

Astronomische Nachrichten.

Expedition auf der Königlichen Sternwarte bei Kiel.

Herausgeber: Prof. Dr. C. A. F. Peters.

Band 93.

Nr. 2231

23.

Ueber die Gleichung,
von deren Wurzeln die saecularen Veränderungen der Planetenbahnelemente abhängen.
Von Dr. H. Seeliger.

(1)

Wird die Entwicklung der Störungsfunction nur bis zu Gliedern 2. Ordnung in Bezug auf die Excentricitäten u. Neigungen getrieben, so sind die saecularen Veränderungen, welche die Excentricität und die Länge des Perihels erfährt, unabhängig von dem Knoten und der Neigung und umgekehrt. Nimmt man nun weiter an, dass die grossen Axen keinen saecularen Störungen unterliegen, so sind die auftretenden Differentialgleichungen linear und können, wie Lagrange zuerst gezeigt hat, vollständig integrirt werden. Zur Erlangung der nothwendigen Anzahl der Integrationsconstanten, ist dann, wie bekannt, die Auflösung einer algebraischen Gleichung nöthig, deren Grad gleich ist der Anzahl der in Frage kommenden Planeten. Hat diese Gleichung nur reelle und von einander verschiedene Wurzeln, so stellen die allgemeinen Integrale die Excentricitäten und Neigungen als periodische Functionen der Zeit dar. Bleibt eine der beiden Eigenschaften unerfüllt, so ist die periodische Darstellung der genannten Bahnelemente nicht möglich. Ist nämlich eine der Wurzeln imaginär, so treten in den allgemeinen Integralen Exponentialgrössen auf und andererseits giebt die Anwendung eines allgemein gebräuchlichen Verfahrens, (um die nöthige Anzahl von Integrationsconstanten zu erhalten) für den Fall zweier gleicher Wurzeln, Glieder von der Form:

$c_1 t \times \text{period. Function der Zeit}$

und wenn 3 gleiche Wurzeln vorkommen, Glieder von der Form:

$(c_1 t + c_2 t^2) \times \text{period. Function der Zeit u. s. f.}$

Der Nachweis, dass keiner dieser beiden Fälle eintreten kann, ist demnach im Interesse der von Lagrange, Laplace und Poisson herrührenden Untersuchungen über die Stabilität des Planetensystems wichtig. Gegenwärtig freilich sind wir wohl gezwungen, diesen Untersuchungen nur ein theoretisches Interesse einzuräumen. Einmal sind die höheren Potenzen der Excentricität und Neigung,

durch deren Vernachlässigung die auftretenden Differentialgleichungen erst linear werden, selbst bei den grossen Planeten, wie Leverrier gezeigt hat, nicht zu vernachlässigen. Dann aber ist die Constanz der grossen Axen nichts weniger als erwiesen. Der von Laplace gegebene Nachweis erstreckt sich bekanntlich nur auf die erste Potenz der störenden Masse. Poisson hat dann diesen Nachweis auf die zweite Potenz dieser Grössen ausgedehnt, für die höheren Potenzen aber lassen sich die grossen Axen der Planetenbahnen nicht mehr als rein periodische Functionen der Zeit darstellen. Nach der neuesten Untersuchung von E. Mathieu ¹⁾ nämlich, liefert die Berücksichtigung der 3. Potenz der störenden Massen Glieder, in welchen die Zeit mit periodischen Gliedern multipliziert vorkommt, und die 4. Potenz ruft schon Potenzen der Zeit, die nur mit Constanten multipliziert sind, hervor.

(2)

Die Gleichung, um deren Wurzeln es sich handelt, lässt sich bekanntlich auf die Form der folgenden symmetrischen Determinante bringen:

$$(1) \Delta = \begin{vmatrix} a_0^0 - \lambda_1 & a_0^1 & a_0^2 \dots a_0^n \\ a_1^0 & a_1^1 - \lambda & a_1^2 \dots a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^0 & a_n^1 & \dots \dots \dots a_n^n - \lambda \end{vmatrix}$$

worin allgemein $a^{\lambda}_k = a^k_{\lambda}$ ist.

Gleichungen von dieser Form treten bekanntlich oft sowohl in der analytischen Geometrie als auch in der Physik bei wichtigen Problemen auf. Dieselben sind infolge dessen von mehreren ausgezeichneten neueren Mathematikern, wie Cauchy, Kummer, Borchardt,

¹⁾ Crelle's Journal Bd. 80. pag. 97 — 127. Uebrigens spricht bereits Jacobi in seinen Vorlesungen über Dynamik dasselbe Resultat aus. Mir ist aber nicht bekannt, auf welche Untersuchungen sich Jacobi's Meinung stützt. Wahrscheinlich sind dies eigene, die aber nicht in die Oeffentlichkeit gedrungen sind.

Weierstrass, Sylvester, Clebsch u. A. näher untersucht worden. Hier soll nur kurz erwähnt werden, was von diesen Untersuchungen sich auf die Ungleichheit der Wurzeln von (1) bezieht. Sind nämlich 2 von den reellen Wurzeln der Gleichung $\Delta = 0$ einander gleich, so ist das System linearer Gleichungen, aus welchen durch Elimination die Determinante Δ hervorgegangen ist, nicht mehr zur Bestimmung der Unbekannten ausreichend und zwar reduciren sich die $(n+1)$ linearen Gleichungen auf nur $(n-1)$ von einander unabhängige. Dieser Satz, der wohl durch die Arbeiten von Clebsch¹⁾, allgemein bekannt geworden ist, lässt sich leicht aus den Untersuchungen Borchardts²⁾ herleiten. Es kann natürlich auf diese Ableitung hier nicht näher eingegangen werden.

Wenn also Δ zwei gleiche Wurzeln haben soll, so muss, wie aus dem eben angeführten Satze gefolgert werden kann, sowohl Δ als auch alle Partialdeterminanten der n . Ordnung für denselben Werth von λ verschwinden; diese Bedingungen reduciren sich aber bekanntlich auf die $(n+1)$ Gleichungen:

$$\frac{d\Delta}{da_0^0} = \frac{d\Delta}{da_1^1} = \dots = \frac{d\Delta}{da_n^n} = 0 \quad (2)$$

Im Allgemeinen kann nun den Gleichungen (2) durch passende Wahl der $\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}$ Grössen a stets genügt werden. Auch wird dies noch der Fall sein, wenn man für diese, die aus der physischen Astronomie bekannten Ausdrücke substituirt. Es kann nämlich ge-

$$\begin{aligned} \{(0\ 1) + (0\ 2) + \dots + (0\ n) - \lambda\} N - [0\ 1] N - [0\ 2] N' \dots - [0\ n] N^{(n)} = 0 \\ - [1\ 0] N + \{(1\ 0) + (1\ 2) + \dots + (1\ n) - \lambda\} N' - [1\ 2] N'' \dots - [1\ n] N^{(n)} = 0 \end{aligned}$$

u. s. w.

Setzt man also zur Abkürzung:

$$a_0^0 = (0\ 1) + (0\ 2) + \dots + (0\ n)$$

$$a_1^1 = (1\ 0) + (1\ 2) + \dots + (1\ n)$$

$$a_n^n = (n\ 0) + (n\ 1) + \dots + (n\ n-1)$$

$$- [k\ \lambda] = A_k^\lambda$$

so wird das Resultat der Elimination

$$\begin{vmatrix} a_0^0 - \lambda & A_0^1 & \dots & A_0^n \\ A_1^0 & a_1^1 - \lambda & \dots & A_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n^0 & A_n^1 & \dots & a_n^n - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

Bedenkt man aber, dass die Relationen stattfinden:

$$(k\ \lambda) m_k \sqrt{a_k} = (\lambda\ k) m_\lambda \sqrt{a_\lambda}; \quad [k\ \lambda] m_k \sqrt{a_k} = [\lambda\ k] m_\lambda \sqrt{a_\lambda}$$

worin die m und a resp. die Massen und grossen Axen

zeigt werden, dass durch passende Wahl der Planetenmassen das System (2) stets erfüllt werden kann. Indessen ist es dabei nothwendig, dass nicht alle Massen dasselbe Vorzeichen besitzen dürfen.

Man gelangt demnach auf diesem algebraischen Wege zu demselben Resultat, zu welchem Laplace gelangt ist. Mir ist der strenge Nachweis dieser Eigenschaft nur für den Fall dreier Planeten gelungen. Da derselbe aber fast unmittelbar aus einigen Relationen fliesst, die an sich nicht ganz uninteressant sind, so theile ich denselben im Folgenden mit. Vielleicht hilft derselbe die allgemeine Lösung des jedenfalls interessanten mathematischen Problems vorbereiten.

(3)

Wir haben zuerst für die einzelnen a , in der Gleichung (1) die ihnen zufolge der Theorie der Saecularstörungen zukommenden Werthe einzusetzen. Wir können uns dabei vollständig beschränken auf die Veränderungen, welche die Excentricität und die Länge des Perihels erfahren. Die Gleichungen, welche die Saecularstörungen in der Neigung und in der Länge des Knotens ausdrücken, sind den ersteren ganz analog, nur sind sie sehr bedeutend einfacher, so dass u. A. das hier am Ende des Art. (5) ausgesprochene Resultat für diese beinahe selbstverständlich wird.

Unter Anwendung der bekannten Laplace'schen Symbole, hat man die Unbekannten $N, N', \dots, N^{(n)}$ aus den folgenden Gleichungen zu eliminiren:

$$\begin{aligned} \{(0\ 1) + (0\ 2) + \dots + (0\ n) - \lambda\} N - [0\ 1] N - [0\ 2] N' \dots - [0\ n] N^{(n)} = 0 \\ - [1\ 0] N + \{(1\ 0) + (1\ 2) + \dots + (1\ n) - \lambda\} N' - [1\ 2] N'' \dots - [1\ n] N^{(n)} = 0 \end{aligned}$$

u. s. w.

der in Frage kommenden Planeten bedeuten, so kann man (3) sofort in die Form einer symmetrischen Determinante bringen. Zu diesem Zweck multiplizieren wir die Horizontalreihen der Reihe nach mit $m \sqrt{a}$, $m' \sqrt{a'} \dots m_n \sqrt{a_n}$; hierauf dividiren wir je eine Horizontal- und Verticalreihe, die sich in demselben Diagonalgliede schneiden durch dieselbe Grösse und zwar das erste Paar durch $\sqrt{m \sqrt{a}}$, das zweite durch $\sqrt{m' \sqrt{a'}}$ u. s. f. bis $\sqrt{m_n \sqrt{a_n}}$. Wir gelangen so zu der Determinante (1), wenn allgemein:

¹⁾ Crelle's Journal Bd. 57 u. 62.

²⁾ Crelle's Journal Bd. 30.

$$a_k^\lambda = A_k^\lambda \sqrt{\frac{m_k \sqrt{a_k}}{m_\lambda \sqrt{a_\lambda}}} = -[k\lambda] \sqrt{\frac{m_k \sqrt{a_k}}{m_\lambda \sqrt{a_\lambda}}} \quad (4)$$

gesetzt wird. Und jetzt ist in der That $a_k^\lambda = a_\lambda^k$.

Was nun weiter die gebrauchten Laplace'schen Symbole betrifft, so können dieselben, wie sehr leicht

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{01} &= \frac{3}{4} \frac{a^3 a' \mu}{(a'^2 - a^2)^2} F\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +2, \frac{a^2}{a'^2}\right) \\ f_{01} &= -\frac{3}{2} \frac{a \mu}{(a'^2 - a^2)^2} \left\{ a a'^2 F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +1, \frac{a^2}{a'^2}\right) \right. \\ &\quad \left. - (a^2 + a'^2) a F\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +2, \frac{a^2}{a'^2}\right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

u. s. f. für $f_{12}, f_{02} \dots \varphi_{12}, \varphi_{02}$.

Wie zu bemerken kaum nöthig sein dürfte, beruhen diese Formeln auf der durchaus nicht beschränkenden Annahme, dass

$$a < a' < a'' \dots$$

sei. Ferner bedeuten die μ die mittleren Bewegungen der Planeten, also zufolge der von Laplace eingeführten Vernachlässigungen:

$$\mu_k = \frac{1}{a_k^{\frac{3}{2}}}$$

Wenn man aus (6) durch Vertauschung der Indices die Ausdrücke für f_{02}, f_{12} etc., $\varphi_{02}, \varphi_{12}$ etc. ableitet, so wird die Erinnerung an die Relationen:

$$\varphi_{k\lambda} = \varphi_{\lambda k} \sqrt{\frac{a_\lambda}{a_k}}; f_{k\lambda} = f_{\lambda k} \sqrt{\frac{a_\lambda}{a_k}}$$

von Nutzen sein.

Mit Hülfe dieser Formeln ergibt sich jetzt:

$$(7) \begin{cases} a_k^k = \varphi_{k0} m + \varphi_{k1} m' + \dots + \varphi_{kn} m_n \\ a_k^\lambda = -f_{k\lambda} m_\lambda \sqrt{\frac{m_k \sqrt{a_k}}{m_\lambda \sqrt{a_\lambda}}} \end{cases}$$

Wir wollen nun die ganz allgemein angesetzten Beziehungen für den Fall $n = 2$ anwenden. Die Gleichung (1) wird jetzt:

$$\left. \begin{aligned} m' f_{12} \{f_{01} f_{12} - \varphi_{01} f_{02}\} + m'' f_{02} f_{12} \{\varphi_{12} - \varphi_{02}\} &= m f_{02} \{f_{01} f_{02} - \varphi_{01} f_{12}\} \sqrt{\frac{a}{a'}} \\ m' f_{01} f_{12} \{\varphi_{01} - \varphi_{12} \sqrt{\frac{a'}{a''}}\} + m'' f_{12} \{f_{01} \varphi_{02} - f_{02} f_{12} \sqrt{\frac{a'}{a''}}\} &= m f_{01} \{f_{12} \varphi_{02} \sqrt{\frac{a}{a''}} - f_{01} f_{02} \sqrt{\frac{a}{a''}}\} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Mit Hülfe der nun folgenden allgemeinen Ungleichheiten zwischen den Grössen f und φ , wird sich ohne Weiteres zeigen, dass die Gleichungen (10) für positive Werthe aller drei Grössen m, m' und m'' nicht erfüllt werden können.

einzusehen ist, durch die Gauss'sche hypergeometrische Reihe, welche allgemein mit $F(\alpha \beta \gamma x)$ bezeichnet wird, dargestellt werden. Es kann nämlich gesetzt werden:

$$\left. \begin{aligned} (01) &= \varphi_{01} m'; (02) = \varphi_{02} m'' \text{ etc. } \dots \\ [01] &= f_{01} m'; [02] = f_{02} m'' \text{ etc. } \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

und den Grössen f und φ kommen die Bedeutungen zu:

$$(8) \begin{vmatrix} a_0^0 - \lambda & a_0^1 & a_0^2 \\ a_1^0 & a_1^1 - \lambda & a_1^2 \\ a_2^0 & a_2^1 & a_2^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

und durch Anwendung von (7) ergibt sich nun:

$$(9) \begin{cases} a_0^0 = m' \varphi_{01} + m'' \varphi_{02} \\ a_1^1 = m \varphi_{10} + m'' \varphi_{12} = m \varphi_{01} \sqrt{\frac{a}{a'}} + m'' \varphi_{12} \\ a_2^2 = m \varphi_{20} + m' \varphi_{21} = m \varphi_{02} \sqrt{\frac{a}{a''}} + m' \varphi_{12} \sqrt{\frac{a'}{a''}} \\ a_0^1 = -f_{01} m' \sqrt{\frac{m \sqrt{a}}{m' \sqrt{a'}}} \\ a_0^2 = -f_{02} m'' \sqrt{\frac{m \sqrt{a}}{m'' \sqrt{a''}}} \\ a_1^2 = -f_{12} m'' \sqrt{\frac{m' \sqrt{a'}}{m'' \sqrt{a''}}} \end{cases}$$

Bekanntlich drücken die Bedingungen, dass die Gleichung (8) zwei gleiche Wurzeln habe, nichts anders aus, als dass eine gewisse Oberfläche 2. Ordnung eine Rotationsoberfläche sei. Wir können also in diesem Falle diese Bedingung unabhängig von den vorhin angestellten allgemeinen Betrachtungen hinstellen. Es sind dies bekanntlich die Gleichungen:

$$\frac{a_0^2 a_0^1 - a_0^0 a_1^2}{a_1^2} = \frac{a_0^1 a_1^2 - a_1^1 a_0^2}{a_0^2} = \frac{a_0^2 a_1^2 - a_0^1 a_2^2}{a_0^1}$$

und durch Substitution von (9) ergibt sich daraus mit geringer Mühe:

(4)

Die Summe einer hypergeometrischen Reihe kann man bekanntlich durch Gammafunctionen und ein bestimmtes Integral ausdrücken. Es ist nämlich, so lange $\beta > 0$ ist:

$$F(\alpha \beta \gamma x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma - \beta)} \cdot \int_0^1 x^{\beta-1} (1-x)^{\gamma-\beta-1} (1-x\vartheta)^{-\alpha} d\vartheta \quad (11)$$

Ist nun y eine Grösse die kleiner ist als x , also

$$y = kx, \quad k < 1, \quad x > y$$

so wird, da ϑ nicht grösser als 1 werden kann, also ein echter Bruch ist, sein:

$$\frac{1-x\vartheta}{1-x} > \frac{1-y\vartheta}{1-y} \quad (12)$$

$$(13) \quad (1-x)^{\alpha} F(\alpha \beta \gamma x) \leq (1-y)^{\alpha} F(\alpha \beta \gamma y) \text{ wenn } \alpha \geq 0 \text{ und } x > y$$

Diese einfache Ungleichheit wird uns im Folgenden von Nutzen sein.

Zunächst ist klar, dass φ_{01} , φ_{02} , φ_{12} wesentlich positive Grössen sind. Dasselbe soll nun auch von

Vorausgesetzt wird dabei, dass x und y positive echte Brüche bedeuten. Die Richtigkeit von (12) ergibt sich sofort, da aus ihr unmittelbar die jedenfalls richtige Relation: $(1-k)(1-\vartheta) > 0$ folgt. Mit Hülfe von (12) und (11) schliesst man nun ohne Weiteres:

f_{01} , f_{02} , f_{12} etc. nachgewiesen werden. Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass, (nach Formel (19) der Gauss'schen Abhandlung: Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc. etc.)

$$F\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +2, \frac{a^2}{a^2}\right) = F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +1, \frac{a^2}{a^2}\right) - \frac{3}{8} \cdot \frac{a^2}{a^2} F\left(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 3, \frac{a^2}{a^2}\right)$$

und also, da die letzte Reihe lauter positive Glieder enthält:

$$F\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +2, \frac{a^2}{a^2}\right) > F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +1, \frac{a^2}{a^2}\right) - \frac{3}{8} \cdot \frac{a^2}{a^2} F\left(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 3, 1\right)$$

und mit Anwendung der bekannten Summationsformel:

$$> F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +1, \frac{a^2}{a^2}\right) - \frac{3}{8} \cdot \frac{32}{9\pi} \cdot \frac{a^2}{a^2}$$

also:

$$\begin{aligned} (a^2 + a'^2) F\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 2, \frac{a^2}{a^2}\right) &= a'^2 F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +1, \frac{a^2}{a^2}\right) \\ &> a^2 F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +1, \frac{a^2}{a^2}\right) - \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{a^2}{a^2} (a^2 + a'^2) \\ &> a^2 \left(1 - \frac{4}{3\pi} - \frac{4}{3\pi} \frac{a^2}{a^2}\right) > 0, \text{ da } \frac{a}{a'} < 1. \end{aligned}$$

Nach Formel (6) folgt daraus:

$$f_{01} > 0 \text{ und ganz ebenso } f_{02} > 0 \text{ etc. etc.}$$

Weiter folgt aus (6):

$$\frac{f_{12}}{f_{02}} = \frac{(a'^2 - a^2)^2 a'^2 \mu'}{(a'^2 - a^2)^2 a^2 \mu} \cdot \frac{(a'^2 + a'^2) F\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 2, \frac{a'^2}{a'^2}\right) - a'^2 F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +1, \frac{a'^2}{a'^2}\right)}{(a^2 + a'^2) F\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 2, \frac{a^2}{a'^2}\right) - a'^2 F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +1, \frac{a^2}{a'^2}\right)}$$

Mit Hülfe der erwähnten Gauss'schen Formel (19) können wir diese Gleichung so schreiben:

$$\frac{f_{12}}{f_{02}} = \frac{(a'^2 - a^2)^2 a'^4 \mu'}{(a'^2 - a^2)^2 a^4 \mu} \cdot \frac{F\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +2, \frac{a'^2}{a'^2}\right) - \frac{3}{8} F\left(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 3, \frac{a'^2}{a'^2}\right)}{F\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +2, \frac{a^2}{a'^2}\right) - \frac{3}{8} F\left(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 3, \frac{a^2}{a'^2}\right)}$$

Bezeichnet man nun der Kürze wegen mit F die vorkommende Differenz der beiden hypergeometrischen Reihen und setzt man $\frac{a'^2}{a'^2} = x$, $\frac{a^2}{a'^2} = y$, also $x > y = kx$, $k < 1$, so giebt die Summationsformel (11):

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^1 s^{-\frac{1}{2}} (1-s)^{\frac{1}{2}} (1-xs)^{-\frac{1}{2}} ds \cdot \left\{ 1 - \frac{1-s}{2(1-xs)} \right\}$$

oder:

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^1 s^{-\frac{1}{2}} (1-s)^{\frac{1}{2}} ds \cdot \frac{1+s-2xs}{2\sqrt{1-xs}}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{1+s-2xs}{1+s-2kxs} \cdot \sqrt{\frac{1-kxs}{1-sx}} = \frac{1-x}{1-kx} \cdot \frac{\frac{1-x}{1-kx} + s}{\frac{1-kxs}{1-kx} + s} \cdot \sqrt{\frac{1-kxs}{1-kx}}$$

Da nun weiter nach (12)

$$\frac{1-x}{1-kx} > \frac{1-kxs}{1-kx}$$

und $\sqrt{\frac{1-kxs}{1-kx}}$ grösser als die Einheit ist, so ergibt sich, dass die rechte Seite der letzten Gleichung $> \frac{1-x}{1-kx}$ ist.

Wir haben also:

$$f_{01} = 2 \frac{a}{a'} q_{01} - \frac{9}{16} \frac{a^2 \mu}{(a'^2 - a^2)^2} a^2 F\left(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 3, \frac{a^2}{a'^2}\right)$$

und da:

$$q_{01} = \frac{3}{4} \frac{a^3 a' \mu}{(a'^2 - a^2)^2} \cdot F\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 2, \frac{a^2}{a'^2}\right)$$

war, so ergibt sich:

$$f_{01} = 2 \frac{a}{a'} - \frac{3}{4} \frac{a}{a'} \cdot \frac{F\left(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 3, \frac{a^2}{a'^2}\right)}{F\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 2, \frac{a^2}{a'^2}\right)} \quad (15)$$

Man kann nun setzen:

$$(16) \quad \frac{F\left(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 3, \frac{a^2}{a'^2}\right)}{F\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 2, \frac{a^2}{a'^2}\right)} = 1 + \alpha \left(\frac{a}{a'}\right)^2$$

und α wird in der Form dargestellt werden können:

$$\alpha = A + B \left(\frac{a}{a'}\right)^3 + C \left(\frac{a}{a'}\right)^4 + \dots$$

worin A, B etc. gewisse positive Zahlencoefficienten bedeuten. Es wird demnach α seinen grössten Werth für $\frac{a}{a'} = 1$ (da ja $\frac{a}{a'} \leq 1$ sein muss) erlangen. Für diesen aber erhält man aus (16): $\alpha = \frac{1}{3}$, und muss deshalb im Allgemeinen

$$\alpha < \frac{1}{3}$$

sein. Setzt man nun noch der Kürze wegen $\left(\frac{a}{a'}\right)^2 = x$, und bezeichnet man die linke Seite der Gleichung (15) mit $f(x)$, so wird:

$$\frac{F(x)}{F(y)} > \frac{a'^2 - a^2}{a'^2 - a^2}$$

und demnach:

$$\frac{f_{12}}{f_{02}} > \frac{a'^2 - a^2}{a'^2 - a^2} \cdot \left(\frac{a'}{a}\right)^2 > 1 \quad (14)$$

Auf ganz analoge Weise, wie wir jetzt die Ungleichheit $f_{12} > f_{02}$ gefunden haben, ergibt sich $f_{01} > f_{12}$ etc. etc.

Wir gehen nun auf die Gleichung (6) zurück; diese kann so geschrieben werden:

$$f(x) = \frac{5}{4} x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \alpha x^{\frac{3}{2}}$$

Für einen zweiten Werth y der Variablen, ist analog:

$$f(y) = \frac{5}{4} y^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \alpha y^{\frac{3}{2}}$$

und durch Subtraction:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \frac{5}{4} (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}) - \frac{3}{4} \alpha (x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}) \\ &= (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}) \left\{ \frac{5}{4} - \frac{3}{4} \alpha (x + x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + y) \right\} \end{aligned}$$

Wird nun $x > y$ vorausgesetzt, so wird die rechte Seite dieser Gleichung stets positiv bleiben. Denn der Maximalbetrag des negativen in der Klammer stehenden Gliedes ist $\frac{3}{4}$, es wird also sein:

$$f(x) - f(y) > \frac{1}{4} (\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

d. h.

$$f(x) > f(y)$$

$f(x)$ wird demnach zugleich mit (x) fortwährend wachsen; es wird also nicht grösser werden können als $f(1) = 1$, woraus folgt, dass

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{f_{01}}{q_{01}} \text{ stets} < 1 \\ \text{sein muss. Ganz ebenso lässt sich beweisen dass:} \\ \frac{f_{02}}{q_{02}} < 1, \frac{f_{12}}{q_{12}} < 1 \text{ etc.} \end{array} \right.$$

Aus (15) ergibt sich noch eine andere Ungleichheit. Es ist nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_{01}}{q_{01}} &> 2 \frac{a}{a'} - \frac{3}{4} \frac{a}{a'} \cdot \frac{F\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 3, 1\right)}{F\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 2, 1\right)} \text{ oder } > \frac{a}{a'} \\ \text{und ebenso wird man finden:} \\ \frac{f_{02}}{q_{02}} &> \frac{a}{a''}; \quad \frac{f_{12}}{q_{12}} > \frac{a'}{a''} \text{ etc.} \end{aligned} \right\} (18)$$

$$F\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 2, \frac{a^2}{a'^2}\right) > \sqrt{\frac{a'^2 - a^2}{a'^2 - a^2}} \cdot \frac{a''}{a'} F\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 2, \frac{a^2}{a'^2}\right)$$

und hieraus lässt sich schliessen:

$$q_{01} > \left(\frac{a'^2 - a^2}{a'^2 - a^2}\right)^{\frac{1}{2}} q_{02}$$

und da $\frac{a'^2 - a^2}{a'^2 - a^2} > 1$, so wird

$q_{01} > q_{02}$ und auf gleiche Weise $q_{12} > q_{02}$ etc. etc. (19).

(5)

Wir wollen nun die im Vorigen abgeleiteten, ganz allgemein geltenden Beziehungen zwischen den Störungscoefficienten benutzen, zur Formation der ersten Gleichung (10). Durch Multiplication der betreffenden Gleichungen (14) und (18) erhält man:

$$\frac{f_{01} f_{12}}{q_{01} q_{02}} > \left(\frac{a'^2 - a^2}{a'^2 - a^2}\right) \cdot \left(\frac{a}{a'}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ also } > 1.$$

Es erübrigt nun nur noch die Vergleichung der mit q bezeichneten Grössen unter einander. Wir hatten:

$$q_{01} = \frac{3}{4} \frac{a^3 a' a}{(a'^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} F\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 2, \frac{a^2}{a'^2}\right)$$

$$q_{02} = \frac{3}{4} \frac{a^3 a'' \mu}{(a'^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} F\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 2, \frac{a^2}{a'^2}\right).$$

Zufolge (13) aber ist:

Wir haben demnach: $f_{01} f_{12} > q_{01} q_{02}$.

Ferner schliessen wir vermittelst der Ungleichheiten:

$$q_{01} > f_{01}$$

$$f_{12} > q_{02}$$

dass auch $q_{01} f_{12} - f_{01} q_{02} > 0$ sein muss.

Bezeichnen demnach A, B, C wesentlich positive und im Allgemeinen von Null verschiedene Grössen, so kann die erste Gleichung (10) so beschrieben werden:

$$A m + B m' + C m'' = 0.$$

Offenbar kann diese Relation für positive und reelle Massenwerthe nicht erfüllt werden. Darin besteht nun der algebraische Nachweis, dass die Gleichung (8) in der That nur ungleiche Wurzeln haben kann.

Leipzig Octob. 1878.

H. Seeliger.

Ueber ein neues Mikrometer zum Registriren von Declinationsdifferenzen.

Von Dr. V. Kuerre.

Herr Mechaniker R. Fuess in Berlin (alte Jacobstrasse Nr. 108) hat ein Mikrometer zum Registriren von Declinationsdifferenzen (Herstellungspreis zwischen 250 und 350 Mark, je nach den Einrichtungen) ausgeführt, welches an dem 9 zölligen Fernrohre des Aequatoreals der Berliner Sternwarte angebracht ist, und sich derartig bewährt, dass eine Mittheilung darüber angezeigt erscheint.

Das Mikrometer ist ein Fadenmikrometer, mit dessen beweglichem Faden die Declinationen, und mit dessen festem Faden die Durchgangszeiten der Sterne beobachtet werden. Die jedesmalige Lage des zur Declinationseinstellung dienenden beweglichen Fadens gegen die optische Axe des Fernrohres wird nicht mit einer Mikrometerschraube gemessen, sondern dadurch messbar gemacht, dass man im Augenblicke der Einstellung der Declination eines Sternes einen Papierstreifen gegen eine Stahlspitze, welche wie das Ocular auf dem Schlitten des beweglichen Fadens befestigt ist, und sonach seine Bewegungen genau mitmacht, andrückt und dadurch eine deutliche punktartige Marke auf dem Streifen macht.

Zugleich mit dieser beweglichen Spitze wird aber durch denselben Handgriff der Papierstreifen gegen eine

an den festen Theilen des Ocularstückes angebrachte Stahlspitze deren Verbindungslinie mit der beweglichen Spitze parallel zu der Richtung der Declinationsbewegung des Schlittens ist, angedrückt und der Abstand zwischen der von der beweglichen und der von der festen Spitze gemachten Marke auf dem Streifen stellt die Fixirung der jedesmaligen Declinationseinstellung dar.

Die Schraube, mittelst welcher der den beweglichen Faden und die eine Stahlspitze tragende Schlitten bewegt wird, — eine Schraube von s. g. vierfachem Gewinde, also von geeigneter Steigung, um sehr schnell von einem Stern nach dem andern übergehen zu können und demnach hinreichende Feinheit der Einstellung zu gestatten — bewirkt beim Uebergange von einem Stern zum anderen zugleich, dass der Papierstreifen, auf welchem man die Einstellung mittelst der beiden Stahlspitzen markirt, weiterrückt, und zwar bringen alle Drehungen dieser Schraube in diesem oder jenem Sinne, mit Anwendung bekannter Hilfsmittel, nur fortrückende Bewegungen des Streifens in einem und demselben Sinne hervor. Nähere Details bezüglich der Anbringung des Streifens und der Art der arkirung der Einstel-M