade Linie als Integrationsweg angewendet. Indem man dieselbe durch eine geschlossene Curve ersetzt, erhält man eine allgemein gültige Darstellung der mehrdeutigen Hauptlösung von (8) durch ein bestimmtes Integral.

Man wähle für das Integral (9), nachdem für U die Function (14) und für λ der Werth (12) gesetzt worden sind, als Integrationsweg eine geschlossene, sich selbst nicht schneidende Curve, die im Nullpunkt beginnt und endigt und den Punkt x umschliesst. Das hierdurch entstehende Integral, welches kurz durch

$$(22)\qquad \overline{\int_0^{(x)}}\left(e^{2\sqrt{u}}+e^{-2\sqrt{u}}\right)(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}\frac{du}{\sqrt{u}}$$

bezeichnet wird, ist, da der Bedingung (11) Genüge geschieht, eine particuläre Lösung der Gleichung (8). Es werde wiederum $u=wx$ substituirt, und an Stelle von $e^{2\sqrt{wx}}+e^{-2\sqrt{wx}}$ die in § 2 genannte Reihe eingeführt. Dann findet man für das Integral (22) die Entwickelung

$$2x^{1-\varrho}\left\{G_0+\frac{2^2x}{1.2}G_1+\frac{2^4x^2}{4!}G_2+\cdots+\frac{2^{2\nu}x^\nu}{(2\nu)!}G_\nu+\cdots\right\},$$

in der G_ν das constante Integral

$$G_\nu = \overline{\int_0^{(1)}} w^{\nu - \frac{1}{2}} (w-1)^{\frac{1}{2} - \varrho} dw$$

bedeutet. Die Grösse G_ν gehört zu den von Hankel definirten Integralen, die sich von den entsprechenden Euler'schen Integralen nur durch den geschlossenen Integrationsweg unterscheiden. Der Integrationsweg von G_ν, der vom Punkte 0 ausgeht und den Punkt 1 umschliesst, schneide die positive reelle Axe in einem Punkte $w = \gamma$. Man setzt fest, dass in letzerem Punkte die Potenzen $w^{\nu - \frac{1}{2}}$ und $(w-1)^{\frac{1}{2} - \varrho}$ die Werthe $e^{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\log\gamma}$ und $e^{\left(\frac{1}{2} - \varrho\right)\log(\gamma - 1)}$ haben sollen, in denen $\log\gamma$ und $\log(\gamma - 1)$ reell sind. Dann ist, bei Anwendung der vom Verfasser in § 2 des Aufsatzes „Zur Theorie der Euler'schen Integrale" angegebenen Bezeichnung*),

$$G_\nu = \overline{E}\left(\nu + \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2} - \varrho\right),$$

oder, wenn die Formel (l. c., pag. 511)

$$\overline{E}(a+\nu, b) = \frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+\nu-1)}\overline{E}(a, b)$$

berücksichtigt wird,

$$G_\nu = \frac{1}{2^\nu} \frac{1.3.5\ldots(2\nu-1)}{(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots(\nu+1-\varrho)} \overline{E}\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2} - \varrho\right).$$

Hierdurch erhält man für das Integral (22), in welchem ϱ eine beliebige Constante sein darf, die zu (21) analoge Gleichung

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} &\overline{\int_0^{(x)}} \left(e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}}\right)(u-x)^{\frac{1}{2} - \varrho} \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= 2\overline{E}\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2} - \varrho\right) x^{1-\varrho}\, \mathfrak{F}(2-\varrho; x). \end{aligned} \right.$$

Von der in § 1 gemachten Voraussetzung, dass die Constante ϱ nicht ganzzahlig sein soll, kann hier insofern abgesehen werden, als die Gleichungen (21) und (23) — wie die obige Rechnung zeigt — auch in dem Falle gültig bleiben, wo ϱ gleich 1, 0 oder einer negativen ganzen Zahl ist. Man bemerke ferner, dass wenn für ϱ eine positive ganze Zahl m, die grösser als 1 ist, gesetzt wird, das Integral (22) bis auf einen constanten Factor mit der Reihe (19) übereinstimmt. Denn die Grösse $\overline{E}(a, b)$ verschwindet, sowohl wenn b eine positive ganze Zahl, als auch wenn $a + b$ eine negative, ganze Zahl oder Null ist (l. c. pag. 511 und 512). Im Falle $\varrho = m$ hat also die

*) Diese Annalen, Bd. 35, pag. 510, Gleichung (24).

Constante G_ν, $=\overline{E}\left(\nu+\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}-m\right)$, da $a+b$ gleich $\nu+2-m$ wird, den Werth Null für $\nu=0,1,2,\ldots, m-2$. Indem man im Uebrigen $\nu=m-1+\mu$ setzt, findet man (für $\mu=0,1,2$, etc.)

$$G_\nu=G_{m-1+\mu}=\overline{E}\left(m-\frac{1}{2}+\mu,\ \frac{3}{2}-m\right)$$
$$=\frac{(2m-1)(2m+1)\ldots(2m+2\mu-3)}{1.2.3\ldots\mu.2^\mu}\,\overline{E}\left(m-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}-m\right)$$

oder, wegen $\overline{E}(a,b)=\overline{E}(a,1-a-b)$ und $\overline{E}(a,0)=2\pi i$,

$$G_\nu=\frac{(2m-1)(2m+1)\ldots(2m+2\mu-3)}{1.2.3\ldots\mu}\,\frac{2\pi i}{2^\mu}.$$

Mithin ist

$$\frac{2^{2\nu}}{(2\nu)!}G_\nu=\frac{2^{2m-2}}{(2m-2)!}\,\frac{2\pi i}{\mu!\,m(m+1)\ldots(m+\mu-1)}.$$

Hieraus folgt aber, dass das Integral (22) sich für $\varrho=m$ in das Product aus der Reihe $\mathfrak{F}(m;x)$ und der Constante $\frac{2^{2m}\pi i}{(2m-2)!}$ verwandelt.

Die Integrale (18) und (22) wurden aus (9) erhalten, indem man für U den Ausdruck (14) einsetzte. Dieselben können jedoch auch als Integrale von der Form (9), in denen U den Werth (15), $\frac{1}{\sqrt{u}}e^{-2\sqrt{u}}$, hat, geschrieben werden, wenn man die Integrationswege in gewisser Weise ändert. Man nenne zur Abkürzung $\Phi(u,x)$ die Function

$$\Phi(u,x)=e^{-2\sqrt{u}}(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}\frac{1}{\sqrt{u}} \tag{24}$$

und integrire dieselbe nach u längs einer geschlossenen, vom Punkte x ausgehenden Curve, welche den Nullpunkt umschliesst. Das hierdurch entstehende Integral

$$\overline{\int_x^{(0)}}\Phi(u,x)\,du, \tag{25}$$

bei welchem $\varrho<\frac{3}{2}$ vorausgesetzt wird, ist, abgesehen vom Vorzeichen, mit dem Integral (18) identisch. Denn wenn man um den Nullpunkt einen unendlich kleinen Kreis $\mathfrak{K}$ legt und vom Punkte x eine Gerade zu einem Punkte $\mathfrak{p}$ dieses Kreises zieht, so kann der Integrationsweg des Integrals (25) durch die gerade Strecke $x\mathfrak{p}$, den Kreis $\mathfrak{K}$ und die Strecke $\mathfrak{p}x$ ersetzt werden. Das Integral längs des Kreises $\mathfrak{K}$ ist aber verschwindend klein, und da die Grösse $\sqrt{u}$ durch den Umlauf um den Nullpunkt den Factor -1 aufnimmt, so ist das Integral (25) in der That gleich dem Ausdruck

$$\int_x^0\left(e^{-2\sqrt{u}}+e^{+2\sqrt{u}}\right)(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}\frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Man bilde ferner (nach § 1 der Abh. „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf“ in Bd. 35 dieser Annalen) das geschlossene Integral

$$(26) \qquad \overline{\int_{\mathfrak{c}}}^{(x,0,x-,0-)} \Phi(u,x)\,du,$$

dessen Integrationsweg von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{c}$ ausgeht und nach je einem positiven Umlauf um den Punkt x und um den Punkt 0 auch einen negativen Umlauf um den Punkt x und einen negativen Umlauf um den Punkt 0 enthält. Der Bedingung (11) wird bei Anwendung dieses Integrationsweges genügt. Der Werth des Integrals (26) hängt, da der schliessliche Werth der zu integrirenden Function mit dem Anfangswerthe derselben übereinstimmt, von der Wahl der unteren Integralgrenze nicht ab. Man kann daher den Punkt $\mathfrak{c}$ durch den zuvor genannten Punkt $\mathfrak{p}$, der dem Nullpunkte unendlich nahe ist, ersetzen und für die zwei Umläufe um den Nullpunkt den kleinen Kreis $\mathfrak{K}$ benutzen; dann liefern letztere nur einen unendlich kleinen Beitrag zu dem betrachteten Integral. Die Potenz $(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}$ hat im Endpunkte des negativen Umlaufes um den Punkt x ihren anfänglichen Werth wiedererlangt, so dass, wenn unter Hinzufügung des Factors -1 die Richtung dieses Umlaufes in die positive verwandelt wird, für $(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}$ dieselben Werthe wie bei dem positiven Umlauf um x zur Anwendung kommen. Dagegen hat sich bei $\sqrt{u}$ durch den dazwischen liegenden Umlauf um den Nullpunkt das Vorzeichen geändert. Demnach ist das Integral (26) mit dem Ausdruck

$$\overline{\int_{\mathfrak{p}}}^{(x)} (e^{-2\sqrt{u}}+e^{+2\sqrt{u}})(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}\,\frac{du}{\sqrt{u}},$$

d. h. mit (22) identisch.

§ 4.

Um die eindeutige Hauptlösung der Differentialgleichung (8) durch ein Integral von der Form (9) darzustellen, wendet man, nachdem für U die Function (15) substituirt ist, für (9) einen geschlossenen, vom unendlich entfernten Punkte der positiven reellen Axe ausgehenden Integrationsweg an.

Es werde um den Nullpunkt als Mittelpunkt ein Kreis $\mathfrak{L}$ gelegt, dessen Radius l grösser als mod. x ist, so dass die Verbindungslinie der Punkte 0 und x, welche $\mathfrak{A}$ heissen möge, innerhalb $\mathfrak{L}$ liegt. Der Schnittpunkt des Kreises $\mathfrak{L}$ mit der positiven reellen Axe wird $\mathfrak{b}$ genannt. Man bilde nun ein Integral der Function $\Phi(u,x)$ in der

Art, dass die Variable u zunächst die positive reelle Axe von ∞ bis zum Punkte $\mathfrak{b}$, hierauf zweimal hintereinander den Kreis $\mathfrak{K}$ in positiver Drehungsrichtung durchläuft und sodann vom Punkte $\mathfrak{b}$ längs der positiven reellen Axe zum Werthe ∞ zurückkehrt. Zugleich wird

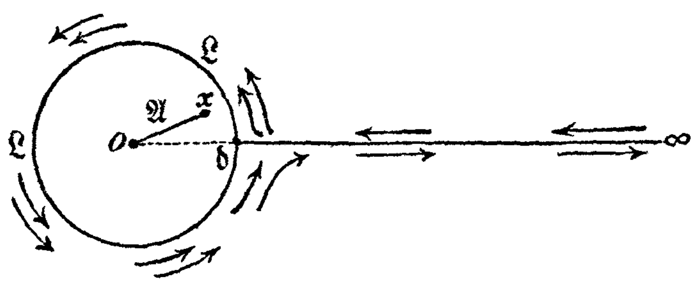

Fig. 1.

bestimmt (cfr. § 2), dass an der unteren Integralgrenze das positive Vorzeichen bei $\sqrt{u}$ genommen werde. Man wendet für das so definirte Integral, da der Integrationsweg zwei positive Umläufe um die Linie $\mathfrak{A}$ enthält, die abgekürzte Bezeichnung

$$(27) \qquad \int_{\infty}^{(\mathfrak{A},\mathfrak{A})} e^{-2\sqrt{u}}(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}\frac{du}{\sqrt{u}}$$

an. Das Integral (27) ist convergent; denn wegen der zweimaligen Umkreisung des Nullpunktes gilt auch in dem letzten Abschnitt des Integrationsweges das positive Vorzeichen für $\sqrt{u}$, so dass die Exponentialgrösse $e^{-2\sqrt{u}}$ sich dem Werthe Null nähert. Für die Potenz $(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}$ kann in (27), weil mod. u in jedem Punkte des Integrationsweges grösser als mod. x ist, die Reihe

$$(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho} = u^{\frac{1}{2}-\varrho}\left(1-\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{2}-\varrho}$$

$$= u^{\frac{1}{2}-\varrho}\left\{1-\left(\frac{1}{2}-\varrho\right)_1\frac{x}{u}+\left(\frac{1}{2}-\varrho\right)_2\frac{x^2}{u^2}-\cdots+(-1)^\nu\left(\frac{1}{2}-\varrho\right)_\nu\frac{x^\nu}{u^\nu}+\cdots\right\}$$

eingesetzt werden. Dann treten die Potenzen von x vor die Integralzeichen, und es bleibt als singulärer Werth der zu integrirenden Functionen nur der Werth $u=0$ übrig. Auf diese Weise erhält man für das Integral (27), da der Binomialcoefficient $\left(\frac{1}{2}-\varrho\right)_\nu$ als der Quotient

$$(-1)^\nu\frac{(2\varrho-1)(2\varrho+1)(2\varrho+3)\cdots(2\varrho+2\nu-3)}{2^\nu\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots\nu}$$

geschrieben werden kann, die Reihenentwickelung

$$(28)\qquad \begin{cases} H_0 + \frac{2\varrho-1}{1} H_1 \frac{x}{2} + \frac{(2\varrho-1)(2\varrho+1)}{1\cdot 2} H_2\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \cdots \\ + \frac{(2\varrho-1)(2\varrho+1)(2\varrho+3)\cdots(2\varrho+2\nu-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \nu} H_\nu\left(\frac{x}{2}\right)^\nu + \cdots \text{ inf.}, \end{cases}$$

woselbst H_ν das constante Integral

$$(29)\qquad H_\nu = \overline{\int_\infty^{(0,0)}} e^{-2\sqrt{u}}\, u^{-\varrho-\nu}\, du$$

bedeutet. In dem Integral H_ν, dessen Integrationsweg mit dem des Integrals (27) übereinstimmt, werde

$$2\sqrt{u} = t, \quad e^{-2\sqrt{u}}\, u^{-\varrho-\nu} du = e^{-t}\left(\frac{t}{2}\right)^{1-2\varrho-2\nu} dt$$

gesetzt. Dann nimmt die Variable t in dem ersten Theil des Integrationsweges, welcher den Werthen der Variable u von $+\infty$ bis $+l$ entspricht, die Werthe von $+\infty$ bis $+2\sqrt{l}$ an. Während u den Kreis $\mathfrak{K}$ zweimal durchläuft, legt t den Kreis mit dem Radius $2\sqrt{l}$ einmal zurück, und in dem letzten Theil des Integrationsweges kommen bei t wiederum die reellen positiven Werthe zwischen $+2\sqrt{l}$ und $+\infty$ vor. Demgemäss ist

$$(29\text{a})\qquad H_\nu = 2^{2\varrho+2\nu-1} \overline{\int_{+\infty}^{(0)}} e^{-t}\, t^{1-2\varrho-2\nu} dt.$$

Es wird nun nach § 3 des Aufsatzes des Verfassers „Zur Theorie der Euler'schen Integrale" im 35ten Bande dieser Annalen (Gleichung (34)) durch $\bar{\Gamma}(a)$ das geschlossene Integral

$$(30)\qquad \bar{\Gamma}(a) = e^{-\pi i a} \overline{\int_{+\infty}^{(0)}} e^{-t} t^{a-1}\, dt$$

bezeichnet, dessen Integrationsweg derselbe wie bei dem Integral (29a) ist. Die in dem Integral $\bar{\Gamma}(a)$ (welches sich von dem entsprechenden Hankel'schen Integral nur formell unterscheidet) vorkommende Potenz t^{a-1} wird dadurch näher bestimmt, dass in dem ersten Theil des Integrationsweges für t^{a-1} der Werth $e^{(a-1)\log t}$, in welchem $\log t$ den reellen Logarithmus bedeutet, anzuwenden ist. Indem man in dem Integral H_ν die analoge Bestimmung für die Potenz $t^{1-2\varrho-2\nu}$ gelten lässt, hat man, da $e^{\pi i(2-2\varrho-2\nu)} = e^{-2\pi i\varrho}$ ist, die Gleichung

$$(31)\qquad H_\nu = 2^{2\varrho+2\nu-1}\, e^{-2\pi i\varrho}\, \bar{\Gamma}(2-2\varrho-2\nu).$$

Man nehme zunächst an, dass $2-2\varrho$ keine positive ganze Zahl sei. Dann folgt aus der Formel

$$\overline{\Gamma}(a-n) = (-1)^n \frac{\overline{\Gamma}(a)}{(a-1)(a-2)\cdots(a-n)} \tag{32}$$

(l. c. pag. 515), wenn $n = 2\nu$ gesetzt wird, für H_ν der Werth

$$H_\nu = \frac{2^{2\varrho+2\nu-1}\, e^{-2\pi i\varrho}\, \overline{\Gamma}(2-2\varrho)}{(2\varrho-1)\, 2\varrho(2\varrho+1)\cdots(2\varrho+2\nu-2)}. \tag{31a}$$

In dem allgemeinen Term der Reihe (28) heben sich, wenn dieser Werth von H_ν eingeführt wird, die Factoren $2\varrho-1$, $2\varrho+1$, $2\varrho+3, \ldots, 2\varrho+2\nu-3$ und $2^{2\nu}$ fort, wodurch die Reihe (28) sich in den Ausdruck

$$2^{2\varrho-1} e^{-2\pi i\varrho}\, \overline{\Gamma}(2-2\varrho) \begin{Bmatrix} 1 + \dfrac{x}{1\cdot\varrho} + \dfrac{x^2}{1\cdot 2\cdot \varrho(\varrho+1)} + \cdots \\ + \dfrac{x^\nu}{1\cdot 2\cdots \nu\cdot \varrho(\varrho+1)\cdots(\varrho+\nu-1)} + \cdots \end{Bmatrix}$$

verwandelt. Also besteht für das Integral (27) die Gleichung

$$\overline{\int_\infty^{(\mathfrak{A},\mathfrak{A})}} e^{-2\sqrt{u}} (u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho} \frac{du}{\sqrt{u}} = 2^{2\varrho-1} e^{-2\pi i\varrho}\, \overline{\Gamma}(2-2\varrho)\, \mathfrak{F}(\varrho; x). \tag{33}$$

Das vollständige Integral der Differentialgleichung (8) kann demnach, wenn man für die mehrdeutige Hauptlösung die Form (26) anwendet, durch die Summe

$$C_1 \overline{\int_\infty^{(\mathfrak{A},\mathfrak{A})}} \Phi(u,x)\, du + C_2 \overline{\int_c^{(x,0,x-,0-)}} \Phi(u,x)\, du \tag{34}$$

dargestellt werden, in der $\Phi(u, x)$ die Function (24) bedeutet, während C_1 und C_2 willkürliche Constanten sind.

In (33) wurde vorausgesetzt, dass die Constante $2-2\varrho$ keine positive ganze Zahl sei, d. h. dass ϱ weder die Form $\frac{1}{2}-m$, noch die Form $-m$ habe, wo unter m eine positive ganze Zahl oder der Werth Null verstanden wird. Ist $\varrho = -m$, so beginnt die Reihe (28) mit der $(m+1)^{\text{ten}}$ Potenz von x. Denn das Integral $\overline{\Gamma}(a)$ stimmt für positive Argumente a mit dem Producte

$$(e^{\pi ia} - e^{-\pi ia})\Gamma(a) = 2i \sin(\pi a)\Gamma(a),$$

woselbst $\Gamma(a)$ das Euler'sche Integral bedeutet, überein; dasselbe nimmt also für positive ganzzahlige Argumente den Werth Null an. Hieraus folgt, dass die Coefficienten $H_0, H_1, \ldots, H_m$ verschwinden, da sie (nach (31)) bezw. die Factoren $\overline{\Gamma}(2+2m)$, $\overline{\Gamma}(2m), \ldots, \overline{\Gamma}(2)$ enthalten. Indem man sodann in (31) $\nu = m+1+\mu$ setzt, findet man für $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ die Gleichung

$$H_\nu = H_{m+1+\mu} = 2^{2\mu+1}\bar{\Gamma}(-2\mu) = \frac{2^{2\mu+2}\pi i}{1.2.3\ldots 2\mu},$$

welche zeigt, dass die Reihe (28) im Falle $\varrho = -m$ in den Ausdruck

$$(-1)^{m+1}\frac{1.3.5\ldots(2m+1)\pi i}{1.2.3\ldots(m+1)2^{m-1}}x^{m+1}\mathfrak{F}(m+2;x)$$

d. h.

$$\text{Const. } x^{1-\varrho}\mathfrak{F}(2-\varrho;x)$$

übergeht. Man gelangt hierdurch zu dem Resultat, dass sobald ϱ ganzzahlig ist, die zwei bestimmten Integrale (22) und (27) sich nur durch einen constanten Factor von einander unterscheiden. Beide Integrale kommen, abgesehen von constanten Factoren, für $\varrho = 0$, -1, -2, etc. (cfr. die Gleichung (23) und die daran geknüpfte Bemerkung) auf die Reihe (20), für $\varrho = 2, 3$, etc. auf die Reihe (19) zurück, und für $\varrho = 1$ werden die Reihen (19) und (20) einander gleich. Als Ergänzung tritt bekanntlich im Allgemeinen ein logarithmisches particuläres Integral der Gleichung (8) hinzu.

Es bleibt übrig, den Fall zu betrachten, wo $\varrho = \frac{1}{2} - m$ ist. In diesem Falle verschwindet das Integral (27) für einen beliebigen Werth von x. Denn aus (31) folgt wiederum $0 = H_0 = H_1 = \cdots = H_m$, und da die Potenz $(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}$ gleich $(u-x)^m$ wird, so kommen in der Reihe (28) nur die m ersten Potenzen von x vor. Der genannte Fall gehört zu denen, wo das allgemeine Integral der Differentialgleichung (8) sich auf einfachere Functionen von x reducirt. Wie schon S. Spitzer*) gezeigt hat, lässt sich die in (8) definirte Function y durch niedere Transcendenten ausdrücken, sobald die Constante ϱ ein positives oder negatives ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ ist. Hierauf soll noch in Kürze eingegangen werden.

Wenn man von den Ausdrücken

$$\frac{e^{2\sqrt{x}}+e^{-2\sqrt{x}}}{2} = 1 + \frac{2^2 x}{1.2} + \cdots + \frac{2^{2\nu}x^\nu}{(2\nu)!} + \cdots + \frac{2^{2m+2\nu}x^{m+\nu}}{(2m+2\nu)!} + \cdots,$$

$$\frac{e^{2\sqrt{x}}-e^{-2\sqrt{x}}}{2} = \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1} + \frac{2^3x^{\frac{3}{2}}}{3!} + \cdots + \frac{2^{2\nu+1}x^{\nu+\frac{1}{2}}}{(2\nu+1)!} + \cdots,$$

welche mit $\mathfrak{F}\left(\frac{1}{2};x\right)$, resp. $2\sqrt{x}\,\mathfrak{F}\left(\frac{3}{2};x\right)$ identisch sind, den ersteren m Mal, den letzteren $m+1$ Mal nach x differenzirt und die Gleichungen

*) „Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen", Wien, C. Gerold's Sohn, 1878, §§ 36—38.

$$\frac{2^{2m+2\nu}}{(2m+2\nu)!}(m+\nu)(m+\nu-1)(m+\nu-2)\cdots(\nu+1)$$
$$=\frac{2^m}{1.3.5\ldots(2m-1)}\,\frac{1}{\nu!\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(m+\nu-\frac{1}{2}\right)},$$

$$\frac{2^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\nu+\frac{1}{2}-m\right)$$
$$=\frac{(-1)^m 1.3.5\ldots(2m-1)}{2^m\nu!\left(\frac{1}{2}-m\right)\left(\frac{3}{2}-m\right)\cdots\left(\nu-m-\frac{1}{2}\right)}$$

beachtet, so ergiebt sich

$$(35)\qquad \mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}+m;\,x\right)=\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2^{m+1}}\,\frac{d^m\left(e^{2\sqrt{x}}+e^{-2\sqrt{x}}\right)}{dx^m},$$

$$(36)\qquad \mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}-m;\,x\right)=\frac{(-1)^m 2^{m-1}x^{\frac{1}{2}+m}}{1.3.5\ldots(2m-1)}\,\frac{d^{m+1}\left(e^{2\sqrt{x}}-e^{-2\sqrt{x}}\right)}{dx^{m+1}}.$$

Im Falle $\varrho=\frac{1}{2}-m$ lauten nun die particulären Integrale (19) und (20)

$$\mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}-m;\,x\right),\qquad x^{\frac{1}{2}+m}\,\mathfrak{F}\left(\frac{3}{2}+m;\,x\right).$$

Dieselben haben also die Form

$$\text{Const. } x^{\frac{1}{2}+m}\,\frac{d^{m+1}\left(e^{2\sqrt{x}}-e^{-2\sqrt{x}}\right)}{dx^{m+1}}$$

und

$$\text{Const. } x^{\frac{1}{2}+m}\,\frac{d^{m+1}\left(e^{2\sqrt{x}}+e^{-2\sqrt{x}}\right)}{dx^{m+1}},$$

woselbst m neben positiven ganzen Zahlen auch den Werth Null annimmt.

Ist $\varrho=\frac{1}{2}+m$, so reduciren sich nach (35) und (36) die particulären Lösungen (19), (20)

$$\mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}+m;\,x\right),\qquad x^{\frac{1}{2}-m}\,\mathfrak{F}\left(\frac{3}{2}-m;\,x\right)$$

auf die Functionen

$$\text{Const. }\frac{d^m\left(e^{2\sqrt{x}}+e^{-2\sqrt{x}}\right)}{dx^m},\qquad \text{Const. }\frac{d^m\left(e^{2\sqrt{x}}-e^{-2\sqrt{x}}\right)}{dx^m}.$$

Das letztere Resultat lässt sich auch aus den in §§ 2 und 3 erhaltenen Gleichungen ableiten. Das particuläre Integral (22) der Differentialgleichung (8) geht für $\varrho = \frac{1}{2} + m$ in den Ausdruck

$$\overline{\int_0}^{(x)} \frac{e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}}}{\sqrt{u}} \frac{du}{(u-x)^m}$$

über, welcher nach dem bekannten Satze von Cauchy

$$\frac{d^k f(x)}{dx^k} = \frac{1.2.3\ldots k}{2\pi i} \overline{\int_c}^{(x)} \frac{f(u)\,du}{(u-x)^{k+1}}$$

den Differentialquotienten

$$\frac{2\pi i}{1.2.3\ldots(m-1)} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \left(\frac{e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right)$$

darstellt. Durch Anwendung der Gleichung

$$\frac{e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{d\left(e^{2\sqrt{x}} - e^{-2\sqrt{x}}\right)}{dx}$$

findet man also für das Integral (22) im genannten Falle den Werth

$$\frac{2\pi i}{1.2.3\ldots(m-1)} \frac{d^m\left(e^{2\sqrt{x}} - e^{-2\sqrt{x}}\right)}{dx^m}.$$

Da ferner die Function M (§ 2) sich jetzt nur noch im Punkte $u = 0$ verzweigt, bei dem Punkte $u = x$ dagegen eindeutig (wenn auch unstetig) ist, so kann man für U auch den Ausdruck

$$U = \frac{1}{\sqrt{u}}\left(e^{2\sqrt{u}} - e^{-2\sqrt{u}}\right)$$

wählen und der Bedingung (11) durch einen Umlauf der Variable u um den Punkt x genügen. Auf diese Weise erhält man das particuläre Integral

$$\overline{\int_0}^{(x)} \frac{e^{2\sqrt{u}} - e^{-2\sqrt{u}}}{\sqrt{u}} \frac{du}{(u-x)^m}, \tag{37}$$

das nach dem Cauchy'schen Satze mit dem Differentialquotienten

$$\frac{2\pi i}{1.2.3\ldots(m-1)} \frac{d^m\left(e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}\right)}{dx^m}$$

identisch ist.

§ 5.

Es soll nunmehr die in § 1 angeführte Differentialgleichung (3)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1x+b_1)\frac{dy}{dx} + (a_2x+b_2)y = 0$$

behandelt werden, welche keinen anderen singulären Werth als den Werth $x = \infty$ besitzt.

Ist die Constante a_1 von Null verschieden, so setzt man

$$x = x'\sqrt{\frac{2}{a_1}}.$$

Hierdurch entsteht aus (3) die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx'^2} + (2x'+b_1')\frac{dy}{dx'} + (a_2'x'+b_2')y = 0,$$

in der b_1', a_2', b_2' constant sind. Die Substitution

$$y = e^{-\frac{1}{2}a_2'x'}, \qquad x' = \xi + \frac{a_2'-b_1'}{2}$$

ergiebt dann

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + 2\xi\frac{d\eta}{d\xi} + \left[\left(\frac{a_2'}{2}\right)^2 - \frac{a_2'b_1'}{2} + b_2'\right]\eta = 0,$$

so dass, wenn man die Constante $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_2'}{2}\right)^2 - \frac{a_2'b_1'}{2} + b_2'\right]$ durch α bezeichnet, und statt ξ, η wieder x, y schreibt, die Differentialgleichung (3) auf die Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + 2\alpha y = 0 \tag{38}$$

zurückgeführt ist.

Im Falle $a_1 = 0$ geht die Differentialgleichung (3) durch die Substitution $y = e^{-\frac{1}{2}b_1x}\eta$ in

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} + (a_2x+b)\eta = 0$$

über, wo b die Constante $b_2 - \frac{1}{4}b_1^2$ bedeutet. Wird nun x mit einer Variable ξ durch die Gleichung

$$x = -\frac{\xi}{(3a_2)^{\frac{1}{3}}} - \frac{b}{a_2}$$

verbunden, — was zulässig ist, da a_2 hier als verschieden von Null angesehen werden darf, — so erhält man die Gleichung

$$(39) \qquad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \frac{1}{3}\xi\eta = 0,$$

welche auf die Scherk'sche (oder Lobatto'sche) Differentialgleichung zurückkommt. Die letztere Gleichung ist in § 2 des nachfolgenden Aufsatzes „Ueber eine binomische lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung" (dieser Band, pag. 247) einer näheren Betrachtung unterzogen worden. Daher wird hier auf denjenigen Fall der Gleichung (3), wo $a_1 = 0$ ist, nicht weiter eingegangen.

Integrirt man die Gleichung (38) durch die Potenzreihe

$$y = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \gamma_\nu x^\nu + \cdots,$$

so ergeben sich bei Anwendung der abgekürzten Bezeichnung

$$(40) \qquad F(a;\, r;\, z) = 1 + \frac{a}{1.r} z + \frac{a(a+1)}{1.2.r(r+1)} z^2 + \cdots + \text{inf.}$$

die Reihen

$$(41) \qquad F\left(\frac{\alpha}{2};\, \frac{1}{2};\, -x^2\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1\cdot\frac{1}{2}} x^2 + \frac{\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}{1\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}} x^4 - \cdots$$

$$= 1 - \frac{\alpha}{1.2} 2x^2 + \frac{\alpha(\alpha+2)}{1.2.3.4} 2^2 x^4 - \frac{\alpha(\alpha+2)(\alpha+4)}{1.2.3.4.5.6} 2^3 x^6 + \cdots$$

und

$$(42) \qquad x\cdot F\left(\frac{\alpha+1}{2};\, \frac{3}{2};\, -x^2\right) = x\left\{1 - \frac{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{1\cdot\frac{3}{2}} x^2 + \frac{\frac{\alpha+1}{2}\,\frac{\alpha+3}{2}}{1\cdot 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}} x^4 - \cdots\right\}$$

$$= x - \frac{\alpha+1}{2.3} 2x^3 + \frac{(\alpha+1)(\alpha+3)}{2.3.4.5} 2^2 x^5 - \frac{(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+5)}{2.3.4.5.6.7} 2^3 x^7 + \cdots$$

als particuläre Integrale von (38). Dieselben sind transcendente ganze Functionen von x.

Die Substitution des bestimmten Integrals (9)

$$y = \int_g^h (u-x)^\lambda U\, du$$

lässt aus (38) die Gleichung

$$\lambda(\lambda-1)\int_g^h (u-x)^{\lambda-2} U du - 2\lambda\int_g^h (u-x)^{\lambda-1} u\, U du$$
$$+ 2(\lambda+\alpha)\int_g^h (u-x)^\lambda U\, du = 0$$

entstehen, die, wenn der erste Summandus durch theilweise Integration umgeformt, und für λ der Werth $-\alpha$ gewählt wird, sich in

$$[(u-x)^{-\alpha-1} U]_{u=g}^{u=h} - \int_g^h (u-x)^{-\alpha-1}\left\{\frac{dU}{du} + 2u\,U\right\} du = 0$$

verwandelt. Es sei

$$\frac{dU}{du} + 2uU = 0,$$

woraus für U der Werth

$$U = e^{-u^2}$$

folgt. Dann gilt für g und h die Bedingung

(43) $$[e^{-u^2}(u-x)^{-\alpha-1}]_{u=h} - [e^{-u^2}(u-x)^{-\alpha-1}]_{u=g} = 0.$$

Wird diese erfüllt, so ist der Ausdruck

(44) $$y = \int_g^h e^{-u^2}(u-x)^{-\alpha}\, du$$

eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (38). Bevor jedoch die Integrale der letzteren Form behandelt werden, möge eine kurze Bemerkung Platz finden, welche sich auf die in (30) angegebene Grösse $\bar{\Gamma}(a)$ bezieht.

Nach (30) ist $\bar{\Gamma}(a)$ gleich dem Integral

$$e^{-\pi i a}\overline{\int}_{+\infty}^{(0)} e^{-t} t^{a-1}\, dt,$$

in welchem die Variable t zuerst von $+\infty$ aus längs der positiven reellen Axe fortschreitet, dann einen Kreis um den Nullpunkt in positiver Drehungsrichtung beschreibt und längs der positiven reellen Axe zu $+\infty$ zurückkehrt. Ebenso wie bei den gewöhnlichen Integralen die Grenzen vertauscht werden dürfen, wenn man zugleich mit -1 multiplicirt, so ist bei den Integralen mit geschlossener Integrationscurve, unter Hinzufügung des Factors -1, die Aenderung der Richtung zulässig, in welcher die geschlossene Curve durchlaufen wird. Wird bei dem Integral (30) der Integrationsweg in dieser Weise umgekehrt, so ändert sich derselbe nur insofern, als die Variable t dann den Nullpunkt in negativer Drehungsrichtung umkreist. Indessen ist gleichzeitig der Anfangswerth der zu integrirenden Function ein anderer geworden; denn die Potenz t^{a-1} ist auf derjenigen Strecke, welche nunmehr den ersten Theil des Integrationsweges bildet, mit dem Factor $e^{2\pi i a}$ behaftet. Wird der letztere Factor vor das Integralzeichen genommen, so erhält man für $\bar{\Gamma}(a)$ den Ausdruck

(45) $$\bar{\Gamma}(a) = -e^{\pi i a}\overline{\int}_{+\infty}^{(0-)} e^{-t} t^{a-1}\, dt,$$

in welchem (wie in (30)) die Bestimmung gilt, dass die Potenz t^{a-1} auf dem ersten Theil des Integrationsweges den Werth $e^{(a-1)\log t}$ annimmt, wo $\log t$ den reellen Logarithmus bedeutet.

Da das Product $e^{-u^2}(u-x)^{-\alpha-1}$ sowohl für $u = -\infty$ als für $u = +\infty$ verschwindet, so sind für das Integral (44) die Grenzen $g = -\infty$, $h = +\infty$ anwendbar. Man ziehe, wie in § 4, um den Nullpunkt einen Kreis $\mathfrak{K}$, der den Punkt x umschliesst, und dessen Radius durch l bezeichnet wird, und nenne von den zwei Halbkreisen, in welche der Kreis $\mathfrak{K}$ durch die reelle Axe getheilt wird, den unteren $\mathfrak{H}_1$, den oberen $\mathfrak{H}_2$. Dann kann in (44) der Weg der Variable u aus

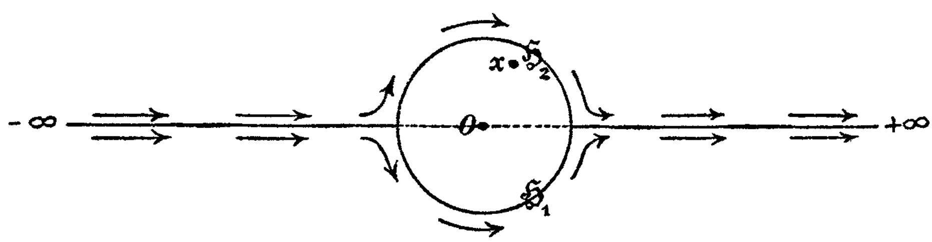

Fig. 2.

dem Abschnitt der negativen reellen Axe von $-\infty$ bis zum Punkte $u = -l$, aus einem der Halbkreise $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ und aus dem Stück der positiven reellen Axe vom Punkte $u = +l$ bis $+\infty$ zusammengesetzt werden. Man erhält auf diese Weise zwei Integrale von der Form

$$(46) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}(u-x)^{-\alpha}\,du,$$

welche Y_1 und Y_2 heissen mögen, und zwar sei Y_1 das Integral, bei dessen Weg der Halbkreis $\mathfrak{H}_1$, und Y_2 dasjenige, wo der Halbkreis $\mathfrak{H}_2$ vorkommt. Die Functionen Y_1 und Y_2 geben zusammen das vollständige Integral der Differentialgleichung (38) an. Da in Y_1 und Y_2 die Ungleichheit mod. $x <$ mod. u für jeden Werth von u erfüllt ist, so lässt sich die Potenz $(u-x)^{-\alpha}$ in die Reihe

$$u^{-\alpha}\left\{1 + \frac{\alpha}{1}\,\frac{x}{u} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)}{1.2\ldots\nu}\,\frac{x^\nu}{u^\nu} + \cdots\right\}$$

entwickeln. Hierdurch gehen Y_1 und Y_2 in die Ausdrücke

$$Y_1 = R_0 + \frac{\alpha}{1}R_1 x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)}{1.2\ldots\nu}R_\nu x^\nu + \cdots,$$

$$Y_2 = S_0 + \frac{\alpha}{1}S_1 x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)}{1.2\ldots\nu}S_\nu x^\nu + \cdots$$

über, in denen R_ν und S_ν constante Integrale von der Form

$$(47) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}u^{-\alpha-\nu}\,du$$

bezeichnen; in R_ν bildet der Halbkreis $\mathfrak{H}_1$, in S_ν der Halbkreis $\mathfrak{H}_2$ den mittleren Theil des Integrationsweges. Wird in (47)

$$u = \sqrt{t}, \quad u^2 = t, \quad e^{-u^2} u^{-\alpha-\nu} du = \frac{1}{2} e^{-t} t^{-\frac{\alpha+\nu+1}{2}} dt$$

gesetzt, so durchläuft die Variable t zuerst das Stück der positiven reellen Axe von $+\infty$ bis zum Punkte $t = l^2$, hierauf den ganzen Kreis mit dem Radius l^2, endlich wiederum die positive reelle Axe vom Punkte l^2 bis $+\infty$. Bei R_ν wird der Kreis in positiver, bei S_ν in negativer Drehungsrichtung zurückgelegt. Man hat also die Gleichungen

$$R_\nu = \frac{1}{2} \int_\infty^{\overline{(0)}} e^{-t} t^{-\frac{\alpha+\nu+1}{2}} dt,$$

$$S_\nu = \frac{1}{2} \int_\infty^{\overline{(0-)}} e^{-t} t^{-\frac{\alpha+\nu+1}{2}} dt.$$

Für die Potenz $t^{-\frac{\alpha+\nu+1}{2}}$ möge, sowohl in R_ν als auch in S_ν, auf dem ersten Abschnitt des Integrationsweges derjenige Werth $e^{-\frac{\alpha+\nu+1}{2}\log t}$, in welchem $\log t$ reell ist, genommen werden. Dann folgt aus (30) und (45)

$$R_\nu = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi i}{2}(1-\alpha-\nu)} \overline{\Gamma}\left(\frac{1-\alpha-\nu}{2}\right) = \frac{i}{2} e^{-\frac{\pi i}{2}(\alpha+\nu)} \overline{\Gamma}\left(\frac{1-\alpha-\nu}{2}\right),$$

$$S_\nu = -\frac{1}{2} e^{-\frac{\pi i}{2}(1-\alpha-\nu)} \overline{\Gamma}\left(\frac{1-\alpha-\nu}{2}\right) = \frac{i}{2} e^{\frac{\pi i}{2}(\alpha+\nu)} \overline{\Gamma}\left(\frac{1-\alpha-\nu}{2}\right),$$

so dass

$$S_\nu = e^{\pi i(\alpha+\nu)} R_\nu = (-1)^\nu e^{\pi i \alpha} R_\nu$$

ist. Man unterscheidet nun, ob ν eine gerade oder eine ungerade Zahl bezeichnet. Für $\nu = 2k$ findet man, wenn man die Formel (32) berücksichtigt,

$$R_{2k} = \frac{i}{2\beta} \overline{\Gamma}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \frac{(-2)^k}{(\alpha+1)(\alpha+3)\ldots(\alpha+2k-1)},$$

wo zur Abkürzung $\beta = e^{\frac{\pi i \alpha}{2}}$ gesetzt ist. Im Falle $\nu = 2k+1$ wird

$$R_{2k+1} = \frac{1}{2\beta} \overline{\Gamma}\left(\frac{-\alpha}{2}\right) \frac{(-2)^k}{(\alpha+2)(\alpha+4)\ldots(\alpha+2k)}.$$

Diese Werthe von R_{2k} und R_{2k+1} werden in die obige Entwickelung des Integrals Y_1 substituirt. Dann ergiebt sich, dass Y_1 mit den Reihen (41) und (42) durch die Gleichung

$$(48) \qquad Y_1 = \begin{cases} \frac{i}{2\beta} \overline{\Gamma}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) F\left(\frac{\alpha}{2};\ \frac{1}{2};\ -x^2\right) \\ + \frac{\alpha x}{2\beta} \overline{\Gamma}\left(\frac{-\alpha}{2}\right) F\left(\frac{\alpha+1}{2};\ \frac{3}{2};\ -x^2\right) \end{cases}$$

verbunden ist. Da ferner S_ν sich von R_ν nur durch den Factor $(-1)^\nu \beta^2$ unterscheidet, so entsteht die Reihe, durch welche Y_2 dargestellt wird, aus der mit β^2 multiplicirten rechten Seite von (48), falls man das Vorzeichen der ungeraden Potenzen von x ändert. Das Integral Y_2 ist folglich gleich der Summe

$$(49) \qquad Y_2 = \begin{cases} \frac{i\beta}{2} \bar{\Gamma}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) F\left(\frac{\alpha}{2};\, \frac{1}{2};\, -x^2\right) \\ -\frac{\alpha\beta x}{2} \bar{\Gamma}\left(\frac{-\alpha}{2}\right) F\left(\frac{\alpha+1}{2};\, \frac{3}{2};\, -x^2\right), \end{cases}$$

in der β die Constante $e^{\frac{\pi i \alpha}{2}}$ bedeutet.

Kiel, im September 1890.