

Bemerkung zu dem Aufsatz von Herrn Prof. Seeliger:
„Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz“.

In den A. N. 3273 hat Herr Prof. Seeliger einen Aufsatz über das Newton'sche Gravitationsgesetz mitgeteilt, in welchem er zu zeigen sucht, dass dieses keine universelle Gültigkeit besitzen könne, da seine Ausdehnung auf das unendliche mit Masse erfüllte Universum zu Widersprüchen führen müsse. In den folgenden Zeilen erlaube ich mir, einige Bedenken gegen die Ausführungen des Herrn Seeliger darzulegen.

Herr Seeliger ermittelt die Anziehung in einem bestimmten Punkte des Weltalls und macht zu diesem Zwecke von dem Satze Gebrauch, dass die Anziehung einer aus concentrischen Schichten gleicher Dichtigkeit bestehenden Kugel auf einen ausserhalb liegenden Punkt nur durch die Entfernung des letzteren von ihrem Mittelpunkt bestimmt wird. Er denkt sich alle Körper in derartige Kugeln auseinandergezogen und erhält auf diese Weise einen »überall mit Masse von endlicher Dichtigkeit erfüllten Raum. Derselbe wird nach aussen hin alle in Betracht gezogenen Weltkörper und nach innen zu den Punkt A allseitig umschliessen. Der innere Hohlraum enthält keine Masse«. Das Potential V im Punkte A :

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \gamma d\gamma \int_{R_0}^{R_1} \frac{\delta r^2 dr}{\rho} \quad (\delta \text{ Dichtigkeit})$$

wird dann durch Substitution von:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} \int_0^{\infty} \frac{a^n}{r^n} P^n(\cos \gamma)$$

in Kugelfunctionen entwickelt — a ist der Abstand des Punktes A vom Koordinatenanfang — sodass sich für $a = 0$ die folgenden Ausdrücke ergeben:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\gamma \sin \gamma \int_{R_0}^{R_1} dr \cdot r \cdot \delta,$$

$$X = \frac{\partial V}{\partial a} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\gamma \sin \gamma P^1(\cos \gamma) \int_{R_0}^{R_1} dr \cdot \delta$$

$$Z = \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\gamma \sin \gamma P^2(\cos \gamma) \cdot \int_{R_0}^{R_1} \frac{dr}{r} \delta.$$

Diese Integrale geben das Potential, die Anziehung und die Aenderung der Anziehung, welche Herr Seeliger Zerrung nennt, im Mittelpunkte der Kugel.

Setzt man nun mit Herrn Seeliger die obere Grenze $R_1 = \infty$, so werden X und Z , Anziehung und Zerrung, im Allgemeinen unbestimmt. Diese Unbestimmtheit, welche gestattet, eine unendliche Zahl von möglichen Massenvertheilungen vorzustellen, bei welchen X und Z an bestimmten Punkten unendlich werden und die Wirkung auch der in unendlicher Entfernung gedachten Massen merklich bleibt,

betrachtet Herr Seeliger als unverträglich mit der universellen Gültigkeit des Newton'schen Gesetzes. Sie führe zu der Alternative, entweder die Gesamtmasse des Weltalls als unermesslich gross und das Newton'sche Gesetz nicht als mathematisch strengen Ausdruck gelten zu lassen, oder aber die Gesamtmaterie der Welt als endlich anzusehen.

Diese Widersprüche, zu welchen Herr Seeliger gelangt, können aber auch als eine Folge der Identificirung von Vorstellbarkeit und Möglichkeit angesehen werden. Die Möglichkeit einer zunächst nur vorgestellten Massenvertheilung oder Bewegung bedarf, insofern aus ihr objectiv gültige Schlüsse gezogen werden sollen, des Beweises. Dieser Beweis kann nur auf zwei verschiedenen Wegen erbracht werden, entweder er wird der Wirklichkeit durch Beobachtung der uns umgebenden Erscheinungswelt entnommen, oder er wird durch Betrachtung der in jedem Punkte bereits als bekannt vorausgesetzten, wirkenden Kräfte gewonnen. Auf dem ersten Wege, durch Beobachtung der Massenvertheilung und der Bewegungen im Planetensystem ist das Newton'sche Gesetz empirisch gefunden und geprüft worden. Die andere Methode, welche die Möglichkeit nur vorgestellter, der Beobachtung nicht zugänglicher Massenvertheilungen und Bewegungen auf Grund der als bekannt vorausgesetzten Kräfte zu untersuchen lehrt, wird bei der Behandlung kosmogonischer Probleme befolgt. Der Gedankengang ist hier demjenigen des Herrn Seeliger entgegengesetzt. Herr Seeliger erblickt in der Thatsache, dass nach dem Newton'schen Gesetze die einen unendlich langen Kegel erfüllende Materie auf einen Punkt in seiner Axe auch eine unendlich grosse Anziehung ausüben würde, einen Einwurf gegen die allgemeine Gültigkeit dieses Gesetzes selbst; der Urheber einer kosmogonischen Hypothese kann nur den umgekehrten Schluss ziehen, dass jene bloss von ihm vorgestellte, der Beobachtung unzugängliche Massenvertheilung zu keiner Zeit möglich gewesen sein könne, da sie durch die bekannten, aus der uns zugänglichen Erscheinungswelt abstrahirten Kräfte nicht erklärt werden kann. Aber selbst, wenn man der Anschauungsweise des Herrn Seeliger bezüglich der Möglichkeit der vorgestellten Massenvertheilung zunächst folgen wollte, so würde selbst dann die Berücksichtigung der von Herrn Seeliger ausser Acht gelassenen zeitlichen Entwicklung des Systems einen Schluss bezüglich der Exactheit des Newton'schen Gesetzes nicht zulassen. Denn die Wirkung des letzteren würde dann nur die Zerstörung der gedachten Massenvertheilung zur Folge haben und ihre Ersetzung durch solche Vertheilungen, welche eben mit ihm verträglich sind. Ein Einwurf gegen das Newton'sche Gesetz würde sich dagegen vom mechanischen Standpunkt aus nur ergeben, wenn man mit Herrn Seeliger durch Vernachlässigung der Zeit das Problem aus einem dynamischen zu einem statischen machte, und noch die weitere Forderung hinzufügte, dass die betreffenden vorgestellten Massenvertheilungen Gleichgewichtslagen darstellen sollen. Diese Vermehrung der von den vorgestellten Massenvertheilungen zu erfüllenden Bedingungen er-

scheint besonders geeignet, um das Unzulängliche einer Schlussfolgerung von nur gedachten mechanischen Vorgängen auf die in der Erscheinungswelt objectiv gültigen Gesetze darzuthun.

Wenn Herr Seeliger weiter, als Beispiel einer Massenvertheilung der erwähnten Art, das unendlich ausgedehnte Weltall kugelförmig begrenzt und mit Masse gleicher Dichtigkeit erfüllt annimmt, einen Mittelpunkt festsetzt und dann bei Berechnung der Kräfte in bestimmten Punkten zu beliebigen Werthen gelangt, so beweist dieses Ergebniss nur, dass die Formen mathematischer Untersuchung versagen, sobald man den Boden des Vorstellbaren verlässt und dieselben auf ein transcendentales Problem anwendet.

Herr Seeliger beseitigt die Widersprüche, welche für ihn aus der Vorstellbarkeit der erwähnten Massenvertheilungen fliessen, dadurch, dass er dem Newton'schen Gesetz einen Factor $e^{-\lambda r}$ hinzufügt, welcher mit einer Absorption der Kraft im Raume verglichen werden kann. Er nimmt also als wirkende Kraft zwischen zwei Massenelementen den Ausdruck :

$$A = k^2 m m' \frac{e^{-\lambda r}}{r^2},$$

wo λ eine Constante ist. Herr Seeliger findet, dass sich die von der Entfernung r abhängigen Theile der drei oben angeführten Integrale, welche Potential, Anziehung und Zerrung im Mittelpunkt der Hohlkugel ausdrücken, nunmehr aus den Integralen

Potsdam, Königl. Observatorium, 1895 März.

$$\int_{R_0}^{R_1} \delta e^{-\lambda r} r dr, \quad \int_{R_0}^{R_1} \delta e^{-\lambda r} dr, \quad \int_{R_0}^{R_1} \delta \frac{e^{-\lambda r}}{r} dr$$

zusammensetzen. In dem Ausdruck für das Potential kommt übrigens noch ein Doppelintegral vor

$$\int_{R_0}^{R_1} \delta r^2 dr \int \frac{e^{-\lambda r}}{r} dr,$$

welches Herr Seeliger nicht angiebt. Da alle diese Integrale auch für $R_1 = \infty$ endlich bleiben, so bleiben auch Anziehung und Zerrung überall endlich und werden zugleich durch die Massenvertheilung im Unendlichen nicht mehr beeinflusst. Diese speciell betrachtete Ergänzung könnte, wie Herr Seeliger bemerkt, durch unendlich viele andere Hypothesen ersetzt werden. Die Wahl zwischen allen diesen Hypothesen wird aber nur durch ihre Uebereinstimmung mit der Beobachtung bedingt, welcher Herr Seeliger die von ihm vorgeschlagene Form der Ergänzung schliesslich selbst anzupassen sucht. Man könnte hinzufügen, dass schon der Beweis der Nothwendigkeit einer jeden Ergänzung des empirisch gefundenen Newton'schen Gesetzes — wenn auch die Wahrscheinlichkeit einer solchen a priori zugestanden wird — allein durch Beobachtung der durch die Kräfte bewirkten Bewegungen auf empirischem Wege gelingen kann. Von der blossen Vorstellbarkeit bestimmter Erscheinungen vermag die deductive Methode nicht objectiv gültige Folgerungen herzuleiten.

Dr. *Wilsing*.

Bemerkungen zur Bessel'schen Methode der Untersuchung der Eigenbewegungen.

Von *H. Kobold*.

Der in Nr. 3163 dieser Zeitschrift veröffentlichte Aufsatz ist seither von zwei verschiedenen Seiten zum Gegenstande einer Discussion gemacht, bei welcher die dort angewandte Bessel'sche Methode zur Bestimmung des Zielpunktes der Eigenbewegung des Sonnensystems angegriffen ist. Beim Erscheinen des ersten dieser Aufsätze von Herrn Radau im Bull. astr. X p. 401 hoffte ich durch die beabsichtigte baldige ausführliche Veröffentlichung meiner Untersuchungen den erhobenen Einwand zurückweisen zu können, sehe mich nun aber durch den zweiten Aufsatz von Herrn van de Sande Bakhyuzen im Bull. astr. XII p. 97 und durch die sich leider wider Erwarten in die Länge ziehende Publication meiner Arbeit veranlasst, auf den Gegenstand hier schon einzugehen.

Herr Radau macht der Bessel'schen Methode oder vielmehr meiner Anwendung derselben den Vorwurf, dass sie, indem sie die von mir als retrograde bezeichneten, auf den Apex der Sonnenbewegung gerichteten Bewegungen derselben Bedingung unterwirft, wie die directen, eine vollständig falsche Vertheilung der Fehler herbeiführen müsse. Dieser Einwand würde wenigstens in dieser Form wohl kaum erhoben sein, wenn gleich anfangs meine Unter-

suchungen vollständig hätten veröffentlicht werden können, denn die Nichtbeachtung des Unterschiedes der directen und der retrograden Bewegungen ist keineswegs ein Versehen meinerseits, sondern eine grundsätzliche. Schon in meiner ersten Arbeit über diesen Gegenstand, über die ich in Nr. 2981 (Mai 1890) kurz referirt habe, ist gerade den retrograden Bewegungen eine besondere Beachtung gewidmet; auf den schon damals gezeichneten Karten sind sie besonders kenntlich gemacht, entsprechend der ihnen innewohnenden Bedeutung.

Man ist bei der Bestimmung des Zielpunktes der Sonnenbewegung bisher immer ausgegangen von der Annahme, dass die motus peculiare der Sterne in allen Richtungen gleich wahrscheinlich seien und wie zufällige Fehler behandelt werden dürfen. Diese Annahme hat aber, wie ich glaube, nicht zu einer befriedigenden Darstellung der Beobachtungen geführt. In der von L. Struve in seiner Abhandlung: Bestimmung der Constante der Praecession etc. gegebenen Tafel der Bedingungsgleichungen nebst den übrig bleibenden Fehlern muss die ungenügende Darstellung namentlich in den Declinationsgleichungen auf den ersten Blick in die Augen fallen. Bezüglich der beobachteten Richtungen