

---

## SULLE FUNZIONI AD INFINITI VALORI.

Nota del dott. **Giulio Vivanti**, a Mantova.

---

*Adunanza dell' 8 luglio 1888.*

---

1. Il celebre teorema sui periodi delle funzioni stabilito da Jacobi nella Memoria: *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis*, etc. (\*) ha dato origine ad un errore che nessuno, per quanto io so, s'è preso cura di rettificare. Dal fatto, che una funzione a più di due periodi, quale è la funzione inversa d'un integrale abeliano di genere  $> 1$ , riprende uno stesso valore per valori della variabile quanto poco si vuole tra loro diversi, alcuni trassero la conseguenza, che un integrale abeliano di genere  $> 1$  prende per ciascun valore del suo limite superiore tutti i valori possibili. Ciò si legge nella *Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen* di Prym (pag. 1) e nella *Theorie der Abelschen Functionen* di Clebsch e Gordan (pag. 134). L'averlo trovato ripetuto in una pregevole opera recente (\*\*) m'induce a parlarne qui in breve.

2. Detto  $\bar{y}_0$  uno dei valori che prende l'integrale abeliano  $y = I(x)$  di genere  $p > 1$  per  $x = \bar{x}$ , e indicando con  $C_1, C_2, \dots, C_{2p}$  i

---

(\*) *Crelle's Journal*, Bd. XIII; *Jacobi's Werke*, Bd. II.

(\*\*) ТИХОМАНДРИТЗКИЙ · *Inversione degli integrali iperellittici* (in russo). Kharkoff, 1885 — p. 68.

periodi di  $I(x)$ , tutti i valori che  $y$  prende per  $x = \bar{x}$  saranno dati dall'espressione :

$$\bar{y}_0 + \sum_{i=1}^{2p} m_i C_i, \quad (a)$$

dove  $m_1, m_2, \dots, m_{2p}$  possono prendere valori interi qualunque. Ora dalle ricerche di G. Cantor sugli aggregati (*Mannichfaltigkeiten*) di punti o di numeri risulta senza alcuna difficoltà che l'insieme dei punti che rappresentano nel piano  $y$  i numeri (a) è della 1<sup>a</sup> potenza o classe (*Mächtigkeit, Klasse*) ossia è enumerabile (*abzählbar*). Questo insieme è bensì tale che in ogni parte comunque piccola del piano sono contenuti infiniti elementi di esso (cioè è *überalldicht*), ma è quasi un nulla in confronto all'insieme di tutti i punti del piano, che, com'è noto, ha la 2<sup>a</sup> potenza. Adunque è grave errore il dire che  $y$  prende tutti i valori possibili per ogni singolo valore di  $x$ ; i valori che esso assume sono, è vero, in numero infinito e tra loro vicinissimi, ma non costituiscono che una parte minima, insignificante, dell'insieme di tutti i valori possibili.

3. Accennerò ora ad alcuni teoremi, i quali hanno stretta attinenza colle cose dette, e possono facilmente dimostrarsi col sussidio delle teorie di Cantor. Dirò per brevità, che una funzione ha la 1<sup>a</sup> potenza od è della 1<sup>a</sup> classe, quando l'insieme dei valori che essa prende per ogni singolo valore della variabile è della 1<sup>a</sup> classe.

A. Se  $y$  considerata come funzione di  $x$  è della 1<sup>a</sup> classe, lo stesso può dirsi di  $x$  considerata come funzione di  $y$ .

Rammentiamo che (\*), se sopra un piano  $P$  si ha un insieme di infinite aree non aventi alcun punto interno comune, questo insieme è necessariamente enumerabile; e lo stesso avviene evidentemente se  $P$ , invece che un piano semplice, è un insieme enumerabile di piani. Dopo ciò si osservi che la riemanniana  $X$  (sul piano  $x$ ) dei cui punti  $y$  è funzione monodroma e la riemanniana  $Y$  (sul piano  $y$ ) dei cui punti  $x$  è funzione monodroma si corrispondono univocamente punto a

---

(\*) Cantor, *Math. Annalen*, XX, p. 117, *Acta Mathematica*, II, p. 366.

punto e, in generale, con continuità. Ora  $X$  consta d'un insieme enumerabile di piani; ad ogni foglio di  $Y$  corrisponde in  $X$  almeno un'area connessa, quindi, se  $Y$  constasse d'un insieme non enumerabile di fogli, si avrebbe in  $X$  un insieme non enumerabile d'aree distinte, ciò che è impossibile.

In particolare le funzioni a più periodi sono della 1<sup>a</sup> classe. Ciò si potrebbe senza difficoltà stabilire direttamente ricorrendo alla rappresentazione grafica di cui si serve CASORATI (\*).

B. Le funzioni definite da equazioni algebrico-differenziali lineari sono della 1<sup>a</sup> classe.

Ciò si dimostra facilmente, considerando che un sistema d'integrali d'una equazione lineare a coefficienti algebrici subisce nell'intorno di ogni punto di diramazione una sostituzione lineare a coefficienti costanti, e che i punti di diramazione sono in numero finito.

4. Le funzioni della 1<sup>a</sup> classe possiedono una proprietà caratteristica molto importante.

POINCARÉ ha dimostrato (\*\*) che, se  $y$  è una funzione analitica qualunque di  $x$ , può sempre determinarsi una nuova variabile  $z$  tale che  $x$  ed  $y$  siano funzioni uniformi di  $z$ .

Per dare un'idea approssimata dell'essenza della dimostrazione di POINCARÉ, ricorderò anzitutto che, se  $x$  è il quadrato del modulo,  $\omega$  il rapporto dei periodi d'un integrale ellittico, la funzione  $x = f(\omega)$  è uniforme e riprende uno stesso valore in infiniti punti del piano  $\omega$  costituenti un insieme di 1<sup>a</sup> classe; inversamente  $\omega = p(x)$  è una funzione ad infiniti valori di 1<sup>a</sup> classe. Se ora  $y$  è funzione di  $x$  ad infiniti valori, e si costruisce la riemanniana  $R$  (sul piano  $x$ ) dei cui punti  $\omega$  ed  $y$  sono funzioni monodrome,  $\omega$  prende sulla  $R$  ciascun valore una sola volta (\*\*); quindi, se si considerano come corrispondenti i valori di  $\omega$  e di  $y$  che si riferiscono ad uno stesso punto della  $R$ ,  $y$

(\*) *Acta Mathematica*, VIII.

(\*\*) *Sur un théorème de la théorie générale des fonctions* (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XI, pag. 112).

(\*\*\*) Affinchè ciò abbia luogo, bisogna che non possa costruirsi alcuna riemanniana più semplice di  $R$ , dei cui punti  $\omega$  sia funzione monodroma.

*Rend. Circ. Matem.*, t. II, parte 1<sup>a</sup>.— Stampato il 17 luglio 1888.

sarà funzione uniforme di  $\omega$ . (\*) Ma costruire la  $R$  nel modo indicato equivale a stabilire una corrispondenza univoca fra i valori di  $y$  e quelli di  $\omega$  per ogni singolo valore di  $x$ ; corrispondenza che evidentemente non può sussistere se  $y$  non è una funzione di 1<sup>a</sup> classe. Dunque la dimostrazione di Poincaré vale solo per le funzioni aventi la 1<sup>a</sup> potenza.

5. Ma  $v'$  ha di più. È facile provare che il teorema stesso cessa d'esser vero se la funzione  $y$  ha potenza superiore alla prima. Infatti si costruisca la riemanniana  $X$  (sul piano  $x$ ) dei cui punti  $y$  è funzione monodroma. Affinchè  $y$  possa mettersi sotto forma d'una funzione uniforme d'una variabile  $z$ , è necessario che la  $X$ , dopo opportuni tagli, possa distendersi sul piano  $z$  in modo da ricoprirlo una volta sola. Ora per quanto si disse a proposito del teorema  $A$  del n° 3 è chiaro che ciò non può farsi se non quando la  $X$  è costituita da un insieme enumerabile di fogli. Adunque si può completare il teorema di Poincaré dicendo che esiste una variabile  $z$  di cui  $x$  ed  $y$  sono funzioni uniformi *sempre e soltanto* quando  $y$ , come funzione di  $x$ , ha la 1<sup>a</sup> potenza.

6. È noto che Poincaré(\*\*) ha espresso gl'integrali d'un'equazione lineare a coefficienti algebrici e la variabile indipendente come funzioni uniformi (fuchsiane o zetafuchsiane) d'una nuova variabile. Da questo fatto e dal teorema enunciato alla fine del n° precedente segue come corollario il teorema  $B$  del n° 3.

Mantova, 22 giugno 1888.

GIULIO VIVANTI.

(\*) È quasi inutile avvertire che questo sunto della dimostrazione di Poincaré, benchè sufficiente pel nostro scopo, non è nè completo nè esatto.

(\*\*) Vedi i suoi lavori nei *Comptes Rendus* e negli *Acta Mathematica*.