Zur Bestimmung der Anzahl Primzahlen unter gegebenen Grenzen.

Von

Franz Rogel in Brünn.

Im „Archiv der Mathematik und Physik" 2. Reihe, T. VII, 1889 S. 381 wurde vom Verfasser für die Anzahl $\mathfrak{A}_m$ der Primzahlen $p_1 = 1$, $p_2 = 2, \ldots$, welche nicht grösser als eine gegebene Zahl m sind, folgender Ausdruck angegeben:

$$(1) \qquad \mathfrak{A}_m = |m| \prod_2^n \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) + n - 1; \quad p_n < \sqrt{m} < p_{n+1}$$

wo das eingeklammerte $|m|$ symbolisch anzeigt, dass nach vollzogener Multiplication der $n - 1$ gliedrigen Factorenfolge jedes Glied noch vor der Reduction mit $|m|$ zu multipliciren und dann

$$|m| \frac{1}{p_r p_s \ldots} = \left| \frac{m}{p_r p_s \ldots} \right|,$$

d. h. gleich der grössten in dem Bruche $\frac{m}{p_r p_s \ldots}$ enthaltenen ganzen Zahl zu setzen ist, wobei schliesslich folgender Ausdruck entsteht:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_m = m & - \left|\frac{m}{p_2}\right| - \left|\frac{m}{p_3}\right| - \left|\frac{m}{p_4}\right| - \cdots \\ & + \left|\frac{m}{p_2 p_3}\right| + \left|\frac{m}{p_2 p_4}\right| + \left|\frac{m}{p_3 p_4}\right| + \cdots \\ & - \left|\frac{m}{p_2 p_3 p_4}\right| - \cdots \qquad\qquad + n - 1. \end{aligned}$$

Diese Formel (1) ist noch einer weiteren Umgestaltung fähig, deren Zweck es ist, durch Verminderung der Factorenanzahl $n - 1$ in $\prod_2^n$ die Rechnung zu vereinfachen. Durch die Reducirung dieser Anzahl auf ein Minimum und womöglich durch Eliminirung des Productes $|m| \prod$ soll ein recursiver Ausdruck für $\mathfrak{A}_m$ geschaffen werden, welcher Aufschluss über die Beziehungen verschiedener $\mathfrak{A}$ geben wird.

1. Vor Allem muss bemerkt werden, dass die nämlichen Schlüsse, welche zur Formel (1) führten, es erlauben, den Ausscheidungsprocess aller Primzahlen $<$ als die gegebene Zahl z bis zur letzten $p_{\mathfrak{A}_z}$ fortzusetzen, wodurch die Grenzen von $\prod$ erweitert werden. Es ist offenbar:

$$
\begin{aligned}
(1^*)\quad \mathfrak{A}_z &= |z|\prod_2^n\left(1-\frac{1}{p_r}\right)+n-1\\
&= |z|\prod_2^{n+1}\left(1-\frac{1}{p_r}\right)+n=\\
&= |z|\prod_2^{n+\nu}\left(1-\frac{1}{p_r}\right)+n+\nu-1 \quad (\text{wo } \nu \leqq \mathfrak{A}_z-n)\;\cdots\\
&= |z|\prod_2^{\mathfrak{A}_z}\left(1-\frac{1}{p_r}\right)+\mathfrak{A}_z-1;
\end{aligned}
$$

denn die grösste Primzahl $\leqq z$ ist offenbar $p_{\mathfrak{A}_z}$.

Durch Gleichsetzung des ursprünglichen mit dem letzten Ausdruck für $\mathfrak{A}_z$ entsteht:

$$
(2)\qquad |z|\prod_2^{\mathfrak{A}_z}\left(1-\frac{1}{p_r}\right)=1.
$$

Es ist einleuchtend, dass die obere Grenze $\mathfrak{A}_z$ beliebig vergrössert werden kann, ohne den Werth von $\prod$ zu verändern. Factoren $\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$, welche Primzahlen entsprechen, die $> z$ sind, können selbstverständlich keinen Einfluss haben, da $\left|\frac{z}{p_r}\right|=0$, wenn $p_r > z$ ist.

In ihrer allgemeinsten Form lautet daher die Gleichung (2):

$$
(2^*)\qquad |z|\prod_2^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_r}\right)=1.
$$

Nach dem leicht zu beweisenden Satze

$$
(3)\qquad |z|\prod_2^{n}\left(1-\frac{1}{p_r}\right)=|z|\prod_2^{n-1}-\left|\frac{z}{p_n}\right|\prod_2^{n-1},
$$

welcher für jedes $n \gtreqless \mathfrak{A}_z$ giltig ist, kann geschrieben werden:

$$
\mathfrak{A}_z=|z|\prod_2^{n+1}\left(1-\frac{1}{p_r}\right)+n=|z|\prod_2^{n}-\left|\frac{z}{p_{n+1}}\right|\prod_2^{n}+n,
$$

nun ist auch

$$\mathfrak{A}_z = \left| z \right| \prod_2^n + n - 1,$$

woraus:

(4) $$\left| \frac{z}{p_{n+1}} \right| \prod_2^n \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) = 1.$$

Dieser Satz gilt auch, wenn die obere Grenze $\begin{smallmatrix} > n \\ < \mathfrak{A}_z \end{smallmatrix}$ ist; ein specieller Fall ist

(4') $$\left| \frac{z}{p_{\mathfrak{A}_z}} \right| \prod_2^{\mathfrak{A}_z - 1} \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) = 1.$$

Durch wiederholte Anwendung des Satzes (3) ergiebt sich:

$$\left| \left| \frac{z}{p_{n+1}} \right| + \left| \frac{z}{p_{n+2}} \right| - \left| \frac{z}{p_{n+1} \cdot p_{n+2}} \right| \right| \prod_2^n = 2,$$

$$\left[\left| \frac{z}{p_{n+1}} \right| + \left| \frac{z}{p_{n+2}} \right| + \left| \frac{z}{p_{n+3}} \right| - \left| \frac{z}{p_{n+1} \cdot p_{n+2}} \right| - \left| \frac{z}{p_{n+1} \cdot p_{n+3}} \right| - \left| \frac{z}{p_{n+2} \cdot p_{n+3}} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{z}{p_{n+1}\, p_{n+2} p_{n+3}} \right| \right] \cdot \prod_2^n \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) = 3.$$

u. s. w.

2. Um nun die Grenzen von $\prod$ einzuengen, kann der Satz (3) vortheilhaft benützt werden. Es ist

$$\mathfrak{A}_z = \left| z \right| \prod_2^n + n - 1 = \left| z \right| \prod_2^{n-1} - \left| \frac{z}{p_n} \right| \prod_2^{n-1} + n - 1,$$

wobei abkürzungsweise $\prod\limits_2^n$ für $\prod\limits_2^n \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$ gesetzt wurde; ferner hat man

$$\mathfrak{A} \left| \frac{z}{p_n} \right| = \left| \frac{z}{p_n} \right| \prod_2^{n-1} + n - 2,$$

weil $n - 1 \geqq n'$, wo $p_{n'} < \sqrt{\frac{z}{p_n}} < p_{n'+1}$; hieraus ist:

$$\left| \frac{z}{p_n} \right| \prod_2^{n-1} = \mathfrak{A} \left| \frac{z}{p_n} \right| - (n-2);$$

dies in $\mathfrak{A}_z$ gesetzt, giebt:

$$\mathfrak{A}_z = |z| \prod_2^{n-1} - \mathfrak{A}\left|\frac{z}{p_n}\right| + n - 1 + n - 2$$

und ebenso folgt durch wiederholte Anwendung des Satzes (3):

$$\mathfrak{A}_z = |z| \prod_2^{n-1} - \mathfrak{A}\left|\frac{z}{p_{n-1}}\right| - \mathfrak{A}\frac{z}{p_n} + n - 1 + n - 2 + n - 3, \ldots$$

$$(5)\quad \mathfrak{A}_z = |z| \prod_2^{\nu} - \sum_{\nu+1}^{n}{}^r \mathfrak{A}\left|\frac{z}{p_r}\right| + n - 1 + \cdots + \nu - 1.$$

Die Zerlegung von $|z|\prod_2^{\nu}$ nach Satz (3) kann nur dann mit Erfolg fortgesetzt werden, solange $p_{\nu-1} > \sqrt{\frac{z}{p_\nu}}$ ist; es wird aber endlich als obere Grenze eine Zahl m hervorgehen, für welche $p_m < \sqrt{\frac{z}{p_{m+1}}} < p_{m+1}$ sein wird, oder $p_m^2\, p_{m+1} < z < p_{m+1}^3$ und weil $p_m < p_{m+1}$, umsomehr

$$(6)\qquad p_m^3 < z < p_{m+1}^3.$$

Dem entspricht:

$$(7)\qquad \mathfrak{A}_z = |z| \prod_2^{m} - \sum_{m+1}^{n}{}^r \mathfrak{A}\left|\frac{z}{p_r}\right| + \binom{n}{2} - \binom{m-1}{2}.$$

Diese Formel lässt sich durch einfache Substitutionen in jene überführen, welche Meissel in den „Mathematischen Annalen" Bd. II u. III für die Anzahl gegeben hat; in derselben wird die Einheit nicht mitgezählt ($p_1 = 2$, $p_2 = 3\ldots$). Die Ableitung mittelst Ungleichungen ist eine bei weitem umständlichere als die hier gegebene; sie hat den weiteren Nachtheil, dass sie keine Handhabe zu wiederholten Umgestaltungen derselben Formel (7) darbietet.

Je grösser die gegebene Zahl z ist, desto vortheilhafter wird die Anwendung obiger Formel, weil mit wachsendem z auch der Unterschied zwischen m und n sehr rasch zunimmt.

Z. B. für $z = 1000$	ist $n =$	12,	$m = 5$,
$= 10\,000$	„ $=$	26,	$= 9$,
$= 100\,000$	„ $=$	67,	$= 15$,
$= 1\,000\,000$	„ $=$	168,	$= 26$.

. . . .

3. Um die Reihe der Theiler $p_2 \ldots p_m$ noch weiter zu reduciren, wird wieder Satz (3) angewendet, dann ist:

$$(8)\qquad \mathfrak{A}_z = |z|\prod_{2}^{m-1} - \left|\frac{z}{p_m}\right|\prod_{2}^{m-1} - \sum_{m+1}^{n}{}^{r}\mathfrak{A}\frac{z}{p_r} + \binom{n}{2} - \binom{m-1}{2}.$$

Nun lässt sich auf das zweite Glied rechter Hand sofort die Formel (5) anwenden, weil stets $m-1 < n'$ ist, $p'_n < \sqrt{\frac{z}{p_m}} < p_{n'+1}$; denn es gilt auch: $p_m < \sqrt[3]{z} < p_{m+1}$. Wenn in ersterer Ungleichung statt p_m das grössere $\sqrt[3]{z}$ gesetzt wird, so ist $p_{n'+1} > \sqrt[3]{z} > p_m$, daher wirklich $n'+1 > m$ oder $m-1 < n'$. Es ist daher gestattet zu schreiben:

$$(9)\qquad \mathfrak{A}\frac{z}{p_m} = \left|\frac{z}{p_m}\right|\prod_{2}^{m-1} - \sum_{m}^{n'}\mathfrak{A}\left|\frac{z}{p_m p_r}\right| + n' - 1 + \cdots + m - 2.$$

Da $n' \geqq m$ ist, so kann die untere Grenze von $\sum$ die obere nie übertreffen. Aus (9) folgt:

$$\left|\frac{z}{p_m}\right|\prod_{2}^{m-1} = \mathfrak{A}\frac{z}{p_m} + \sum_{m}^{n'}{}^{r}\mathfrak{A}\frac{z}{p_m p_r} - \binom{n'}{2} + \binom{m-2}{2},$$

dies in (8) gesetzt, giebt:

$$(10)\quad \mathfrak{A}_z = |z|\prod_{2}^{m-1} - \sum_{m}^{n}{}^{r}\mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - \sum_{m}^{n'}{}^{r}\mathfrak{A}\frac{z}{p_m p_r} + \binom{n}{2} + \binom{n'}{2} - \binom{m-1}{2} - \binom{m-2}{2}.$$

Ist $z = p^3 + \alpha$ und $\frac{\alpha}{p} < p_1{}^2 - p^2$, unter p, p_1 zwei aufeinanderfolgende Primzahlen verstanden, so ist $p_{n'} \leqq \sqrt{\frac{p^3+\alpha}{p}}$, weil $p_m < \sqrt[3]{p^3+\alpha}$, daher $=p$ ist, somit $p_{n'} < \sqrt{p^2 + \frac{\alpha}{p}} < p_{n'+1}$ und $p_{n'} = p = p_m$, $n' = m$. In diesem Falle besteht also die Summe $\sum_{m}^{n'} = \mathfrak{A}\frac{z}{p_m^2}$ nur aus einem einzigen Gliede. Im Allgemeinen umfasst dieselbe im Verhältniss zu z nur sehr wenige Glieder, so ist z. B. für $z = 1{,}000{,}000$: $m = 26$ $n' = 27$ und $\sum_{m}^{n'} = \mathfrak{A}\frac{z}{p_{26}^2} + \mathfrak{A}\frac{z}{p_{26}\cdot p_{27}}$. Da $\frac{\alpha}{p} < p_1{}^2 - p^2$ und $z = p^3 + \alpha$, so ist $z < p_1{}^2 p$. Wenn also $p^3 < z < p_1{}^2 p$ ist, so folgt immer $m = n'$.

Das symbolische Product lässt sich weiter zerfällen und so behandeln wie $|z|\prod_{2}^{m}$; es entsteht:

$$(11)\quad \mathfrak{A}_z = |z| \prod_2^{m-2} - \sum_{m-1}^{n}{}^r \mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - \sum_{m}^{n'}{}^r \mathfrak{A}\frac{z}{p_m p_r} - \sum_{m-1}^{n''}{}^r \frac{z}{p_{m-1} p_r}$$

$$+ \binom{n}{2} + \binom{n'}{2} + \binom{n''}{2} - \binom{m-1}{2} - \binom{m-2}{2} - \binom{m-3}{2};$$

$$p_{n''} < \sqrt{\frac{z}{p_{m-1}}} < p_{n''+1}.$$

Da $p_{m-1} < p_m$, so ist $\sqrt{\frac{z}{p_m}} \geqq \sqrt{\frac{z}{p_{m-1}}}$, folglich auch $n'' \geqq n'$; ferner ist $n' \geqq m$, umsomehr $n'' > m-1$, die obere Grenze in $\sum\limits_{m-1}^{n''}$ ist mithin grösser als die untere, daher ist die Summirung ausführbar.

Diese allmähliche Verminderung der oberen Grenze m wird im allgemeinen nicht bis zum Verschwinden derselben, sondern nur bis zu einem gewissen Grenzwerth k getrieben werden können. Ein beliebiges $|u|\prod\limits_2^s$ wird ja nach Formel (5) sich nur dann durch $\mathfrak{A}u$ darstellen lassen, wenn $s \geqq \sigma$, $p_\sigma < \sqrt[3]{u} < p_{\sigma+1}$ ist. In Folge des bisher befolgten Vorganges wird $\left|\frac{z}{p_r}\right|$ immer grösser, weil der Theiler p_r immer kleiner wird, während die obere Grenze fortwährend abnimmt. Für die Grenze k wird nach dem leicht zu erkennenden Bildungsgesetz der Formel (11) offenbar:

$$(12)\quad \mathfrak{A}_z = |z| \prod_2^{k} - \sum_{k+1}^{n}{}^r \mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - \sum_{1}^{m-k}{}^{\nu} \sum_{m-\nu+1}^{n^{(\nu)}}{}^r \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m-\nu+1} p_r} + \sum_{0}^{m-k}{}^{\nu} \binom{n^{(\nu)}}{2}$$

$$- \binom{m}{3} + \binom{k-1}{3}.$$

Hierin entstand $|z|\prod\limits_2^k$ aus $|z|\prod\limits_2^{k+1} = |z|\prod\limits_2^k - \left|\frac{z}{p_k}\right|\prod\limits_2^k$; damit nun $\left|\frac{z}{p_{k+1}}\right|\prod\limits_2^{x}$ mittelst der Formel (5) durch $\mathfrak{A}\frac{z}{p_{k+1}}$ ausgedrückt werden konnte, musste $p_k < \sqrt[3]{\frac{z}{p_{k+1}}} < p_{k+1}$ oder $p_k^3 p_{k+1} < z < p_{k+1}^4$ und umsomehr

$$(13)\qquad p_k^4 < z < p_{k+1}^4 \text{ oder } p_k < \sqrt[4]{z} < p_{k+1}$$

sein, wodurch die Grenze k definirt ist.

4. Die Formel (12) bietet nun wieder analog wie bei (5) das Mittel dar, das Gebiet der Primzahlen-Theiler $p_2, p_3, \ldots$ weiter einzuschränken. Es ist

$$|z| \prod_2^k = |z| \prod_2^{k-1} - \left|\frac{z}{p_\varkappa}\right| \prod_2^{k-1};$$

das negative Product kann durch $\mathfrak{A}_{\frac{z}{p_\varkappa}}$ mittelst einer der Formeln, welche aus (12) durch die Substitutionen $k = m-1,\ m-2, \ldots k$ hervorgehen, ausgedrückt werden. Ein Repräsentant dieses Systems ist:

$$(14)\quad \mathfrak{A} z = |z| \prod_2^{\varkappa} - \sum_{\varkappa+1}^{n}{}^r \mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - \sum_1^{m-\varkappa}{}^{\nu} \sum_{m-\nu+1}^{n^{(\nu)}}{}^r \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m-\nu+1}\, p_r}$$
$$+ \sum_0^{m-\varkappa}{}^{\nu} \binom{n^{(\nu)}}{2} - \binom{m}{3} + \binom{\varkappa-1}{3}, \ldots$$

worin $\varkappa$ alle Werthe von m bis k annehmen kann. Die Bedingung, unter welcher $\left|\frac{z}{p_k}\right| \prod_2^{k-1}$ durch $\mathfrak{A}_{\frac{z}{p_k}}$ mit Hilfe dieser Formel (14) ausgedrückt werden kann, ist gegeben durch die Ungleichung $k-1 < k'$, wo $p_{k'} < \sqrt[3]{\frac{z}{p_k}} < p_{k'+1}$ ist. Nun ist

$$p_k < \sqrt[4]{z} < p_{k+1}, \text{ und } p_{k'} < \sqrt[3]{\frac{z}{p_k}} < p_{k'+1};$$

setzt man hierin statt p_k das grössere $\sqrt[4]{z}$, so folgt $\sqrt[3]{\frac{z}{\sqrt[4]{z}}} = \sqrt[4]{z} < p_{k'+1}$, mithin $p_k < \sqrt[4]{z} < p_{k'+1}$ und $k-1 < k'$. Die Bedingung wird daher thatsächlich erfüllt.

Setzt man an Stelle von m und n die sich auf $\left|\frac{z}{p_k}\right|$ beziehenden Grössen m_1 und n_1, ferner $\varkappa = k-1$, so folgt:

$$(15)\quad \left|\frac{z}{p_k}\right| \prod_2^{k-1} = \mathfrak{A}\frac{z}{p_k} + \sum_k^{n_1}{}^r \mathfrak{A}\frac{z}{p_k p_r} \sum_1^{m_1-k+1}{}^{\nu} \sum_{m_1-\nu+1}^{n_1^{(\nu)}}{}^r \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m_1-\nu+1}\, p_k\, p_r}$$
$$- \sum_0^{m_1-k+1}{}^{\nu} \binom{n_1^{(\nu)}}{2} + \binom{m_1}{3} - \binom{k-2}{3}; \ldots$$

da ferner $p_{n_1} < \sqrt{\frac{z}{p_k}} < p_{n_1+1}$, $p_{m_1} < \sqrt[3]{\frac{z}{p_k}} < p_{m_1+1}$, so ergiebt sich:

$$\mathfrak{A}_z = |z| \prod_2^{k-1} - \mathfrak{A}\frac{z}{p_k} - \sum_{k+1}^{n}{}^{r} \mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - \sum_{k}^{n_1}{}^{r} \mathfrak{A}\frac{z}{p_k\, p_r} - \sum_{1}^{m-k}{}^{\nu} \sum_{m-\nu+1}^{n^{(\nu)}}{}^{r} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m-\nu+1}\, p_r}$$

$$- \sum_{1}^{m_1-k+1}{}^{\nu} \sum_{m_1-\nu+1}^{n_1^{(\nu)}}{}^{r} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m_1-\nu+1}\, p_k\, p_r} + \sum_{0}^{m-k}{}^{\nu} \binom{n^{(\nu)}}{2} + \sum_{0}^{m_1-k+1}{}^{\nu} \binom{n_1^{(\nu)}}{2}$$

$$- \binom{m}{3} - \binom{m_1}{3} + \binom{k-1}{3} + \binom{k-2}{3}.$$

Berücksichtigt man, dass $n_1 = n^{(m-k+1)}$, so lässt sich das 4. und 5. Glied auf der rechten Seite der Gleichung vereinigen und es kann kürzer geschrieben werden:

$$(16)\quad \mathfrak{A}_z = |z| \prod_2^{k-1} - \sum_{k}^{n}{}^{r} \mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - \sum_{1}^{m-k+1}{}^{\nu} \sum_{m-\nu+1}^{n^{(\nu)}}{}^{r} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m-\nu+1}\, p_r}$$

$$- \sum_{1}^{m_1-k+1}{}^{\nu} \sum_{m_1-\nu+1}^{n_1^{(\nu)}}{}^{r} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m_1-\nu+1}\, p_k\, p_r} + \sum_{0}^{m-k}{}^{\nu} \binom{n^{(\nu)}}{2} + \sum_{0}^{m_1-k+1}{}^{\nu} \binom{n_1^{(\nu)}}{2}$$

$$- \binom{m}{3} - \binom{m_1}{3} + \binom{k-1}{3} + \binom{k-2}{3}.$$

Ebenso wird gefunden:

$$(17)\quad \mathfrak{A}_z = |z| \prod_2^{k-2} - \sum_{k-1}^{n}{}^{r} \mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - \sum_{1}^{m-k+2}{}^{\nu} \sum_{m-\nu+1}^{n^{(\nu)}}{}^{r} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m-\nu+1}\, p_r}$$

$$- \sum_{1}^{m_1-k+1}{}^{\nu} \sum_{m_1-\nu+1}^{n_1^{(\nu)}}{}^{r} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m_1-\nu+1}\, p_k\, p_r} - \sum_{1}^{m_2-k+2}{}^{\nu} \sum_{m_2-\nu+1}^{n_2^{(\nu)}}{}^{r} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m_2-\nu+1}\, p_{k-1}\, p_r}$$

$$+ \sum_{0}^{m-k}{}^{\nu} \binom{n^{(\nu)}}{2} + \sum_{0}^{m_1-k+1}{}^{\nu} \binom{n_1^{(\nu)}}{2} + \sum_{0}^{m_2-k+2}{}^{\nu} \binom{n_2^{(\nu)}}{2}$$

$$- \binom{m}{3} - \binom{m_1}{3} - \binom{m_2}{3} + \binom{k-1}{3} + \binom{k-2}{3} + \binom{k-3}{3};$$

$n_2 = n^{(m-k+2)}$, $n_0^{(\nu)} = n^{(\nu)}$, $p_{n_2} < \sqrt{\frac{z}{p_{k-1}}} < p_{n_2+1}$, $p_{m_2} < \sqrt[3]{\frac{z}{p_{k-1}}} < p_{m_2+1}$.

U. s. f. Schliesslich kommt, mit einfacher Reduction:

$$(18)\quad \mathfrak{A}_z = |z| \prod_{2}^{h} - \sum_{r=h+1}^{n} \mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - \sum_{\nu=1}^{m-h} \sum_{r=m-\nu+1}^{n^{(\nu)}} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m-\nu+1}\,p_r}$$

$$- \sum_{\mu=1}^{k-h} \sum_{\nu=1}^{m_\mu-k+\mu} \sum_{r=m_\mu-\nu+1}^{n_\mu^{(\nu)}} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m_\mu-\nu+1}\,p_{k-\mu+1}\,p_r} + \sum_{\mu=0}^{k-h} \sum_{\nu=0}^{m_\mu-k+\mu} \binom{n_\mu^{(\nu)}}{2}$$

$$- \sum_{\mu=0}^{k-h} \binom{m_\mu}{3} + \binom{k}{4} - \binom{h-1}{4},$$

$$p_h < \sqrt[5]{z} < p_{h+1}.$$

Die Grösse h kann übrigens alle Werthe $h = k-1, \ldots h+1,\ h$ annehmen.

Mit Hilfe der Formel (12) liesse sich dieser Ausdruck nicht weiter entwickeln; es müsste zu diesem Zwecke die Formel (18) selbst herangezogen werden.

Ein Vergleich der bisher gewonnenen Resultate dieser, durch die Grössen $n, m, k, h, \ldots$ markirten stufenförmigen Entwicklung, lässt ein allgemeines Bildungsgesetz deutlich wahrnehmen. Für irgend eine Stufe c, $\left(p_c < \sqrt[q]{z} < p_{c+1},\ q \text{ eine ganze Zahl}\right)$, ist

$$(19)\quad \mathfrak{A}_z = |z| \prod_{2}^{c} - \sum_{r=c+1}^{n} \mathfrak{A}\frac{z}{p_r} - \sum_{\nu=1}^{m-c} \sum_{r=m-\nu+1}^{n^{(\nu)}} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m-\nu+1}\,p_r}$$

$$- \sum_{\mu=1}^{k-c} \sum_{r=1}^{m_\mu-k+\mu} \sum_{m_\mu-\nu+1}^{n_\mu^{(\nu)}} \mathfrak{A}\frac{z}{p_{m_\mu-\nu+1}\,p_{k-\mu+1}\,p_r} - \cdots$$

$$+ (-1)^{q-1}\binom{k}{q-1} + (-1)^{q}\binom{c-1}{q-1}.$$

Es liegt in der Natur der Sache, dass der Unterschied zweier unmittelbar aufeinanderfolgenden Stufen mit fortschreitender Entwicklung ziemlich rasch abnimmt. Dieses Verfahren findet selbstverständlich seinen Abschluss, sobald die Stufe $\mathfrak{A} = 1$ erreicht wird.

Im Folgenden soll nun eine Methode gezeigt werden, welche das vollständige Erschöpfen des Theilergebietes $p_2 \ldots p_n$ entbehrlich macht.

5. Die Gleichung

$$(20)\qquad \left|\frac{a}{b}\right| - \left|\frac{c}{b}\right| = \left|\frac{a-c}{b}\right|$$

ist stets, aber auch nur dann richtig, wenn der Rest $\left|\frac{a}{b}\right|_r \geqq \left|\frac{c}{b}\right|_r$. Sie ist unter allen Umständen giltig, wenn c durch b theilbar ist. Dieser

Satz kann sofort auf das Product $|a|\prod\limits_2^i = |a|\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$ angewendet werden, wenn eine Zahl $c < a$ gefunden werden kann, welche durch $2.3\ldots p_i = f_i$ theilbar ist. Ein wirklicher Vortheil für vorliegende Zwecke wird jedoch nur dann erwachsen, wenn die Differenz $a - c$ möglichst klein ausfällt. Es kommt demnach darauf an, die gegebene Zahl z zwischen Vielfachen von Primzahlen-Factoriellen $2.3\ldots p_{i-1}.p_i$ so einzuschliessen, dass

$$\lambda.2.3\ldots p_{i-1}.p_i < z < (\lambda+1).2.3\ldots p_{i-1}.p_i, \quad \lambda < p_{i+1}$$

ist; selbstverständlich giebt es unter dieser Bedingung nur eine einzige Factorielle f_i.

Wurde nun zur Bestimmung von $\mathfrak{A}_z$ die obere Grenze n von $|z|\prod\limits_2^n$ bis auf i reducirt, so ist $\mathfrak{A}_z = z\prod\limits_2^i + \sigma$; zieht man davon $\varphi(\lambda.f_i) = \lambda.f_i\prod\limits_2^i$ ab, so ergiebt sich:

$$\mathfrak{A}_z - \varphi(\lambda f_i) = (z - \lambda.f_i)\prod_2^i + \sigma. \tag{20*}$$

Dass sich dieses Product ungleich leichter bestimmen lässt als $|z|\prod\limits_2^i$, liegt auf der Hand.

Für alle Zahlen von $7-24$ und von $31-48$ ist die Factorielle f_n *aller* Theiler von p_2 bis p_n kleiner als die Zahlen selbst; für alle andern Zahlen ist dies nicht der Fall. Der Unterschied zwischen einem Primzahlenquadrat p_n^2 und der entsprechenden Factorielle f_n wächst mit zunehmendem n ausserordentlich rasch.

In Wertheim's „*Zahlentheorie*" ist ein Beispiel für $z = 1000$ mittelst der Meissel'schen Formel ausgerechnet zu finden. Das Product $|1000|\prod\limits_2^5$ wurde direct berechnet; es besteht aus $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\cdots+\binom{4}{4} = 2^4 - 1 = 15$ Gliedern.

Mittelst der Herbeiziehung von $f_7 = 2.3.5.7 = 210$ wird die Rechnung einfacher. Es ist $4.210 < 1000 < 5.210$,

$$|1000|\prod_2^5 = |1000 - 4.210|\prod_2^5 + 192 = 160\prod_2^5 + 192$$

$$= \mathfrak{A}_{160} - 5 + \left|\frac{160}{11}\right|\prod_2^5 + 192 = 38 - 5 + 3 + 192 = 228.$$

Je näher die Zahl z einem Vielfachen von f liegt, desto vortheilhafter ist die Benützung desselben. Am einfachsten wird sich die Entwicklung für $z=f$ geben. Sei beispielsweise $z=2.3.5.7.11=2310=f_6$, so ist hier $p_n=47$, $n=16$, $p_m=13$, $m=7$, $p_{n'}=13$, $n'=7$ und nach Formel (10):

$$\mathfrak{A}_{2310}=1.2.4.6.10-\sum_7^{16}\mathfrak{A}\frac{2310}{p_r}-\mathfrak{A}\frac{2310}{13^2}+\binom{16}{2}+\binom{7}{2}-\binom{6}{2}-\binom{5}{2}$$

$$\begin{aligned}&=480-\mathfrak{A}_{177}-\mathfrak{A}_{135}-\mathfrak{A}_{121}-\mathfrak{A}_{100}-\mathfrak{A}_{79}-\mathfrak{A}_{74}-\mathfrak{A}_{62}-\mathfrak{A}_{56}\\&\qquad-\mathfrak{A}_{53}-\mathfrak{A}_{49}-\mathfrak{A}_{47}+116\\&=480-261+116=335.\end{aligned}$$

Bei der Aufstellung einer Primzahlen-Tafel dürfte es sich empfehlen, von diesem abkürzenden Verfahren behufs Verification der Primzahlen-Zeiger (n in p_n) Gebrauch zu machen.

Liegt die gegebene Zahl näher bei $(\lambda+1)f_i$ als bei λf_i, so kann der Umstand benützt werden, dass $(\lambda+1)f_i-1$ durch irgend eine Combination ohne Wiederholung c der Primzahlen von p_2 bis p_i getheilt, den grösstmöglichen Rest $C-1$ giebt. Daher lässt sich auch in diesem Falle die Formel (20) anwenden; es ist dann:

$$|(\lambda+1)f_i-1|\prod_2^i-|z|\prod_2^i=|(\lambda+1)f_i-1-z|\prod_2^i.$$

Nun bezeichnet allgemein $|u|\prod_2^{n}$ die Anzahl Zahlen $\leqq u$, welche durch keine der Primzahlen von p_2 bis p_n theilbar sind; da aber $(\lambda+1)f_i$ unter diese Zahlen offenbar nicht gehört, so folgt

$$|(\lambda+1)f_i-1|\prod_2^i=(\lambda+1)f_i|\prod_2^i=(\lambda+1).1.2.4\ldots(p_i-1)$$

und

$$|z|\prod_2^i=(\lambda+1)\,1.2.4\ldots(p_i-1)-|(\lambda+1)f_i-z-1|\prod_2^i. \tag{21}$$

Endlich kann auch die Formel (4) behufs Abkürzung der Entwicklung mit Vortheil angewendet werden, wenn $\left|\frac{p_n^2}{p_{n+1}}\right|\leqq u\leqq p_{n+1}-1$ ist. Denn die kleinste, mittelst der Theilerreihe $p_2\ldots p_n$ bestimmbare Anzahl $\mathfrak{A}_u$ ist die für die Zahl p_n^2, während die grösste die für p_{n+1}^2-1 ist. In beiden Fällen ist nach Formel (4):

$$\left|\frac{p_2^n}{p_{n+1}}\right|\prod_2^n=1,\quad \left|\frac{p_{n+1}^2-1}{p_{n+1}}\right|\prod_2^n=(p_{n+1}-1)\prod_2^n=1. \tag{22}$$

Wenn daher in (20*): $\left|\frac{p_i^2}{p_{i+1}}\right| \leqq z - \lambda f_i \leqq p_{i+1} - 1$ ist, so folgt: $|z - \lambda f_i| \prod\limits_2^i = 1$, und wenn in (21) $\left|\frac{p_i^2}{p_{i+1}}\right| \leqq (\lambda + i) f_i - z - 1 \leqq p_{i+1} - 1$ ist, folgt ebenso: $|(\lambda + 1) f_i - z - 1| \prod\limits_2^i = 1$. Allgemein, wurde $|z| \prod\limits_2^n$ auf $|u| \prod\limits_2^i$ reducirt, und ist $p_g < \sqrt{u} < p_{g+1}$, ferner $g \leqq i \leqq \mathfrak{A}_u$, so ist nach Formel (1*): $|u| \prod\limits_2^i = \mathfrak{A}_u - i + 1$.

Salzburg, im September 1889.