SOPRA LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI OMOGENEE A COEFFICIENTI ALGEBRICI.

Nota del Dr. **Giuseppe Vitali**, in Pisa.

Adunanza del 26 maggio 1901.

1. Il sig. APPELL alla fine della sua celebre memoria sulle funzioni a moltiplicatori *) accenna allo studio delle equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti algebrici i cui punti singolari (mutata eventualmente, se si tratta di punti di diramazione o di punti all'infinito, la variabile nella variabile principale) sono punti della classe di FUCHS, la cui corrispondente *equazione fondamentale determinante* ha radici intere.

Queste equazioni, che noi chiameremo equazioni di APPELL, egli le distingue in tre specie, avendo riguardo alle singolarità del loro integrale generale **).

Noi considereremo una superficie R di RIEMANN di genere p e le equazioni di APPELL del 2° ordine i cui coefficienti sono monodromi su R.

Se R_{abc} è la superficie R resa semplicemente connessa dal solito sistema di tagli normali $a_i b_i c_i (i = 1, 2, \ldots p)$, l'integrale generale di una equazione di APPELL di 1ª o 2ª specie è monodromo su R_{abc}.

Solo attraversando uno dei tagli segnati un sistema di integrali fondamentali della detta equazione può subire una sostituzione lineare.

Le $3p$ sostituzioni lineari che così vengono fuori devono soddisfare

*) APPELL, *Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques* [Acta Mathematica, t. XIII (1890)].

**) Loco citato, pag. 165.

alcune relazioni che è ben facile determinare *) e generano un gruppo θ che è il *gruppo dell'equazione*.

Supponiamo che θ sia il gruppo di un'equazione di Appell di prima specie.

Vi possono essere altre equazioni di prima specie aventi il medesimo gruppo θ?

2. Per rispondere alla domanda formulata nel precedente § supponiamo che

$$A = 0, \qquad B = 0$$

siano due equazioni di Appell del 2° ordine di 1ª specie aventi il medesimo gruppo θ.

Sia y_1, y_2 un sistema fondamentale di integrali della prima, e t_1, t_2 il sistema degli integrali corrispondenti della seconda di dette equazioni.

Noi porremo sempre per brevità

$$\Delta(a, b) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Per le ipotesi fatte $\Delta(t, y)$ è una funzione sempre finita su tutta la superficie R che ai tagli del sistema normale viene moltiplicata per i determinanti dei coefficienti delle corrispondenti sostituzioni che generano θ.

Allora può avvenire che i determinanti dei coefficienti di dette sostituzioni si possano assumere come i moltiplicatori di un esponenziale nel senso di Appell **), e allora $\Delta(t, y)$ può essere un tale esponenziale o esser nullo.

Se i detti determinanti non si possono assumere come i moltiplicatori di un esponenziale, allora è senz'altro $\Delta(t, y) = 0$.

Diremo che siamo nel *1° o nel 2° caso* a seconda che $\Delta(t, y)$ è diverso da zero o è identicamente nullo.

Se si è nel 1° caso ed $E(z)$ è l'esponenziale a cui è uguale $\Delta(t, y)$, potremo porre

$$y = Y\sqrt{E(z)},$$
$$t = T\sqrt{E(z)},$$

e le nuove equazioni in Y e T a cui si riducono le date avranno ancora uno stesso gruppo.

---

*) Loco citato, pag. 168 e seguenti.

**) Loco citato, pag, 14. Caso speciale.

Inoltre è $\Delta(T, Y) = 1$.

Questo si chiamerà il *1° caso ridotto*. Noi penseremo che il 1° caso sia già ridotto e quindi che sia $\Delta(t, y) = 1$.

3. È manifestamente

$$t_i = \frac{\Delta(t, y')y_i - \Delta(t, y)y'_i}{\Delta(y, y')} \qquad (i = 1, 2)$$

e quindi nel secondo caso è

$$t_i = \frac{\Delta(t, y')}{\Delta(y, y')} y_i$$

e nel 1° caso ridotto

$$t_i = \frac{\Delta(t, y')y_i - y'_i}{\Delta(y, y')};$$

$\Delta(t, y')$ e $\Delta(y, y')$ sono due funzioni ai medesimi moltiplicatori (i loro moltiplicatori sono i già ricordati determinanti dei coefficienti delle sostituzioni generatrici di θ), i cui integrali sono regolari su R_{abc}; nel 1° caso ridotto sono più precisamente le derivate di due integrali abeliani di prima specie, le quali indicherò con φ e φ_1.

4. Supponendo di trovarci nel 1° caso ridotto poniamo

$$Y_i = y_i e^{-\int \varphi dz}, \qquad T_i = t_i e^{-\int \varphi dz}.$$

Abbiamo subito

$$\varphi_1 T_1 = - Y'_1.$$

Reciprocamente, osservando che

$$\Delta(t, y') - \Delta(y, t') = \frac{d}{dz}\Delta(t, y) = 0$$

ossia

$$\Delta(t, y') = \Delta(y, t')$$

e che

$$\Delta(y, t) = -\Delta(t, y) = -1,$$

si ha facilmente che, posto

$$\eta_i = y_i e^{\int \varphi dz}, \qquad \tau_i = t_i e^{\int \varphi dz}$$

è

$$\varphi_2 \eta_i = \tau'_i,$$

dove φ_2 indica pure una derivata di un integrale abeliano di prima specie e precisamente

$$\varphi_2 = \Delta(t, t').$$

Posto

$$\gamma = e^{-\int \varphi dz},$$

abbiamo

$$\tau_i = \frac{T_i}{\gamma^2} = -\frac{Y'_i}{\varphi_1 \gamma^2},$$

quindi derivando

$$\tau'_i = -\frac{Y''_i}{\varphi_1 \gamma^2} + \frac{Y'_i}{(\varphi_1 \gamma^2)^2}(\varphi_1 \gamma^2)',$$

e poichè

$$\tau'_i = \varphi_2 \eta_i = \varphi_2 \frac{Y_i}{\gamma^2},$$

viene subito, ricordando il significato di γ,

$$Y''_i - \left(\frac{\varphi'_1}{\varphi_1} - 2\varphi\right) Y'_i + \varphi_1 \varphi_2 Y_i = 0.$$

Dunque Y_1, Y_2 devono essere gli integrali dell'equazione

(1) $$Y'' - \left(\frac{\varphi'_1}{\varphi_1} - 2\varphi\right) Y' + \varphi_1 \varphi_2 Y = 0.$$

Che questa equazione nella Y e la corrispondente nella $T = -\frac{Y'}{\varphi_1}$ abbiano lo stesso gruppo è ben chiaro; ma si può vedere anche senza molta difficoltà che essa è un'equazione di Appell della prima specie e che nei punti nulli di φ_1 la derivata del suo integrale generale ha uno zero dello stesso ordine di φ_1 stesso.

Soltanto per dare un'idea di come ciò si possa vedere io mi fermerò a considerare un punto nullo di φ_1, che supporrò diverso da punti di diramazione e dai punti all'infinito.

Sia esso multiplo di ordine s. Dico che esso è un punto di regolarità dell'integrale generale di (1) ed uno zero s^{plo} della sua derivata.

Perciò osservo che per l'equazione (1) è, supposto che nel punto la variabile si annulli *),

(ω) $$f(z, \rho) = \rho(\rho - 1) + \rho(-s + R) + z^{s+2} R_1,$$

dove R ed R_1 sono funzioni regolari.

Le radici dell'equazione determinante sono 0 ed $s + 1$, quindi, perchè l'integrale generale di (1) sia regolare nel punto che si considera oc-

*) Adopero qui le notazioni che si trovano nella « *Theorie des linearen differentialgleichungen* » del Prof. Schlesinger, tomo I, pag. 156. Soltanto io vi sostituisco la variabile z alla x che ivi è adoperata.

corre e basta che

$$\begin{vmatrix} f_1^{(0)} & f_0^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_2^{(0)} & f_1^{(1)} & f_0^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_s^{(0)} & f_{s-1}^{(1)} & f_{s-2}^{(2)} & f_{s-3}^{(3)} & \dots & f_0^{(s)} \\ f_{s+1}^{(0)} & f_s^{(1)} & f_{s-1}^{(2)} & f_{s-2}^{(3)} & \dots & f_1^{(s)} \end{vmatrix} = 0 .$$

Questo è perchè dalla (ω) ne viene appunto

$$f_1^{(0)} = f_2^{(0)} = \dots = f_s^{(0)} = f_{s+1}^{(0)} = 0 .$$

Ma se

$$g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + \dots + g_m z^m + \dots$$

è lo sviluppo di un integrale appartenente alla radice 0, è

$$\begin{aligned} g_0 f_0^{(0)} &= 0 \\ g_0 f_1^{(0)} + g_1 f_0^{(1)} &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots &\dots\dots \\ g_0 f_{s+1}^{(0)} + g_1 f_s^{(1)} + \dots + g_s f_1^{(s)} &= 0, \end{aligned}$$

quindi deve essere

$$g_1 = g_2 = \dots = g_s = 0,$$

il che prova appunto che la derivata dell'integrale generale di (1) ha nel punto che si considera precisamente uno zero d'ordine s.

Analogamente si provano le altre proprietà richieste.

Giungiamo così alla conclusione che:

« Le equazioni del 1° caso sono tutte e solo quelle che si riducono « alla forma (1) moltiplicando la funzione incognita per un conveniente « esponenziale ».

5. Siano

$$A_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots m)$$

m equazioni di APPELL dell'n^{esimo} ordine aventi il medesimo gruppo θ, e siano

$$y_{i,1}, y_{i,2}, \dots y_{i,n} \qquad (i = 1, 2, \dots m)$$

i loro sistemi di integrali corrispondenti.

Noi diremo che queste equazioni sono *linearmente indipendenti* se non si possono trovare delle costanti $c_1, c_2, \dots c_m$ per cui esistano tutte le relazioni

$$\sum_{i=1}^{m} c_i y_{ik} = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots n).$$

Nel caso contrario si dice che quelle equazioni sono *linearmente dipendenti.*

Siano ora

$$A=0, \qquad B=0, \qquad C=0$$

tre equazioni di APPELL del 2° ordine e di 1ª specie aventi lo stesso gruppo ed

$$y_1 y_2, \qquad t_1 t_2, \qquad v_1 v_2$$

i tre sistemi di loro integrali corrispondenti. Supponiamo poi che sia

$$\Delta(t, y) \neq 0.$$

Io dico che *le tre suddette equazioni sono linearmente dipendenti.*

Infatti, moltiplicando gli integrali per un medesimo conveniente esponenziale posso fare in modo che i tre determinanti

$$\Delta(t, y), \qquad \Delta(t, v), \qquad \Delta(y, v)$$

diventino costanti. Resterà sempre $\Delta(t, y) \neq 0$.

Risulta subito

$$v_i = k_1 y_i + k_2 t_i \qquad (i = 1, 2),$$

dove k_1 e k_2 sono convenienti costanti che saranno contemporaneamente nulle se

$$\Delta(t, v) = \Delta(y, v) = 0.$$

Con ciò è provato il mio asserto.

6. Se la superficie R è di genere 1 allora su di essa vi è un solo integrale abeliano e quindi tutte le equazioni del 1° caso si riducono alla forma

$$Q(y) = y'' - \left(\frac{\varphi'}{\varphi} - 2\mu\varphi\right)y' + \nu^2\varphi^2 y = 0,$$

dove μ e ν sono costanti e φ è la derivata dell'unico integrale abeliano.

Posto

$$y' = \lambda\varphi y,$$

con λ costante, ho

$$Q(y) = (\lambda^2 + 2\mu\lambda + \nu^2)\varphi^2 y;$$

quindi sarà

$$Q(y) = 0$$

se

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \nu^2 = 0.$$

Se

$$\mu^2 \neq \nu^2,$$

la precedente equazione in λ ha due radici distinte λ_1, λ_2 e allora l'integrale generale di

$$Q(y) = 0$$

è dato da

$$c_1 e^{\lambda_1 \int \varphi d z} + c_2 e^{\lambda_2 \int \varphi d z}.$$

Se

$$\mu^2 = \nu^2,$$

allora l'equazione in λ ha tutte e due le radici uguali a $-\mu$.

Si trova senza difficoltà che l'integrale generale di

$$Q(y) = 0$$

è

$$c_1 e^{-\mu \int \varphi d z} + c_2 \int \varphi\, d z . e^{-\mu \int \varphi d z}.$$

Il caso del genere 1 presenta infine la particolarità che tutte le equazioni di Appell di 1ª specie appartengono al 1° caso.

Invero, se y è l'integrale generale di un'equazione di 1ª specie, anche $\frac{y'}{\varphi}$ è pure l'integrale di un'equazione di 1ª specie.

7. Ritornando ora al caso in cui il genere di R sia qualunque, supponiamo che le due equazioni

$$A = 0, \qquad B = 0,$$

di cui si è parlato al n° 2 si trovino nel 2° caso.

Allora

$$t_i = \lambda y_i \qquad (i = 1, 2),$$

$$\lambda = \frac{\Delta(t, y')}{\Delta(y, y')}.$$

Per la relazione evidente

$$\Delta(y, y') \Delta(t, t') = \Delta^2(t, y')$$

si ha che un polo r^{plo} di λ deve essere uno zero del $(2r)^{\text{esimo}}$ ordine almeno di $\Delta(y, y')$.

$\Delta(y, y')$ è una funzione a moltiplicatori il cui integrale è di 1ª specie, essa ha dunque $2p - 2$ zeri *).

$\Delta(y, y')$ non può avere perciò più di $p - 1$ zeri multipli, e quindi la funzione algebrica λ non può avere più di $p - 1$ poli.

Se i punti nulli multipli di $\Delta(y, y')$ sono zeri doppi, allora i poli di

*) Appell, loco citato, pag. 22.

λ sono semplici e poichè il loro numero è minore di p la λ è una funzione speciale, ossia esprimibile per il rapporto di due derivate di integrali abeliani di 1ª specie.

Ma non basta che un punto a sia uno zero doppio di $\Delta(y, y')$ perchè possa essere assunto come polo da λ. Per ciò occorre e basta che esso sia uno zero dell'integrale generale di $A = 0$ e quindi che

$$\frac{\Delta(y', y'')}{\Delta(y, y')} - \frac{2}{(z-a)^2} - \frac{\eta_a}{z-a},$$

dove η_a indica il valore nel punto a della derivata logaritmica di $\dfrac{\Delta(y, y')}{(x-a)_2}$, sia regolare nel punto a.

Siano $a_1, a_2, \ldots a_m$ $(m < p)$ i punti nulli doppi di $\Delta(y, y')$ che godono di questa proprietà.

Sia σ il loro *eccesso*.

Esisteranno

$$\rho = m - p + \tau$$

funzioni

$$\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_\rho$$

linearmente indipendenti (nel senso che nessuna loro combinazione lineare si riduca ad una costante) tali che i loro poli sieno tutti del 1° ordine e situati nei punti

$$a_1, a_2, \ldots a_m.$$

Ogni altra funzione che goda della stessa proprietà verrà data dalla espressione

$$c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \ldots + c_\rho\psi_\rho + c,$$

dove le $c, c_1, \ldots c_\rho$ sono delle costanti.

Vi saranno allora oltre ad $A = 0$ altre ρ equazioni di prima specie aventi il medesimo gruppo di $A = 0$ ed insieme con $A = 0$ formanti un sistema di $\rho + 1$ equazioni linearmente indipendenti.

8. Prendiamo sulla superficie R $p - 1$ punti $a_1, a_2, \ldots a_{p-1}$ e supponiamo che essi abbiano un eccesso τ.

Se questi punti saranno zeri dell'integrale generale di un'equazione di Appell del 2° ordine di 1ª specie $A = 0$ di cui y_1, y_2 è un sistema di integrali indipendenti, il determinante $\Delta(y, y')$ dovrà essere la derivata di un integrale di 1ª specie di una funzione a moltiplicatori i cui $2p - 2$ zeri coincidono a due a due nei punti $a_1, a_2, \ldots a_{p-1}$.

Se dunque φ è la derivata di un integrale abeliano di 1ª specie generico ed $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{p-1}$ sono i suoi $2p-2$ zeri, sarà

$$\Delta(y, y') = \varphi\, e^{\sum_{i=1}^{p-1} (\pi_{\alpha_i a_i} + \pi_{\beta_i a_i})} . E(z),$$

dove la funzione $E(z)$ è un conveniente esponenziale nel senso di APPELL e $\pi_{\alpha,\beta}$ è l'integrale abeliano normale di 3^a specie che diventa infinito ai punti α e β come $\log(z-\beta) - \log(z-\alpha)$.

Moltiplicando l'integrale generale di $A = 0$ per un conveniente esponenziale possiamo, volendo, anche ridurci ad avere

$$\Delta(y, y') = \varphi\, e^{\sum_{i=1}^{p-1} (\pi_{\alpha_i a_i} + \pi_{\beta_i a_i})} .$$

Consideriamo il rapporto

$$\omega = \frac{\Delta(y', y'')}{\Delta(y, y')} .$$

Abbiamo già osservato che

$$\omega - \frac{2}{(z-a_i)^2} - \frac{\eta_{a_i}}{z-a_i}$$

deve essere regolare nel punto $a_i (i = 1, 2, \ldots p-1)$.

Se φ_1, φ_2 sono due derivate di integrali abeliani di 1^a specie generici esse avranno i loro zeri in $4p-4$ punti $\alpha_{1i}, \alpha_{2i} (i = 1, 2, \ldots 2p-2)$ distinti fra loro e dai punti a_i, inoltre il prodotto $\varphi_1 \varphi_2$ si comporterà nei punti di diramazione di R e all'infinito come ω, e quindi il quoziente $\frac{\omega}{\varphi_1 \varphi_2}$ avrà dei poli del 1° ordine nei punti α_{1i}, α_{2i}, dei poli di 2° ordine nei punti a_i e negli altri punti sarà regolare.

Posto $\frac{2}{\varphi_1 \varphi_2} = \xi$, sarà

$$\frac{\omega}{\varphi_1 \varphi_2} = \sum_{i=1}^{p-1} \left\{ \xi(a_i) Z'_{a_i}(z) + \left[\xi'(a_i) + \frac{\xi(a_i)\eta_{a_i}}{2} \right] Z_{a_i}(z) \right\}$$
$$+ \sum_{\lambda=1}^{2p-2} \left[M_\lambda Z_{\alpha_{1,\lambda}}(z) + N_\lambda Z_{\alpha_{2,\lambda}}(z) \right] + C,$$

dove C, M_λ, N_λ sono convenienti costanti e Z_a, Z'_a sono i due integrali normali di 2^a specie che sono regolari su tutta la superficie R salvo che nel punto a dove si comportano come

$$\frac{1}{z-a} \quad \text{e} \quad \frac{1}{(z-a)^2}$$

rispettivamente.

L'equazione $A = 0$ avrà dunque la forma

$$(2) \qquad y'' - \frac{d \log}{d z}\left(\varphi e^{\sum_{i=1}^{p-1}(\pi_{\alpha_i a_i} + \pi_{\beta_i a_i})} E\right) y' + \varphi_1 \varphi_2 g(z) y = 0,$$

dove $g(z)$ indica una funzione algebrica che può porsi sotto la forma

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=1}^{p-1} \left\{ \xi(a_i) Z_{a_i}(z) + \left[\xi'(a_i) + \frac{\xi(a_i)\eta_{a_i}}{2} \right] Z_{a_i}(z) \right\} \\ & + \sum_{\lambda=1}^{2p-2} \left[M_\lambda Z_{\alpha_1,\lambda}(z) + N_\lambda Z_{\alpha_2,\lambda}(z) \right] + C. \end{aligned} \right.$$

9. Un'equazione (2) è proprio in generale un'equazione di Appell di 1^a specie. D'altra parte, se $p > 1$, scegliendo convenientemente le costanti M_k ed N_k si possono costruire effettivamente delle funzioni $g(z)$ del tipo (3). Si conclude che in generale esistono infinite equazioni di Appell di 1^a specie il cui integrale generale si annulla nei punti

$$a_1, a_2, \ldots a_{p-1}.$$

Se $\tau > 1$ è $\rho = \tau - 1 > 0$ e quindi per $\tau > 1$ tutte le equazioni (2) appartengono al 2° caso.

10. Si è già visto che nel caso ellittico non vi sono equazioni del 2° caso. Ciò è anche se il genere p è 2. Invero la $\Delta(y, y')$ è la derivata di un integrale di 1^a specie. Se non è del caso speciale (Appell, l. c., p. 25) di tali funzioni non ve ne ha più di una perchè $p - 1 = 1$. (Appell, l. c., p. 25, Théorème). Allora $\dfrac{\Delta(t, y')}{\Delta(y, y')}$ è costante e quindi $\lambda =$ costante (v. § 7).

A volere essere effettivamente nel 2° caso ciò non deve avvenire, quindi all'infuori di un esponenziale che si può togliere al solito modo è $\Delta(y, y')$ uguale alla derivata di un integrale abeliano di 1^a specie.

Ciò si può ripetere per $\Delta(t, y')$ e per $\Delta(t, t')$.

Poniamo

$$\Delta(y, y') = \varphi_1, \qquad \Delta(t, t') = \varphi_2, \qquad \Delta(t, y') = \varphi_3.$$

Per la relazione

$$\Delta(y, y')\Delta(t, t') = \Delta^2(t, y')$$

sarà

$$\varphi_1 \varphi_2 = \varphi_3^2.$$

Ora, essendo

$$\lambda = \frac{\varphi_3}{\varphi_1},$$

devono essere φ_1 e φ_3 indipendenti se non è $\lambda =$ cost. Allora sarà

$$\varphi_2 = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_3$$

con α e β costanti e quindi

$$\alpha + \beta\frac{\varphi_3}{\varphi_1} = \left(\frac{\varphi_3}{\varphi_1}\right)^2.$$

Da questa equazione risulta che $\frac{\varphi_3}{\varphi_1}$ deve essere ancora costante, ossia $\lambda =$ cost. e quindi possiamo concludere che proprio per $p = 2$ non ci sono equazioni del 2° caso.

Che di quelle che noi abbiamo imparato a costruire negli ultimi §§ non ce ne siano, si vede senz'altro notando che per $p = 2$ l'eccesso di 1 punto deve essere minore di 2.

11. Supponiamo che la superficie R sia iperellittica e sia definita dalla funzione algebrica

$$s = \sqrt{(z - b_1)(z - b_2)\ \dots\ (z - b_{2p+2})},$$

$b_1, b_2, \dots b_{2p+2}$ essendo $2p + 2$ valori distinti. Questa superficie è di genere p.

Siano $a_1, a_2, \dots a_{p-1}$ $p - 1$ punti posti su questa superficie. Il loro eccesso τ sarà uguale a $p - h$ se h è il massimo numero di punti che si possono prendere fra quei $p - 1$ in guisa che mai due di essi siano sovrapposti, ossia non siano due punti situati sui due fogli distinti della superficie iperellittica ma corrispondenti allo stesso valore di z. Se $\left[\frac{p}{2}\right]$ indica la parte intera di $\frac{p}{2}$ è $h \geqq \left[\frac{p}{2}\right]$ e quindi $\tau \leqq p - \left[\frac{p}{2}\right]$ ossia $\tau \leqq \left[\frac{p+1}{2}\right]$.

È $\tau = \left[\frac{p+1}{2}\right]$ se $h = \left[\frac{p}{2}\right]$. Allora dei $p - 1$ punti $a_1, a_2, \dots a_{p-1}$ ve ne sono $\left[\frac{p}{2}\right]$ distinti nel senso che due di essi non sono mai sovrapposti. Tali saranno per es. $a_1, a_2, \dots a_{\left[\frac{p}{2}\right]}$.

I restanti $\left[\frac{p-1}{2}\right]$ sono posti di faccia a $\left[\frac{p-1}{2}\right]$ di essi.

Se p è dispari è $\left[\frac{p}{2}\right] = \left[\frac{p-1}{2}\right] = \frac{p-1}{2}$ e allora perchè τ assuma il valore massimo i $p-1$ punti a_i dovranno essere a 2 a 2 sovrapposti.

Ora cerchiamo di costruire con un sistema di punti di quest'ultima specie, e quindi nel caso di p dispari, qualche equazione del tipo (2).

Si potrà prendere

$$\varphi = \frac{(z-a_1)^2(z-a_2)^2 \dots (z-a_{\frac{p-1}{2}})^2}{s}$$

ed $E=1$.

Inoltre si potrà fare

$$g(z) = \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{\xi(a_i)}{z-a_i} + \frac{\xi'(a_i) + \frac{\xi(a_i)\eta_{a_i}}{2}}{(z-a_i)^2} \right]$$

poichè il prodotto $\varphi_1 \varphi_2$ e quindi ξ è una funzione razionale ed è pure razionale la derivata logaritmica di $\frac{\Delta(y, y')}{(x-a_i)^2}$, il che porta che queste quantità assumono i medesimi valori in punti sovrapposti della superficie R.

Sono dunque equazioni del tipo (2) quelle della forma

$$(2') \qquad y'' - \left(2\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{z-a_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2p+2} \frac{1}{z-b_i} \right) y' + \frac{\psi(z)}{s^2} \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{\xi(a_i)}{z-a_i} + \frac{\xi'(a_i) + \frac{\xi(a_i)\eta_{a_i}}{2}}{(z-a_i)^2} \right] y,$$

dove $\psi(z)$ è un polinomio di grado $2p-2$ che non si annulli nei punti a_i,

$$\xi(z) = \frac{2s^2}{\psi(z)}$$

e

$$\eta_{a_i} = \left[\frac{d}{dz} \log \frac{(z-a_1)^2(z-a_2)^2 \dots (z-a_{i-1})^2(z-a_{i+1})^2 \dots (z-a_{\frac{p-1}{2}})^2}{s} \right]_{z=a_i}.$$

In particolare, per $p=3$ le equazioni (2') sono

$$y'' - \left(\frac{2}{z-a_1} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \frac{1}{z-b_i} \right) y' + \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \alpha_4 z^4}{\prod_{i=1}^{8}(z-b_i)} \left[\frac{\xi(a_1)}{z-a_1} + \frac{\xi'(a_i) + \frac{\xi(a_i)\eta_{a_i}}{2}}{(z-a_i)^2} \right] y = 0$$

con

$$\alpha_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_1^2 + \alpha_3 a_1^3 + \alpha_4 a_1^4 \neq 0.$$

Le equazioni (2′) sono equazioni il cui integrale generale è uniforme su R_{abc} e che hanno un gruppo tale che esistono

$$\rho + 1 = (p - 1) - p + \frac{p+1}{2} + 1 = \frac{p+1}{2}$$

equazioni di APPELL di 1ª specie che lo ammettono e che sono linearmente indipendenti.

Esse hanno inoltre la particolarità di essere a coefficienti razionali.

12. Nello sguardo da noi dato alle equazioni di APPELL di 2° ordine e di 1ª specie noi abbiamo potuto scoprire dei tipi speciali abbastanza caratteristici.

Con ciò non è fatto che un brevissimo passo nello studio accennato dall'APPELL.

La più immediata estensione degli studi fatti dell'illustre analista sulle funzioni a moltiplicatori è quella di considerare gli integrali delle soluzioni delle equazioni di APPELL di 2° ordine di 1ª e 2ª specie.

Uno dei migliori risultati sarebbe l'estensione a questi integrali delle relazioni trovate da APPELL fra i moduli di periodicità di due integrali a moltiplicatori inversi *), estensione che si otterrebbe sostituendo alle considerazioni di funzioni a moltiplicatori inversi quelle di equazioni a soluzioni contragredienti **). Io mi limito per ora ad accennare a questi risultati. Il loro sviluppo lo darò in altre Note.

Pisa, 20 maggio 1901.

G. VITALI.

*) APPELL, loco citato, pp. 35-42, 51-53, 56-57, 66-67.

**) v. SCHLESINGER, loco citato, t. II, 2ª parte, p. 409.