

Scheinbare und wirkliche Periodenlängen veränderlicher Sterne. Von *J. G. Hagen, S. J.*

Zu den scheinbaren Änderungen der wahren Lichtperioden veränderlicher Sterne gehört die Verspätung oder Verfrühung der Beobachtungen, die vom Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit zu relativen Geschwindigkeit des Beobachters gegen den Stern abhängt, die sog. Lichtzeit oder Lichtgleichung.

Die erste terrestrische Lichtgleichung hat *Wurm* (wahrscheinlich auf Anregung von *Gauß*) veröffentlicht, zunächst für den Stern Algol. Sie erschien im Berliner Jahrbuch für 1804 S. 152; und dann in verbesserter Gestalt in den »Kleinen astr. Ephemeriden« von *Harding* und *Wiesen* für 1832 S. 98.

Außer der terrestrischen gibt es aber noch stellare Lichtgleichungen, fortschreitende sowohl wie zyklisch wiederkehrende. Die stellaren relativen Geschwindigkeiten sind immer heliozentrisch zu verstehen.

1. Allgemeine Formel. Wird die wahre Lichtperiode eines Sterns mit P bezeichnet, die scheinbare mit P' , ferner die Lichtgeschwindigkeit mit V und die relative Geschwindigkeit des Beobachters (oder der Sonne) zum Stern mit v , positiv genommen, wenn die Entfernung wächst, so folgt aus rein geometrischen Betrachtungen die Formel:

$$P' = P(1 + v/V) \quad \text{oder} \quad P' - P = Pv/V. \quad (1)$$

Lehmann-Filhés hat die Formel in AN 136.28 (1894) für die Umlaufzeiten der Doppelsterne aufgestellt. Sie gilt aber auch für Lichtperioden, und zwar ganz allgemein, ob v die Bewegung der Erde, der Sonne oder des Sterns bedeute, oder auch die algebraische Summe einer ganzen Reihe von Bewegungen.

a) Als Zahlenwert von V darf rund 300000 km gesetzt werden. Der von v steigt selten über 30 km und erreicht nur ausnahmsweise das Dreifache dieses Betrags. In jedem Falle ist der Bruch v/V von der Ordnung 0.0001, sein Quadrat kann also vernachlässigt werden. Folgerichtig darf in dem Ausdruck Pv/V die unbekannte Periode P durch die aus den Beobachtungen ermittelte P' ersetzt werden. Dem Umstande, daß v während einer Lichtperiode sich ändern kann, wird dadurch Rechnung getragen, daß man den einer Lichtperiode zukommenden Mittelwert von v verwendet.

Der Ausdruck für v wird im allgemeinen die Summe eines konstanten und mehrerer periodischer Glieder sein. Für den Zweck der Lichtgleichungen dürfen die Bahnen der relativen Geschwindigkeitsänderungen als kreisförmig vorausgesetzt werden. Die periodischen Glieder bestehen dann aus einfachen Kosinus. Wird noch zur Abkürzung $P'/V = k$ gesetzt, so nimmt Formel (1) die Gestalt an:

$$P' - P = k [c + a \cos(2\pi/m)t + b \cos(2\pi/n)t + \dots]. \quad (1')$$

Lehmann-Filhés erwähnt auch die periodischen Glieder, obwohl er die Formel nur für das konstante Glied c aufstellt. Bei Berechnung der Doppelsternbahnen dürfen nach seiner Ansicht alle diese Glieder vernachlässigt werden, nicht so bei veränderlichen Sternen. Kann auch das konstante Glied k

nicht photometrisch beobachtet, sondern nur spektroskopisch gemessen werden, so scheint es bei Untersuchungen über die physikalischen Eigenschaften, z. B. eines Bedeckungssterns, nicht gleichgültig zu sein, ob die scheinbare Lichtperiode um mehrere Zeitsekunden verfälscht ist. Die unten anzu führenden Beispiele werden nochmals darauf hinweisen.

b) Die periodischen Glieder werden aus den Beobachtungen getrennt abgeleitet; es empfiehlt sich daher, sie einzeln zu behandeln. Ein periodisches Glied wird in einer langen Reihe von gleichförmig verteilten Beobachtungen sich selbst aufheben und die aus ihnen abgeleitete Lichtperiode nicht verfälschen. Sollen aber einzelne Maxima oder Minima miteinander verglichen werden, so ist das periodische Glied in Form einer Lichtgleichung zu berechnen. Auch dazu eignet sich die Formel (1).

Die kürzeste und daher gewöhnliche Art, den Koeffizienten der Lichtgleichung zu berechnen, besteht in der Auswertung des Integrals $\int v dt$ zwischen den Grenzen, wo v den größten und kleinsten Wert hat. Wird die Zeit t von dem Punkte der Bahn an gerechnet, wo v den größten positiven Wert erreicht, so kommt z. B. für das erste periodische Glied in den Grenzen $t = 0$ und $t = 1/m$:

$$a \int \cos(2\pi/m)t dt = am/2\pi$$

Lichtgleichung = $a/V \cdot m/2\pi$. (2)

Nicht um eine andere Rechnung zu empfehlen, ist die folgende Entwicklung mitgeteilt, sondern lediglich um zu zeigen, daß Formel (1) allein genügt, alle Verfälschungen der Lichtperioden auszuschalten, die von relativen Bewegungen, zyklischen sowohl wie fortschreitenden, herrühren.

Summiert man Formel (1) über dieselben Grenzen, die für das Integral angegeben wurden, so stellt die Summe $\Sigma(P' - P) = \Sigma Pv/V$ die Zeitgleichung des betreffenden Zyklus dar. Denn einerseits bedeutet $P' - P$ die scheinbare Verlängerung der Lichtperiode, also $\Sigma(P' - P)$ das Maximum der Verspätung in den Beobachtungszeiten, und andererseits ist Pv die Strecke, um welche sich der Stern während einer Lichtperiode vom Beobachter (oder von der Sonne) entfernt, also ΣPv die halbe Schwankung oder Semiampplitude im Visionsradius; alles unter der Voraussetzung, daß die Gliederzahl groß genug ist, um die vorgeschriebenen Grenzen genau einhalten zu können. Dann wird die Lichtzeit:

$$L = \Sigma P'v/V = k a \Sigma \cos(2\pi/m)t. \quad (3)$$

c) Zur Auswertung dieser Summe empfiehlt es sich, statt der Zeit t die »Epochennummer« E einzuführen und zu setzen: $t = P'E$. Der Faktor P' ist die mittlere Bewegung des Sterns in seiner Bahn während einer Lichtperiode, ausgedrückt in Zeitmaß; in Bogenmaß ist sie daher gleich

$$(2\pi/m) P' = \mu.$$

Somit wird das Argument des Kosinus einfach μE .

Läßt man, wie bei mechanischen Quadraturen üblich, die E nicht die Zahlen 1, 2, 3 ... durchlaufen, sondern die Bruchreihe $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \dots$ und setzt vorübergehend $\mu = 2x$, so lautet die Formel für die Lichtgleichung:

$$L = k a [\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos(2r-1)x]. \quad (3')$$

Die Reihe in der Klammer hat nach Euler¹⁾ den Wert:

$$\frac{1}{2} \sin 2rx / \sin x$$

und ist daher, weil das letzte Argument $(2r-1)x = 90^\circ$ sein soll²⁾, gleich $\frac{1}{2} \cotg x$. Somit wird die Lichtzeit, wenigstens in erster Annäherung:

$$L = \frac{1}{2} k a \cotg \frac{1}{2} \mu. \quad (4)$$

Die Bedeutung der Gleichung (1) tritt nun gerade dadurch deutlich hervor, daß Gleichung (4) sich von (2) nicht wesentlich unterscheidet, indem sie sich ihr um so mehr annähert, je größer die Gliederzahl in der Reihe (3') ist. Nähert sich der Parameter r der Grenze ∞ , so wird der Winkel x unendlich klein. An dieser Grenze aber ist bekanntlich:

$$\cotg x = 1/x$$

und somit nach (4) die Lichtzeit $L = aP'/V\mu$. Wird der oben angegebene Wert von μ eingesetzt, so ergibt sich Formel (2).

Diese Betrachtung bildet das Kriterium für die Zulässigkeit der Formel (4). Sie ist um so genauer, je kleiner μ , je kleiner also das Verhältnis P'/m ist, in Worten, je mehr Lichtperioden des Veränderlichen in den Zyklus der relativen Bewegung fallen. Ist der Zyklus im Verhältnis zur Lichtschwankung kurz, so weiß der Rechner von vornherein, daß ihm Formel (4) (bei scharfer Ausrechnung) einen zu kleinen Wert liefert. Wie klein das Verhältnis P'/m sein darf, erhellt am klarsten aus den jetzt anzuführenden Beispielen.

2. Anwendung auf Algol. Die relativen Geschwindigkeiten Algols sind erstens eine geradlinige von 4.4 km, dann die von Vogel 1890 entdeckte Schwankung, die in einem Zyklus von 2.867 Tagen bis auf etwa 40 km ansteigt, ferner eine von Belopolsky gefundene Störung, die sich in weniger als zwei Jahren wiederholt, aber nur gegen 8 km beträgt, endlich die Bewegung gegen die Erde, die für Algol $29.76 \cos \beta = 27.4$ km ausmacht.

Die von Vogel entdeckte Schwankung kann die Lichtperiode Algols nicht verfälschen, weil ihr Zyklus mit der Periode zusammenfällt und die Lichtverdunklung immer an derselben Stelle der Bahn beobachtet wird. So bleiben noch die drei Komponenten der relativen Geschwindigkeit:

$$v = +4.4 + 8.04 \cos(2\pi/m)t + 27.4 \cos(2\pi/n)t \quad (\text{in km/sec}).$$

Die mittlere Lichtperiode Algols ist 2.867 Tage oder fast 250000 Sekunden, sodaß näherungsweise $P'/V = k = \frac{5}{6}$ wird (genauer = 0.8257).

a) Das dritte Glied von v ist nur der Vollständigkeit halber angeführt. Es bildet ein willkommenes Rechnungsbeispiel und zeigt z. B., daß an der Stelle der Erdbahn, wo $r = 0$ ist und die relative Geschwindigkeit zum Stern ihren größten positiven Wert hat, die scheinbare Verlängerung der Lichtperiode von einem Minimum zum nächsten wäre:

$$P' - P = \frac{5}{6} \times 27.4 = 22.8 = 0^m 38 \quad (\text{genauer } 0^m 37.7).$$

¹⁾ Introductio, I, cap. 14; vergl. Synopsis der Höh. Math. I S. 110, 13a.

²⁾ Da x durch die Beobachtungen gegeben ist und r eine ganze Zahl sein soll, so wird die Reihe mit einem Argument $90^\circ + \xi$ schließen müssen. Ihr Wert ist dann $\frac{1}{2} \cotg x + \xi\pi/180$; denn die der Formel (3) auferlegten Grenzbedingungen verlangen, daß ξ eine kleine Größe sei.

Will man die Lichtgleichung selbst aus diesem Gliede ableiten, so muß n , die Länge des siderischen Jahres, in Lichtperioden E gemessen werden. Man findet

$$365.256/2.86731 = 127.386.$$

Daher ist die mittlere relative Bewegung in einer Lichtperiode

$$v = 360^\circ/127.386 = 2^\circ 8' 18'' \quad \text{und} \quad x = 1^\circ 24' 32''.4$$

und die Eulersche Reihe, die nur einen Quadranten umfaßt, enthält über 30 Glieder.

Daraus folgt $\cotg x = 40.656$ und nach Formel (4) $L = 0^m 37.7 \times 20.328 = 7^m 66$, nur wenig kleiner als der genaue Wert $7^m 67$, wie zu erwarten war.

b) Die beiden ersten Glieder von v sind den Pulkowoer Mitteilungen 4.176-7 (1911) entnommen. Sie liefern nach (1'): $P' - P = \frac{5}{6} [4.4 + 8.04 \cos(2\pi/m)t] = 3.7 + 6.7 \cos(2\pi/m)t$. Das periodische Glied hat nach Belopolsky einen Zyklus von $m = 1.733$ Jahren oder 633 Tagen. Es muß sich bemerklich machen, wenn Beobachtungen verglichen werden, die auf die Epochen $2\pi t/m = 90^\circ$ und 270° fallen, also 316 Tage auseinander liegen.

In Einheiten E der Lichtperiode hat m den Wert $633/2.867 = 220.8$ und der Winkel μ , den der Bahnhalbmesser dieser Störung von einem Minimum Algols zum andern beschreibt, ist $360^\circ/220.8 = 1^\circ 6' 30''$, also $x = 0^\circ 8' 15''$ oder $48' 54''$. Die Eulersche Reihe enthält somit wenigstens 55 Glieder. Aus ihr ergibt sich $\cotg x = 70.297$ und nach Formel (4): $L = 6.7 \times 35.148 = 3^m 93$.

Diese stellare Lichtgleichung ist durch die Rechnungen Belopolskys bestätigt, denn nach ihm mißt der mittlere Bahnhalbmesser dieser Störung beinahe 71 Millionen Kilometer, was auf die Lichtzeit $3^m 95$ führt (die Hundertstel sind nicht scharf berechnet und in beiden Zahlen zu groß).

Neuerdings hat Schlesinger aus mehr als 300 Spektrogrammen den Zyklus gleich 1.874 Jahre und die ihm entsprechende Lichtgleichung $4^m 8$ gefunden. Eine erneute Prüfung der photometrisch bestimmten Minima Algols hat ihm das Vorhandensein dieser Lichtzeit tatsächlich bestätigt. Vergl. Science 41.109 ff. (1915) und Allegheny Publ. 3 Nr. 20. So wird der ersten Tabelle Wurms nach einem Jahrhundert eine Ergänzungstabelle beizufügen sein.

c) Das konstante Glied in v zeigt, daß die wahre Periode Algols um $P' - P = 3.7$ Sekunden kürzer ist, als sie durch die feinsten photometrischen Beobachtungen ermittelt werden kann. Bei Untersuchungen über die wahren Verhältnisse dieses Sternsystems wird eine solche Größe nicht zu vernachlässigen sein.

3. Anwendung auf λ Tauri. Seit dem Erscheinen der Allegheny Publ. 3 Nr. 20 sind die relativen Geschwindigkeiten von λ Tauri gegen die Sonne bekannt. Das Sternsystem ist ähnlich dem Algols: es besitzt eine geradlinige Bewegung im Raume, eine Schwankung von 56.18 km infolge eines Trabanten, der die 4-tägige Verdunklungsperiode verursacht, und endlich eine monatliche Störung. Die Bewegung der Erde, von der die bekannte Lichtgleichung $8^m 22$

dieses Sterns herkommt, braucht hier nicht behandelt zu werden, ebensowenig die Bewegung des Sterns, die mit seiner Verfinsterung zusammenhängt, weil sie die Lichtperiode nicht verfälschen kann.

So bleiben noch die beiden Komponenten der relativen Geschwindigkeit zu untersuchen:

$$v = +13.0 + 10.4 \cos(2\pi/m)t \quad (\text{in km/sec}).$$

Die mittlere Lichtperiode von λ Tauri beträgt $P' = 3^d 9^h 52^m 9^s = 341530^s$, daher ist $k = 1.14$ und somit:

$$P' - P = +14^s 8 + 11^s 86 \cos(2\pi/m)t.$$

a) Der Koeffizient des periodischen Gliedes ist zwar bedeutend größer als der entsprechende bei Algol, doch ist sein Zyklus so kurz, um eine merkliche Ansammlung der Differenzen $P' - P$ zuzulassen. Der Zyklus umfaßt nur 34.60 Tage oder 8.753 Lichtperioden, gegen 221 Perioden bei der Algolstörung.

Der Winkel, den der Radius der Bahn von einem Minimum zum andern beschreibt, ist dementsprechend sehr groß: $\mu = 360/8.753 = 41^\circ 13'$. Die Summe der paar Glieder in einem Viertelumlaf hängt dann nach der Eulerschen Formel von dem Werte $\cotg \frac{1}{2}\mu = 2.665$ ab, während

Vatikan-Sternwarte, 1919 Sept. 8.

Die Hauptphasen Veränderlicher Sterne berechnet mit Pogsons Schneidender Kurve.

Von *J. G. Hagen*, S. J.

Die Hauptschwierigkeit bei der Bestimmung des größten und kleinsten Lichtes veränderlicher Sterne besteht in dem Umstande, daß sowohl das Ziehen der Lichtkurve als auch das Ablesen des höchsten oder tiefsten Punktes persönlichen Einflüssen unterliegt, sodaß die von verschiedenen Beobachtern veröffentlichten Epochen nicht unmittelbar miteinander vergleichbar sind. Dem Übelstande kann bis zu einem gewissen Grade dadurch begegnet werden, daß man eine mathematische Kurve an die Beobachtungen anschniegt und ihre Maximal- und Minimalpunkte nach gegebenen Formeln berechnet.

Hat man der Kurvengleichung die Gestalt $y = f(x)$ gegeben, so lautet eine dieser Formeln $dy/dx = 0$. Dies ist das gewöhnliche Verfahren. Es gibt aber noch eine andere Formel, die größere Genauigkeit verspricht. Sie setzt voraus, daß die Kurve in der Nähe der Hauptphase einem Kegelschnitt $f(x, y) = 0$ ähnlich wird, und besteht in der Gleichung $f'(x) = 0$, worin das Glied linker Hand die partielle Derivierte nach x bedeutet. Die Gleichung ist linear und definiert die Tangente der Pogsonschen Kurve im Schnittpunkt mit der Lichtkurve. Die erstere Formel $y' = 0$ bestimmt einen Berührungspunkt und wird daher an Genauigkeit der Formel des Schnittpunkts immer nachstehen. Da dieses Verfahren in der Literatur der veränderlichen Sterne noch keine allgemeine Behandlung gefunden hat, so bedarf es einer theoretischen Begründung.

1. Die Pogsonsche Kurve ist bekanntlich der geometrische Ort aller Mittelpunkte der Sehnen, die durch die Lichtkurve parallel zur Zeitachse gezogen werden. Sie kann deshalb auch die Halbierende Kurve genannt werden. Kürzer halber möge die Tangente der Halbierenden Kurve im Schnittpunkt mit der Lichtkurve die Schneidende Tangente heißen.

dieser Koeffizient bei der Störung Algols bis auf 70.3 steigt.

Nach Formel (4) hat man schließlich die Lichtgleichung der Störung: $L = 11.86 \times 1.332 = 15^s 8$.

Die Lichtzeit folgt auch unmittelbar aus dem Halbmesser der Bahn. *Schlesinger* berechnet ihn zu 4950000 km. Das Licht braucht somit 16^s 5, um ihn zu durchlaufen. Sicherlich ist es nur Zufall, daß auch in diesem ungünstigen Falle das Ergebnis der Formel (4) der Wahrheit so nahe kommt.

Obwohl eine Lichtgleichung von 0^m 27 für die Beobachtungen dieses Veränderlichen, dessen Minimum 10 Stunden andauert und immer bis auf eine Stunde unsicher bleibt, belanglos erscheint, so liegt doch kein Grund vor, warum sie nicht zugleich mit der terrestrischen Lichtzeit von 8^m 22 in Rechnung gebracht werden sollte.

b) In den nahezu hundert Minima, die seit 1856 beobachtet sind, ist die zyklische Störung wohl so weit verwischt, daß die Lichtperiode aus ihnen unverfälscht abgeleitet werden konnte. Dabei bleibt aber die Tatsache zu bedenken, daß die wahre Periode um $P' - P = 14^s 8$ kürzer ist, als sie erscheint. Die Verkürzung ist viermal größer als bei Algol und kann daher um so weniger vernachlässigt werden.

J. G. Hagen, S. J.

Über diese Kurve gilt nun der Satz: Die Tangente der Halbierenden Kurve im Schnittpunkte mit der Lichtkurve ist die zur Zeitachse konjugierte Gerade bezüglich eines Büschels von Kegelschnitten, die mit der Lichtkurve in jenem Schnittpunkt eine vierpunktige Berührung eingehen; sie ist nämlich die harmonische Polare des auf der Zeitachse unendlich fernen Punktes bezüglich aller Kurven des Büschels.

Ist die Lichtkurve selbst ein Kegelschnitt, so ist die Halbierende geradlinig und zugleich die harmonische Polare des auf der Zeitachse unendlich fernen Punktes. Ist die Lichtkurve kein Kegelschnitt, so denken wir uns einen solchen in vierpunktiger Berührung mit der Lichtkurve in dem gesuchten Punkte der Hauptphase. Dieser Kegelschnitt vertritt einen Kurvenbüschel, weil von seinen fünf willkürlichen Konstanten nur vier bestimmt sind.

Der aufgestellte Satz enthält zwei Behauptungen. Er sagt erstlich, daß der vierpunktig berührende Kegelschnittbüschel eine dem unendlich fernen Punkte der Zeitachse entsprechende gemeinschaftliche Polare von bestimmter Richtung besitze, und zweitens, daß diese gemeinschaftliche Richtung die Schneidende Tangente der Pogsonschen Kurve enthalte.

a) Die erstere Behauptung findet sich in *Salmons* Higher Plane Curves ausgesprochen, wo er über oskulierende Kegelschnitte handelt. Für unsere Anwendungen des Satzes ist es aber nötig, die Formeln, in denen der Beweis liegt, wirklich aufzustellen.

Die Lichtkurve sei auf ein geradliniges Koordinatensystem x, y bezogen, in dem y die Helligkeit und x die Zeit bedeute. Den Ursprung des Systems denken wir uns in die