

Appendice au Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques (*).

(par H. J. S. SMITH, prof. à Oxford.)

NOTE I, p. 114.

DESCARTES, *Géométrie*, livre troisième (*Œuvres de DESCARTES*, ed. Cousin, vol. v, p. 409).

« Or, quand on est assuré que le problème proposé est solide, soit que l'équation par laquelle on le cherche monte au carré de carré, soit qu'elle ne monte que jusques au cube, on peut toujours en trouver la racine par l'une des trois sections coniques, laquelle que ce soit, ou même par quelque partie de l'une d'elles, tant petite qu'elle puisse être, en ne se servant au reste que de lignes droites et de cercles. Mais je me contenterai de donner une règle générale pour les trouver toutes par le moyen d'une parabole, à cause qu'elle est en quelque façon la plus simple. »

NOTE II, p. 114.

DE LA HIRE, *La construction des équations analytiques*, opusculé qui fait partie (pp. 297-452) des *Nouveaux éléments des sections coniques*, Paris, 1679. Le problème des normales d'une section conique sert à l'auteur pour exemple de la méthode algébrique générale.

(*) Voir à pag. 112-165 de ce tome, où se trouve en entier le Mémoire que l'Académie royale des sciences de Berlin a couronné en 1868, en lui décernant la moitié du prix fondé par STEINER. L'illustre Auteur y a ajouté plus tard l'*Appendice* que nous publions ici. Nous profitons de cette occasion pour lui adresser nos remerciemens de ce qu'il a bien voulu choisir notre journal pour donner publicité à son excellent travail, qui est un admirable essai de géométrie moderne.

LES ÉDITEURS.

MACLAURIN, *Treatise of Algebra*, London, 1748, pag. 352.

JOACHIMSTHAL, *Journal de Crelle*, vol. xxvi, p. 172, vol. xlviii, p. 377. Voici la critique que fait JOACHIMSTHAL de la solution qui lui est propre, et de celle qu'il attribue à DE LA HIRE.

« On sait que chaque problème qui depend d'une équation du quatrième degré, se résout par la règle et le compas, en supposant une seule section conique complètement décrite. C'est sur ce principe que repose la solution du problème en question, due à DE LA HIRE. Tandis que le géomètre grec qui a traité le premier cette question, APOLLONIUS de Perge, se sert, outre la conique donnée, d'une hyperbole équilatère, DE LA HIRE ne fait usage que d'une circonférence de cercle, dont les intersections avec la courbe ont, à un facteur près, les mêmes abscisses que les pieds des normales. Mais cette méthode offre plusieurs inconvénients qu'il est bon de signaler. En premier lieu, telle que DE LA HIRE l'a représentée, sa méthode n'est qu'un résultat de calcul, et ne se rattache à aucune proposition de géométrie; ensuite le choix de l'inconnue comporte nécessairement une ambiguïté, et, en dernier lieu, les formules qui déterminent la position et le rayon de la circonférence sont trop compliquées pour se prêter aisément aux constructions graphiques. On adressera peut-être, et à juste titre, ce dernier reproche également à la nouvelle solution qu'on va lire; et néanmoins je n'hésite pas à la publier; car, quoiqu'elle ne soit pas encore une solution définitive, les propositions si simples sur lesquelles elle repose, pourront servir de point de départ pour arriver à une solution purement géométrique du problème dont il s'agit. »

La solution, dont parle ici JOACHIMSTHAL, est due non pas à DE LA HIRE, mais à M. E. CATALAN. Il est vrai que M. CATALAN ne parle que d'une reproduction avec quelques simplifications de la solution ancienne (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, per MM. Terquem et Gerono, vol. vii, p. 332); mais il est parvenu à une solution qui est entièrement différente de celle de DE LA HIRE, et qui nous a paru plus élégante, et surtout plus naturelle. Nous n'avons pas cherché l'interprétation géométrique des formules analytiques un peu compliquées dont s'est servi DE LA HIRE; mais nous sommes parvenus à traiter par les méthodes de la géométrie pure la solution de M. CATALAN, aussi bien que celle de JOACHIMSTHAL (Voir la note VIII.)

NOTE III, p. 118.

Soient $p_1 p_2, q_1 q_2$ deux couples de l'involution qui détermine une dyade donnée $\lambda_1 \lambda_2$; nous dirons que cette dyade est représentée par $[p_1 p_2, q_1 q_2]$. Soit encore $[x_1 x_2, y_1 y_2]$ une représentation d'une seconde dyade $\mu_1 \mu_2$; et supposons que l'équation anharmonique

$$[p_1, p_2, q_1, q_2] = [x_1, x_2, y_1, y_2]$$

soit satisfaite. Cette équation entraîne nécessairement l'une ou l'autre des deux équations suivantes

$$[p_1, p_2, q_1, q_2, \lambda_1, \lambda_2] = [x_1, x_2, y_1, y_2, \mu_1, \mu_2],$$

$$[p_1, p_2, q_1, q_2, \lambda_2, \lambda_1] = [x_1, x_2, y_1, y_2, \mu_1, \mu_2];$$

mais il importe d'observer que ces équations ne sauraient avoir lieu toutes les deux ensemble. Selon que la première ou la seconde équation est satisfaite, nous dirons que les éléments imaginaires $\lambda_1 \lambda_2, \mu_1 \mu_2$, ou bien les éléments imaginaires $\lambda_2 \lambda_1, \mu_1 \mu_2$, sont représentés homographiquement par les systèmes $[p_1 p_2, q_1 q_2], [x_1 x_2, y_1 y_2]$. D'après la définition que nous avons donnée de l'homologie des dyades, il est évident que lorsqu'on connaît l'homologie de deux dyades, on connaît en même temps deux représentations homographiques des éléments homologues de ces dyades. Et, réciproquement, il résulte de la solution du problème fondamental de l'article II, que l'on peut trouver linéairement le centre ou l'axe d'homologie de deux dyades de même espèce, dont les axes ou les centres ne sont pas coïncidents, lorsqu'on connaît deux représentations homographiques des éléments imaginaires qu'on veut regarder comme homologues dans ces deux dyades. De plus, on verra ci-après qu'en désignant par $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2$, trois dyades quelconques, on peut déterminer linéairement deux représentations homographiques de $b_1 b_2, c_1 c_2$, lorsqu'on connaît deux représentations homographiques de $a_1 a_2, b_1 b_2$, et deux représentations homographiques de $a_1 a_2, c_1 c_2$. D'après cela, on peut se servir des représentations homographiques pour définir l'homologie des dyades, en disant que l'homologie de deux dyades est donnée, lorsqu'on connaît une représentation homographique de ces dyades. Cette manière de définir l'homologie des dyades a le double avantage de ne pas exiger l'emploi de dyades auxiliaires, ni dans le cas de deux dyades dont les axes ou les centres sont coïncidents, ni dans le

cas de deux dyades d'espèce différente, et de se prêter facilement à la théorie des dyades de droites qui ne se rencontrent pas dans l'espace.

Ce que nous venons de dire se rattache immédiatement à la belle théorie des imaginaires, qui a formé l'objet principal des savantes recherches de l'auteur de la *Géométrie de Situation* (*). Nous croyons faire plaisir aux lecteurs de l'ouvrage de cet excellent géomètre, en ajoutant les observations suivantes, qui feront voir combien nous nous sommes peu éloignés de la route qu'il a tracée.

(1.) Étant donné deux représentations homographiques

$$[p_1 p_2, q_1 q_2], [x_1 x_2, y_1 y_2]$$

des éléments imaginaires $\lambda_1 \lambda_2, \mu_1 \mu_2$, et une autre représentation quelconque $[r_1 r_2, s_1 s_2]$ de la première de ces deux dyades; on pourra déterminer linéairement les éléments $u_1 u_2, v_1 v_2$, qui satisfont à l'équation anharmonique

$$[x_1 x_2, y_1 y_2, u_1 u_2, v_1 v_2] = [p_1 p_2, q_1 q_2, r_1 r_2, s_1 s_2],$$

et on aura ainsi une nouvelle représentation $[u_1 u_2, v_1 v_2]$ des éléments $\mu_1 \mu_2$, qui sera homographique à la représentation $[r_1 r_2, s_1 s_2]$ des éléments $\lambda_1 \lambda_2$. Soient donc $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2$ trois dyades quelconques données; $[A], [B]$ deux représentations homographiques des éléments $a_1 a_2, b_1 b_2$; $[A_1], [C_1]$ deux représentations homographiques des éléments $a_1 a_2, c_1 c_2$. On déterminera une représentation $[C]$ des éléments $c_1 c_2$ qui soit homographique à la représentation $[A]$ des éléments $a_1 a_2$; et on aura ainsi deux représentations homographiques $[B], [C]$, des éléments $b_1 b_2, c_1 c_2$.

(2.) Étant donné une représentation $[p_1 p_2, q_1 q_2]$ d'une dyade $\lambda_1 \lambda_2$, et un troisième couple quelconque $r_1 r_2$ de l'involution qui détermine cette dyade, il existe toujours un quatrième couple de cette même involution, qui satisfait à l'équation anharmonique

$$[p_1, p_2, q_1, q_2, \lambda_1, \lambda_2] = [r_1, r_2, s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2].$$

On trouve linéairement ce quatrième couple en prenant pour $s_1 s_2$ les éléments conjugués à $p_2 p_1$ dans l'involution déterminée par $q_1 r_2, q_2 r_1$. On peut donc trouver une infinité de représentations des éléments imaginaires $\lambda_1 \lambda_2$, homographiques à une représentation donnée.

(3.) Il convient d'attribuer un signe algébrique déterminé à chaque repré-

(*) STAUDT, *Beiträge zur Geometrie der Lage* (Nurnberg 1856).

sensation d'une dyade; ainsi nous dirons que la représentation $[p_1 p_2, q_1 q_2]$ de la dyade $\lambda_1 \lambda_2$ est positive ou négative, selon que le sens du mouvement continu indiqué par $p_1 q_1 p_2$ est positif ou négatif. Il s'ensuit de là que deux représentations homographiques d'une même dyade ont le même signe, ou des signes contraires, selon que les éléments imaginaires se correspondent directement ou réciproquement dans les deux représentations. En effet, en désignant par $[p_1 p_2, q_1 q_2]$, $[r_1 r_2, s_1 s_2]$ deux représentations homographiques de la dyade $\lambda_1 \lambda_2$, on a, dans le premier de ces deux cas, l'équation anharmonique

$$[p_1, p_2, q_1, q_2, \lambda_1, \lambda_2] = [r_1, r_2, s_1, s_2, \lambda_1, \lambda_2];$$

d'où il s'ensuit que le sens indiqué par $p_1 q_1 p_2$ est le même que le sens indiquée par $r_1 s_1 r_2$, puisque deux éléments correspondants, qui parcourent deux divisions homographiques, dont les éléments doubles sont imaginaires, se mouvent toujours dans le même sens. Donc, en ce premier cas, les deux représentations sont de même signe; tandis que dans le second cas, on aura l'équation

$$[p_1, p_2, q_1, q_2, \lambda_1, \lambda_2] = [r_1, r_2, s_1, s_2, \lambda_2, \lambda_1],$$

ou, ce qui est la même chose, l'équation

$$[p_1, p_2, q_1, q_2, \lambda_1, \lambda_2] = [s_1, s_2, r_1, r_2, \lambda_1, \lambda_2].$$

Cette équation implique que le sens indiqué par $p_1 q_1 p_2$ coïncide avec le sens indiqué par $s_1 r_1 s_2$; d'où l'on conclura que les deux sens indiqués par $p_1 q_1 p_2$ et $r_1 s_1 r_2$ sont opposés, c'est à dire, que les deux représentations $[p_1 p_2, q_1 q_2]$, $[r_1 r_2, s_1 s_2]$ sont de signes contraires.

(4.) Etant donné deux systèmes géométriques, dont chacun consiste d'une série d'éléments simplement infinie, et dont l'un dépend linéairement de l'autre, à chacun des deux sens qu'on peut attribuer à la succession des éléments dans le premier, il correspondra un sens déterminé dans l'autre. C'est ainsi qu'en rattachant chacun des deux éléments d'une même dyade à l'un des deux sens opposés que l'on peut concevoir dans le système géométrique auquel cette dyade appartient, de manière à établir une distinction fictive entre les deux éléments de la dyade, on établit en même temps une distinction correspondante entre les deux éléments d'une dyade quelconque linéairement dérivée de la première; puisque les éléments homologues des deux dyades peuvent être censés appartenir aux sens correspondants dans les deux systèmes dont elles font partie.

Comme exemple très particulier de cette remarque générale, considérons deux dyades de points $\lambda_1 \lambda_2, \mu_1 \mu_2$ ayant le même axe LM . Soient $[p_1 p_2, q_1 q_2], [x_1 x_2, y_1 y_2]$ deux représentations homographiques des éléments imaginaires $\lambda_1 \lambda_2, \mu_1 \mu_2$. Puisque ces deux représentations peuvent être de même signe ou de signes contraires, et puisque la correspondance des éléments imaginaires est différente dans les deux cas, on voit très clairement dans ce cas particulier, qu'en considérant les deux sens opposés dans lesquels un point peut décrire une droite, on arrive à distinguer *a priori*, non pas entre les deux éléments d'une même dyade (ce qui serait absurde), mais entre les deux manières d'établir l'homologie de deux dyades. D'ailleurs on peut observer que, dans ce même cas particulier, il y a une autre distinction très marquée entre les deux manières d'établir l'homologie des dyades données. En effet, si les deux représentations homographiques données des éléments $\lambda_1 \lambda_2, \mu_1 \mu_2$ sont de même signe, les points doubles de l'involution $(\lambda_1 \mu_1, \lambda_2 \mu_2)$ seront imaginaires, et les points doubles de l'involution $(\lambda_1 \mu_2, \lambda_2 \mu_1)$ seront réels, tandis que, dans le cas contraire, les points doubles de la première involution seront réels, et ceux de la seconde seront imaginaires. Pour démontrer cette assertion, prenons un point quelconque sur la circonférence d'une conique, et de ce point, comme centre de projection, projetons les points de la droite LM sur la courbe. Pour plus de simplicité, nous désignerons les projections de ces points par les mêmes lettres que les points eux mêmes. Les dyades $\lambda_1 \lambda_2, \mu_1 \mu_2$ considérées sur la conique, donnent lieu à deux centres d'homologie, dont l'un est intérieur, et l'autre extérieur à la courbe. Soit Ω le centre intérieur, et menons les cordes $x_1 \Omega \xi_1, y_2 \Omega \xi_2, y_1 \Omega \eta_1, y_2 \Omega \eta_2$; $[\xi_1 \xi_2, \eta_1 \eta_2]$ sera une représentation de la dyade $\lambda_1 \lambda_2$, homographique à la représentation $[p_1 p_2, q_1 q_2]$ de cette même dyade, et aussi à la représentation $[x_1 x_2, y_1 y_2]$ de la dyade $\mu_1 \mu_2$; de plus, le sens de $\xi_1 \eta_1 \xi_2$ est le même que le sens de $x_1 y_1 x_2$, puisque Ω est un point intérieur. Donc la représentation $[\xi_1 \xi_2, \eta_1 \eta_2]$ comporte le même signe que la représentation $[p_1 p_2, q_1 q_2]$, ou le signe contraire, selon que les deux représentations $[x_1 x_2, y_1 y_2], [p_1 p_2, q_1 q_2]$ sont de même signe, ou de signes contraires. Par conséquent $[\xi_1 \xi_2, \eta_1 \eta_2]$ et $[x_1 x_2, y_1 y_2]$ sont deux représentations homographiques des éléments $\lambda_1 \lambda_2, \mu_1 \mu_2$ dans le premier cas, et des éléments $\lambda_2 \lambda_1, \mu_1 \mu_2$ dans le second. Mais cela revient à dire que Ω est le point d'intersection des cordes imaginaires $\lambda_1 \mu_1, \lambda_2 \mu_2$ dans le premier cas, et des cordes $\lambda_1 \mu_2, \lambda_2 \mu_1$ dans le second. Et de là, en revenant des points de la conique à ceux de la droite, on conclut immédiatement la vérité de la proposition qu'il fallait démontrer.

NOTE IV, p. 119.

Les deux solutions que nous avons données de ce problème ne diffèrent pas essentiellement, puisque la droite, lieu des points d'intersection des couples de tangentes que l'on considère dans la première solution, est en même temps l'axe des deux divisions homographiques que l'on obtient en échangeant entre eux sur l'une des droites B, C , les deux points de chaque couple de l'involution qui détermine la dyade sur cette droite. La solution suivante, peu différente d'ailleurs des autres, nous paraît aussi simple qu'on peut le désirer.

En se servant des centres d'homologie donnés on obtient deux représentations homographiques $[\beta_1 \beta_2, \beta'_1 \beta'_2]$, $[\gamma_1 \gamma_2, \gamma'_1 \gamma'_2]$ des éléments imaginaires $b_1 b_2, c_1 c_2$; puis on détermine les axes des quatre systèmes homographiques que voici,

$$[\beta_1, \beta_2, \beta'_1 \beta'_2] = [\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma_1, \gamma_2]$$

$$[\beta_1, \beta_2, \alpha'_1 \beta'_2] = [\gamma'_2, \gamma'_1, \gamma_2, \gamma_1]$$

$$[\beta_1, \beta_2, \beta'_1 \beta'_2] = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma'_1, \gamma'_2]$$

$$[\beta_1, \beta_2, \beta'_1 \beta'_2] = [\gamma_2, \gamma_1, \gamma'_2, \gamma'_1]$$

Les deux premières de ces droites se croisent au point P ; les deux dernières au point P' . Si le premier ou le second système devient homologique, le centre d'homologie est le point P' ; pareillement, si le troisième ou le quatrième système devient homologique, le centre d'homologie est le point P .

On peut encore remarquer que si les dyades $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2$ appartiennent à une même section conique, les six systèmes de trois points, $P'QR, P'Q'R', PQR, PQR', PQR', P'Q'R$, seront chacun en ligne droite.

NOTE V, p. 124.

Supposons seulement que l'axe d'homologie A de $a_1 a_2, \alpha_1 \alpha_2$ soit donné. Faisons passer une conique réelle Σ par $P \Pi$, et par la dyade de points déterminée par $a_1 a_2$, ou $\alpha_1 \alpha_2$, sur l'axe A . Soient $k_1 k_2, \kappa_1 \kappa_2$ les dyades de points déterminées sur Σ par les dyades données $b_1 b_2, \beta_1 \beta_2$. L'axe A passera par l'intersection des droites imaginaires conjuguées $k_1 \kappa_2, \kappa_2 k_1$; ce qui suffit pour faire voir qu'on peut distinguer linéairement entre les deux centres

d'homologie de $k_1 k_2, \kappa_1 \kappa_2$, et pourtant entre les deux axes d'homologie de $b_1 b_2, \beta_1 \beta_2$. La construction est entièrement linéaire, puisque pour déterminer les dyades $k_1 k_2, \kappa_1 \kappa_2$ il n'est pas nécessaire de tracer la conique Σ .

NOTE VI, p. 129.

La détermination de la dyade $\pi_1 \pi_2$ ne présente aucune difficulté théorique. Soit $[x_1 x_2, y_1 y_2]$ une représentation donnée de la dyade $p_1 p_2$; σ une conique qui passe par cette dyade. D'un point quelconque réel de σ projetons sur cette conique l'involution déterminée par les coniques du faisceau $[c_1, c_2, d_1, d_2]$ sur l'axe de $p_1 p_2$. Soit π le pôle de l'involution qu'on aura ainsi sur la conique σ . Aux quatre rayons $\pi \cdot [x_1, x_2, y_1, y_2]$ il correspondra anharmoniquement quatre coniques du faisceau. Soient $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ les points de la conique auxiliaire C qui correspondent anharmoniquement à ces quatre coniques; $[\xi_1 \xi_2, \eta_1 \eta_2]$ sera une représentation de la dyade $\pi_1 \pi_2$, et cette représentation sera homographique à la représentation donnée $[x_1 x_2, y_1 y_2]$ de la dyade $p_1 p_2$.

NOTE VII, p. 135.

Toute conique du réseau circonscrit qui passe par Γ rencontre la droite Δ en deux points harmoniquement conjugués par rapport à la conique cherchée. De même, les deux tangentes menées du point Γ à une conique du réseau inscrit, qui est tangente à la droite Δ , sont deux droites conjuguées par rapport à cette même conique du réseau harmonique. On peut donc trouver très simplement l'involution que détermine cette conique, soit au point Γ , soit sur la droite Δ ; et, d'après ce que nous avons dit dans l'article précédent, cela suffit pour déterminer le système polaire de la courbe.

Les expressions 'ellipse *minima* circonscrite' 'ellipse *maxima* inscrite' dont nous nous sommes servis dans cet article, sont relatives au cas d'un triangle harmonique réel. Lorsque ce triangle est imaginaire, les coniques polaires du centre des distances moyennes, et de la droite à l'infini, sont toutes les deux des hyperboles.

NOTE VIII, p. 146.

Soient X, Y les projections orthogonales de P sur les axes $A_1 A_2, B_1 B_2$ respectivement; ST la tangente à Γ au point S . Menons la corde ss' perpendiculaire à $A_1 A_2$. D'après la définition de Γ , ST est le diamètre de Σ conjugué aux cordes perpendiculaires à SP . Donc ST est parallèle à $A_2 s$; de plus, puisque l'hyperbole Γ est équilatère, les droites bissectrices de l'angle CST sont parallèles aux asymptotes de la courbe; donc SC est parallèle à $A_2 s'$. On voit en même temps que SC est le diamètre de Σ conjugué aux cordes perpendiculaires à XY , puisque XY et SP font des angles égaux avec les axes de Σ . Mais la droite XY passe elle même par C , puisqu'elle est une des diagonales du quadrilatère $SP\alpha\beta$, inscrit à Γ . Donc C est le point d'intersection de XY avec le diamètre de Σ conjugué aux cordes perpendiculaires à XY , ou, si l'on veut, avec le diamètre parallèle à $A_2 s'$; et la polaire de C par rapport à Σ est la perpendiculaire abaissée du pôle de XY sur cette droite elle même. Ces déterminations nous seront utiles plus tard.

Puisque nous tenons à faire voir que la solution de JOACHIMSTHAL ne conduit pas à des opérations impraticables à cause de leur longueur, nous indiquerons ici la manière de les effectuer, qui nous paraît la plus simple. On supposera connus les axes et l'un des foyers H de la conique centrale Σ ; on prendra pour $A_1 A_2$ l'axe focal. En se servant d'un équerre, on menera la corde $A_1 s$ perpendiculaire à PS , la corde $A_2 p$ perpendiculaire à $A_1 s$, la corde ss' perpendiculaire à $A_1 A_2$; enfin, la normale et la tangente à Σ au point s (on sait que cela peut se faire très simplement avec l'équerre). Soit μ le point d'intersection de l'axe focal avec la normale; σ, η les projections orthogonales de S, H sur la tangente, Y la projection orthogonale de P sur l'axe conjugué, Y_1 le point de ce même axe pour lequel l'angle YHY_1 est droit; enfin, $A_1 p_1$ étant menée perpendiculaire à PY_1 , soit y le point d'intersection des cordes pp_1, sB , et θ la projection orthogonale de y sur ss' . Le centre ω du cercle de JOACHIMSTHAL sera le point d'intersection des droites $\theta\mu, S\sigma$; le rayon de ce cercle sera $\omega\eta$. On décrira le cercle, et on joindra les points d'intersection des deux courbes au point A_1 par des cordes $A_1 x$: les normales issues du point P seront perpendiculaires à ces cordes, et leurs pieds se trouveront sur les diamètres de Σ parallèles aux cordes $A_2 x$. D'après ce que nous avons dit, on vérifiera facilement les détails de cette construction, dans laquelle on n'aura besoin du compas qu'au moment où l'on veut tracer

le cercle Ω . En effet, puisque D se transforme en α , et C en β , les axes principaux de la conique transformée Σ' sont les droites qui correspondent au diamètre de Σ qui passe par C , et à la polaire de C . L'un de ces deux axes est ss' ; c'est celui qui correspond à SC ; l'autre est $y\theta$, puisque y correspond au point Y_1 , qui se trouve sur la polaire de C . Donc θ est le centre de Σ' ; et, puisque la perpendiculaire abaissée de θ sur sa polaire par rapport à Σ doit passer par ω , et aussi par μ , la construction du point ω se trouve justifiée.

On remarquera qu'en général, étant donné un point quelconque Z , pour en trouver le point correspondant dans la figure transformée, on mènera les cordes A_1p_1 , A_2s_1 , dont la première est perpendiculaire à PZ , et la seconde est parallèle à SZ ; les cordes ss_1 , pp_1 se croiseront au point z . Et, en effet, c'est ainsi que nous avons déterminé les points f et y , correspondant aux points F et Y_1 , dans les constructions précédentes.

La solution analytique du problème qui nous occupe, donnée il y a presque deux cents ans par DE LA HIRE, a été l'objet de recherches intéressantes par M. E. CATALAN (Nouvelles Annales de Mathématiques par MM. Terquem et Gerono, Vol. VII, p. 332 et 396, année 1848). Nous allons voir que la solution de M. CATALAN, aussi bien que celle de JOACHIMSTHAL, se déduit naturellement de la méthode dont nous nous sommes servis.

Soient $n_1n_2n_3n_4$ les pieds des normales abaissées de P sur Σ ; à ces quatre points M. CATALAN substitue quatre autres $n'_1n'_2n'_3n'_4$, qui sont les points d'intersection de Σ par une circonférence de cercle, et dont les abscisses, mesurées du centre de Σ sur l'un des deux axes, sont proportionnelles aux abscisses de $n_1n_2n_3n_4$ (*). Soient toujours A_1A_2 , B_1B_2 les axes de Σ ; α , β les points à l'infini sur ces axes respectivement; en supposant que A_1A_2 soit l'axe des abscisses, on aura l'équation anharmonique

$$\beta \cdot [\alpha, S, n_1, n_2, n_3, n_4] = \beta \cdot [\alpha, S, n'_1, n'_2, n'_3, n'_4]. \quad (A)$$

Qu'on transforme la figure de manière qu'aux points n de la figure donnée

(*) Dans la solution plus compliquée de DE LA HIRE ce sont les ordonnées des points n' qu'on fait proportionnelles aux abscisses des points n . De plus, au lieu du centre de la conique, on prend pour origine un point tel que les sommes des ordonnées des points n' , et des abscisses des points n , s'évanouissent séparément. On voit qu'il en doit résulter une construction géométrique entièrement différente de celle que nous allons déduire de l'analyse de M. CATALAN. D'ailleurs, nous avons reconnu que la solution de DE LA HIRE ne s'applique pas au cas où il y aurait quatre normales réelles: mais, malgré cet inconvénient, cette solution nous paraît mériter une étude plus approfondie.

correspondent les points n' de la nouvelle figure. Puisque les points $\beta, n_1, n_2, n_3, n_4$ appartiennent à la conique Γ , on conclut de l'équation (A), que β appartiendra à Γ' , la transformée de Γ . Or, Γ' ne peut être qu'une parabole, dont l'axe est parallèle à $B_1 B_2$. Car le faisceau (Γ', Σ) , dont les points n' forment la base, contient par hypothèse un cercle; donc $\alpha\beta$ sont les points doubles de l'involution que ce faisceau détermine sur la ligne droite à l'infini, et la conique du faisceau, qui passe par β , y touche cette droite. Cela posé, il s'ensuit de l'équation (A) que le point β de Γ' correspond au point α de Γ ; donc α se transforme en β , et l'asymptote $C\alpha$ devient la droite à l'infini $\alpha\beta$. Soient a, b les projections de C sur les axes $A_1 A_2, B_1 B_2$; a se transformant en β , b se transforme en α , puisque $ab, \beta\alpha$ sont des points réciproques par rapport aux faisceaux $(\Sigma, \Gamma), (\Sigma, \Gamma')$, respectivement. De plus, d'après l'équation (A), le point S doit se transformer en un point S' situé sur βS ; donc $A_1 A_2$, ou $S\alpha$, se transforme en $S'\beta$, ou $B_1 B_2$. Soit Σ_1 la conique du faisceau (Σ, Γ) qui se transforme en Σ ; il faut que pour cette conique les droites $\alpha S, \alpha C$ soient des droites conjuguées. Cette condition détermine Σ_1 sans ambiguïté, puisque, des deux coniques du faisceau (Σ, Γ) qui y satisfont, l'une est Γ , qui ne se transforme pas en Σ . En désignant par $X_1 Y_1$ les points d'intersection des axes de Σ avec la polaire de C , soient c, x les points placés symétriquement à C, X_1 , par rapport à l'axe B_1, B_2 , y le point placé symétriquement à Y_1 par rapport à l'axe $A_1 A_2$. La conique du faisceau (Σ, Γ) pour laquelle C est le pôle de xy ne peut être autre que Σ_1 . Car la polaire de c par rapport à Γ est l'axe $A_1 A_2$, puisque Sc est tangent à Γ au point S ; et la polaire de c par rapport à Σ doit passer par x , à cause de la situation symétrique des points CX_1, cx ; donc c, x sont des points réciproques par rapport au faisceau (Σ, Γ) , et la conique de ce faisceau par rapport à laquelle C est pôle de xy , aura Cc , ou $C\alpha$, pour polaire de x ; c'est à dire que $\alpha S, \alpha C$ seront des droites conjuguées par rapport à cette conique. Il résulte de là que $\alpha b x$ sera un triangle harmonique par rapport à Σ_1 , et que pour satisfaire à toutes les conditions du problème, il suffira de transformer Σ_1 en Σ , de manière que le triangle $\alpha b x$ devienne le triangle $\beta \alpha S$. Soit (1°) Σ un ellipse; les involutions déterminées par le faisceau (Σ, Γ) sur les axes de Σ ont évidemment des points doubles imaginaires; donc toute conique du faisceau rencontre ces droites en deux points réels. Soient $\lambda_1 \lambda_2$ les points d'intersection de Σ_1 avec $A_1 A_2$; x sera le point milieu du segment $\lambda_1 \lambda_2$; mais S , qui est le centre de l'involution, se trouvera aussi sur ce même segment; donc les droites $b S, b x$ seront

situées dans le même angle formé par les droites $b\lambda_1, b\lambda_2$, tangentes Σ_1 en λ_1, λ_2 . Mais l'axe bS rencontre Σ_1 en deux points réels; donc aussi bx rencontre Σ_1 en deux points réels $\nu_1\nu_2$. D'ailleurs, les points $\lambda_1\lambda_2, \nu_1\nu_2$ sont quatre points harmoniques de Σ_1 ; donc en transformant homographiquement ν_1, ν_2 en A_1, A_2 , et λ_1, λ_2 en B_1, B_2 (ce qui peut se faire par une quelconque de quatre transformations différentes), on transformera Σ_1 en Σ , αbx en $\beta \alpha S$, Γ en une parabole ayant son axe parallèle à B_1B_2 , et, enfin, les quatre points n en quatre points n' situés sur la circonférence d'un cercle et satisfaisant à l'équation (A). Quelque soit l'axe qu'on a choisi pour A_1A_2 , ce sera toujours la même conique Σ_1 qui se transformera en Σ ; puisque la définition que nous avons trouvée pour Σ_1 est symétrique par rapport aux deux axes. Et l'on peut ajouter que dans les quatre transformations, relatives à un même axe, ce sera toujours la même conique qui se transformera en un cercle, et que les quatre cercles résultants, ainsi que les quatre paraboles Γ' , seront placés symétriquement par rapport aux axes principaux de Σ . Si (2°) Σ est une hyperbole, on voit d'abord qu'il faudra prendre pour A_1A_2 l'axe qui ne rencontre pas la courbe. Car si les sommets A_1A_2 étaient réels, les points $\lambda_1\lambda_2$ seraient réels, comme dans le cas de l'ellipse, et il faudrait transformer deux points réels $\lambda_1\lambda_2$ en deux points imaginaires B_1B_2 . On doit donc supposer que les sommets A_1A_2 sont imaginaires; en ce cas, on aura à transformer les points $\lambda_1\lambda_2$ en deux points réels B_1B_2 , mais, pour que les points $\lambda_1\lambda_2$ restent eux mêmes réels, il faudra que Sx^2 soit plus grand que $-SA^2$. Qu'on mène des perpendiculaires aux asymptotes de Σ par les points où ces droites rencontrent la tangente à l'un des sommets B_1, B_2 ; et qu'ensuite par les points d'intersection de ces perpendiculaires avec l'axe conjugué on mène des parallèles à l'axe focal. La condition ci-dessus revient à dire que le point P doit être compris entre les deux parallèles qu'on a tracées. D'ailleurs, cette limitation de la méthode de M. CATALAN résulte clairement des formules analytiques dont il l'a fait dépendre. Lorsque la condition de possibilité est satisfaite, les angles $\lambda_1b\lambda_2, Sb\lambda_2$ empiètent l'un sur l'autre; mais l'axe bS rencontre la conique Σ_1 en deux points réels; donc bx ne la rencontre pas, et $b\alpha$ la coupe en deux points réels $\mu_1\mu_2$. En faisant correspondre $\lambda_1\lambda_2$ à B_1B_2 , et $\mu_1\mu_2$ aux deux points à l'infini sur les asymptotes de Σ , on aura quatre transformations différentes, dont chacune pourra servir pour la solution du problème.

Lorsqu'on veut faire usage de cette méthode, on commencera par la détermination de C , et de la polaire de ce point par rapport à Σ ; on aura

ainsi les points a, b, c, x . Pour avoir les points $\lambda_1 \lambda_2$, on projetera du point B_1 sur l'axe $A_1 A_2$ les deux extrémités du diamètre de Σ conjugué à la corde $B_1 x$. De même, si Σ est une ellipse, on trouvera $\phi_1 \phi_2$, les deux points d'intersection de $B_1 B_2$ avec Σ_1 , en projetant du point A_1 sur $B_1 B_2$ les extrémités du diamètre parallèle à $A_1 b$. En faisant correspondre λ_1 à B_1 , λ_2 à B_2 , on prendra sur $B_1 B_2$ les points a', S' , qui satisfont à l'équation anharmonique $[\alpha, \lambda_1, \lambda_2, a, S] = [\beta, B_1, B_2, a', S']$, et l'on menera par S' une parallèle à $A_1 A_2$. Cette parallèle correspond à $B_1 B_2$; elle rencontre Σ en deux points réels $\phi'_1 \phi'_2$, correspondant à $\phi_1 \phi_2$. On fixera à volonté la correspondance de $\phi'_1 \phi'_2, \phi_1 \phi_2$, et on prendra le point β' qui satisfait à l'équation $[S, \phi_1, \phi_2, \beta] = [S', \phi'_1, \phi'_2, \beta']$, et qui, par conséquent, correspond à β . Le point C' , correspondant à C , est évidemment le point à l'infini sur la droite $a' \beta'$; donc D' , qui correspond à D , et qui est le point réciproque de C' par rapport au faisceau (Σ, Γ') , se trouve à l'intersection de $\beta' \beta$ avec le diamètre de Σ conjugué à $a' \beta'$. Du point D' abaissons sur $a' \beta'$ une perpendiculaire; soit ω le point d'intersection de cette perpendiculaire avec une droite $S\omega$, qui fait avec l'un des axes principaux le même angle que la perpendiculaire, mais de l'autre côté de cet axe. Le cercle, dont ω est le centre, et qui coupe orthogonalement le cercle dont $a' \beta'$ est le diamètre, appartient au faisceau transformé. C'est ce qu'on vérifie en observant que $c\alpha, a\beta, CD$ sont des couples de points réciproques par rapport au faisceau (Σ, Γ) , et qu'en désignant par c' le point à l'infini harmoniquement conjugué à C' par rapport à $a\beta$, les points correspondants $c'S, a'\beta', C'D'$, sont également des couples de points réciproques par rapport au faisceau (Σ, Γ') .

Pour avoir le rapport des abscisses des points n' aux abscisses des points correspondants n , projetons P sur les deux axes. En désignant, comme nous avons fait plus haut, ces projections par X, Y , prenons Y' le point correspondant à Y ; le rapport cherché sera celui de $S'Y'$ à SX .

Avant de terminer cette longue note, nous indiquerons une troisième méthode, qui ne s'applique pas à l'hyperbole, mais qui conduit à une solution assez simple pour le cas de l'ellipse. Soient $a_1 a_2, b_1 b_2$ les diamètres conjugués égaux de l'ellipse Σ . Qu'on transforme la courbe en elle même, de manière que, la ligne à l'infini restant la même, les axes $A_1 A_2, B_1 B_2$ deviennent les diamètres égaux $a_1 a_2, b_1 b_2$. C'est ce qu'on peut faire par quatre transformations différentes, en supposant, pour abréger, qu'on échange entre eux les points à l'infini de la courbe. Mais quelle soit la transformation qu'on choisit, le faisceau, qui correspond au faisceau (Σ, Γ) , contiendra un

cercle, puisque les points doubles de l'involution que ce faisceau déterminera sur la ligne droite à l'infini, seront les points rectangulaires $\alpha\beta$. Soient donc a_1a_2, b_1b_2 les points qui correspondent à A_1A_2, B_1B_2 respectivement: et soit X un point donné de la courbe. On trouvera le point correspondant x en menant la corde Xx parallèle à A_1a_1 ; on aura ainsi le diamètre Sx correspondant au diamètre SX ; de plus, la droite qui joint deux points correspondants de ces diamètres sera parallèle à Xx ; donc on pourra trouver très facilement, dans l'une des deux figures, le point correspondant à un point donné de l'autre. Soient toujours a, b les projections orthogonales de C sur les axes A_1A_2, B_1B_2 respectivement, a', b' les points correspondants dans la nouvelle figure. Qu'on abaisse de a', b' des perpendiculaires sur b_1b_2, a_1a_2 respectivement; le point de concours de ces droites sera le centre ω du cercle Ω qu'on cherche. Avec le rayon Sa_1 , décrivons un cercle concentrique à Σ ; soit d_1d_2 le diamètre de ce cercle qui fait un angle droit avec $S\omega$; les points d_1, d_2 appartiendront à la circonférence de Ω . On tire cette dernière conclusion d'un théorème qui n'est qu'un cas particulier d'un autre plus général, mais qui vaut le peine d'être énoncé:

'Toute hyperbole, ayant ses asymptotes parallèles à Sa_1, Sb_1 , et passant par S , détermine par ses intersections avec Σ une circonférence de cercle, qui coupe orthogonalement le cercle imaginaire, dont S est le centre, et $-Sa_1^2$ le carré du rayon.'

On peut encore remarquer que la somme des angles excentriques de deux points correspondants x et X est égale à un multiple impair de $\frac{\pi}{4}$. Cela vérifie que les points correspondants aux pieds des normales appartiennent à une même circonférence.

NOTE IX, p. 150.

La théorie des correspondances (1), (2), (3), a été étudiée par M. BATTAGLINI, dans un excellent Mémoire ('*Sulle forme binarie dei primi quattro gradi, appartenenti ad una forma ternaria quadratica*,' *Giornale di Matematiche*, vol. v. p. 39), qui, malheureusement, nous était encore inconnu, lorsque nous écrivions l'article précédent. Cependant, nous placerons ici quelques remarques additionnelles, qui ne sont pas sans intérêt pour les constructions graphiques.

La théorie géométrique de la correspondance (2) peut être présentée de la manière suivante. Soient (A) et (B) deux systèmes corrélatifs dans le plan d'une conique donnée Σ ; et soient X et Y les coniques qui correspondent dans les systèmes A et B à la conique Σ , considérée comme appartenant aux systèmes B et A respectivement. Soit Θ la conique des pôles des deux systèmes corrélatifs, c'est à dire, la conique lieu des points qui se trouvent sur leurs droites corrélatives; de même soit Θ' la conique des polaires, ou la conique enveloppe des droites qui passent par leurs points corrélatifs. En considérant un point quelconque y de Σ comme appartenant au second système, la droite corrélative rencontrera Σ en deux points x , qui seront liés au point y , par une équation de la forme (2). D'après cela, on aura les théorèmes suivants qui donnent immédiatement la solution des problèmes biquadratiques dépendant de la correspondance (2).

(1.) Les points d'intersection de X et Σ sont les quatre points x pour lesquels il y a coïncidence des points y correspondants: et les quatre points de contact avec Σ des tangentes communes à Y et Σ sont les points y , qui sont devenus coïncidents. La corrélation des deux systèmes (A) et (B) fera connaître l'un des deux systèmes de quatre points lorsqu'on aura trouvé l'autre. Pareillement, les points d'intersection de Y et Σ , et les points de contact avec Σ des tangentes communes à X et Σ , sont respectivement les points y dont les correspondants coïncident, et les points coïncidents eux mêmes

(2.) Les quatre points d'intersection de Θ et Σ sont des points de coïncidence d'un point x avec l'un des points correspondants y , et les tangentes menées à Θ' de l'un quelconque θ de ces quatre points (tangentes dont l'une est aussi tangente à X , et l'autre à Y), rencontrent la conique Σ en deux points, qui sont les points correspondants à θ , autres que θ lui-même.

On remarquera qu'une seule construction biquadratique suffit pour trouver, soit les points $x_1 x_2$, soit les points $y_1 y_2$, qui deviennent coïncidents, soit enfin les points qui correspondent à ces points coïncidents dans chacun des deux systèmes; puisque, ayant trouvé les points d'intersection de deux coniques, on n'a besoin que d'une construction quadratique pour trouver leurs tangentes communes. Mais, pour trouver les points x , qui coïncident avec un de leurs points correspondants y , il faut une construction biquadratique nouvelle.

Le problème linéaire 'Étant donné huit points x , et un point y correspondant à chacun de ces points, trouver la droite $y_1 y_2$ correspondante à un

point quelconque x' peut s'énoncer plus généralement de la manière suivante, 'Étant donné huit points dans l'une de deux figures corrélatives, et huit autres points situés respectivement sur les droites corrélatives des premiers points, déterminer la corrélation des deux figures.' Or, c'est de ce problème que dépend (ainsi que l'ont fait voir MM. SEYDEWITZ et SCHRÖTER) la construction de la surface du second ordre qui passe par neuf points donnés. On en trouvera la solution complète dans le Mémoire de M. SCHRÖTER (Journal de Crelle-Borchardt, vol. lxii. p. 215).

Si l'équation (2) est symétrique, les coniques X et Y coïncident, de même que les coniques Θ et Θ' , et les deux systèmes (A) et (B) deviennent polaires réciproques par rapport à Θ ou Θ' . En ce cas particulier la solution du problème linéaire est tout-à-fait élémentaire.

En passant maintenant à la correspondance cubique, définie par l'équation (3), supposons que $yy'y''$ soient les trois points correspondants à un même point x , $YY'Y''$ le triangle des tangentes à Σ en ces trois points. L'axe d'homologie des triangles $yy'y''$, $YY'Y''$ enveloppera une section conique C_1 ; pareillement, le lieu du centre d'homologie de ces deux triangles sera une seconde conique C_2 , polaire réciproque de C_1 par rapport à Σ . Soit, de plus, σ la conique inscrite aux triangles $yy'y''$, Ω la conique par rapport à laquelle ces mêmes triangles sont harmoniques, de sorte que Ω est une des coniques réciproquantes de Σ et σ . Les trois coniques Ω , C_2 , Σ ont les mêmes points d'intersection; ces points sont en même temps les points de contact avec Σ des tangentes communes aux trois courbes σ , C_1 , Σ ; de plus, la tangente à Ω en un quelconque de ces points rencontre Σ , pour la seconde fois, en un des points d'intersection de Σ avec σ , et y est tangente à cette dernière conique. Les points de coïncidence de deux des points y , qui correspondent à un même point x , sont évidemment les points de contact avec Σ des tangents communes à Σ et σ ; d'où l'on voit que, pour trouver ces points, il suffit de connaître l'une quelconque des quatre coniques auxiliaires C_1 , C_2 , σ , Ω . Les axes d'homologie des triangles $yy'y''$ et $YY'Y''$, considérés comme des tangentes à C_1 , et les centres d'homologie de ces mêmes triangles, considérés comme des points de C_2 , correspondent anharmoniquement soit aux triangles $yy'y''$, soit aux points x ; cette observation servira pour déterminer les points x qui correspondent aux quatre triangles évanescentiels que nous venons de trouver. La détermination des points x , qui coïncident avec un des points correspondants y , se fait un peu différemment. Soient P , Q deux points quelconques de Σ , P' un point qui n'appartient

pas à cette conique. Les coniques du faisceau (P, P', y, y', y'') correspondront anharmoniquement aux points x ; par conséquent, le lieu géométrique des intersections des droites Qx et des coniques correspondantes (P, P', y, y', y'') sera une courbe cubique, qui passera par les points P et Q , et qui, en outre, rencontrera Σ en quatre points, qui sont ceux qu'on cherche. On les déterminera en se servant de la construction biquadratique indiquée par M. CHASLES.

Comme vérification des résultats précédents, nous ajouterons quelques unes des principales formules analytiques qui se rattachent à la théorie des correspondances (2) et (3). Soient p, q, r les coordonnées homogènes d'un point quelconque du plan que l'on considère; on prendra l'équation $pr - q^2 = 0$ pour l'équation de la conique Σ , et on représentera par $\theta_1^2, \theta_1 \theta_2, \theta_2^2$ les coordonnées d'un point quelconque θ de cette conique. Les deux systèmes corrélatifs, dont dépend la correspondance (2), seront définis par l'équation

$$p_1(A_1p_2 + 2B_1q_2 + C_1r_2) + 2q_1(A_2p_2 + 2B_2q_2 + C_2r_2) \\ + r(A_3p_2 + 2B_3q_2 + C_3r_2) = 0;$$

et en mettant dans cette équation les coordonnées du point θ , soit pour $p_1q_1r_1$, soit pour $p_2q_2r_2$, on aura l'équation, soit de la droite $\eta_1\eta_2$, soit de la droite $\xi_1\xi_2$. Donc l'équation de la conique X , enveloppe de $\xi_1\xi_2$, sera

$$(A_1p + 2A_2q + A_3r)(C_1p + 2C_2q + C_3r) = (B_1p + 2B_2q + B_3r)^2;$$

et, pareillement, l'équation de Y , enveloppe de $\eta_1\eta_2$, sera

$$(A_1p + 2B_1q + C_1r)(A_3p + 2B_3q + C_3r) = (A_2p + 2B_2q + C_2r)^2.$$

Enfin, on aura pour la conique des pôles l'équation

$$\Theta = A_1p^2 + 4B_2q^2 + C_3r^2 + 2(C_2 + B_3)qr + (A_3 + C_1)pr + 2(B_1 + A_2)pq = 0,$$

et pour la conique des polaires l'équation

$$\Theta' = 4\Delta\Theta - \Phi^2 = 0,$$

en désignant par Δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix},$$

et par Φ la fonction linéaire

$$p[A_2C_1 - A_1C_2 - A_3B_1 + A_1B_3] + 2q[A_2B_3 - A_3B_2 - B_1C_2 + B_2C_1] \\ + r[B_3C_1 - B_1C_3 - A_3C_2 + A_2C_3].$$

Passons à la correspondance (3). Soit toujours $\Sigma = pr - q^2 = 0$ l'équation de la conique Σ , et désignons par P, Q, R, S, T, U les déterminants du système

$$\begin{array}{cccc} A_1, & B_1, & C_1, & D_1 \\ A_2, & B_2, & C_2, & D_2, \end{array}$$

pris dans leur ordre naturel, et par

$$\begin{array}{ccc} a_1, & b_1, & c_1, \\ a_{12}, & b_{12}, & c_{12}, \\ a_2, & b_2, & c_2, \end{array}$$

les neuf quantités

$$\begin{array}{l} A_1C_1 - B_1^2, \quad A_1D_1 - B_1C_1, \quad B_1D_1 - C_1^2, \\ A_1C_2 - 2B_1B_2 + A_2C_1, \quad A_1D_2 + A_2D_1 - B_1C_2 - B_2C_1, \quad B_1D_2 - 2C_1C_2 + B_2D_1, \\ A_2C_2 - B_2^2, \quad A_2D_2 - B_2C_2, \quad B_2D_2 - C_2^2. \end{array}$$

Soient, de plus,

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1^2, & \lambda_1\lambda_2, & \lambda_2^2 \\ \mu_1^2, & \mu_1\mu_2, & \mu_2^2, \end{array}$$

les coordonnées de deux des trois points y qui correspondent à un même point x . En éliminant x_1 et x_2 , et divisant par $3(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)$, on aura l'équation suivante:

$$\begin{aligned} & P\lambda_1^2\mu_1^2 + Q(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)\lambda_1\mu_1 + \frac{1}{3}R(\lambda_1^2\mu_2^2 + \lambda_2^2\mu_1^2) \\ & + (3S + \frac{1}{3}R)\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2 + T(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)\lambda_2\mu_2 \\ & + U\lambda_2^2\mu_2^2 = 0, \end{aligned}$$

qui est celle d'une correspondance quadratique double. Cette correspondance est évidemment symétrique; elle est aussi triangulaire, puisque, la fonction

$$K = PU + RS - QT$$

étant identiquement zéro, la conique enveloppe de la droite qui joint les deux points λ correspondants à un point μ donné, c'est à dire la conique

$$\sigma = 4\left(\frac{1}{3}Rp + Tq + Ur\right)(Pp + Qq + \frac{1}{3}Rr) - \{Qp + (3S + \frac{1}{3}R)q + Tr\}^2 = 0,$$

ne diffère pas de la conique enveloppe de la droite qui joint le point μ à l'un ou l'autre des deux points correspondants λ ; en effet, on trouve pour l'équation de cette dernière conique $\sigma - 4K\Sigma = 0$.

Cela posé, la conique σ est la conique inscrite à tous les triangles du système; et

$$\Omega = Pp^2 + (3S + \frac{1}{3}R)q^2 + Ur^2 + 2Tqr + \frac{2}{3}Rpr + 2Qpq = 0$$

est l'équation de la conique par rapport à laquelle ces mêmes triangles sont des triangles harmoniques. L'équation

$$x_1^2(a_1y_1^2 + b_1y_1y_2 + c_1y_2^2) + x_1x_2(a_{12}y_1^2 + b_{12}y_1y_2 + c_{12}y_2^2) + x_2^2(a_2y_1^2 + b_2y_1y_2 + c_2y_2^2) = 0$$

exprime la correspondance doublement quadratique, mais non symétrique, qui a lieu entre un point donné x et les deux points covariants du triangle correspondant. Donc l'équation de la conique C_1 , enveloppe de la corde qui joint ces deux points, sera

$$C_1 = 4(a_1p + b_1q + c_1r)(a_2p + b_2q + c_2r) - (a_{12}p + b_{12}q + c_{12}r)^2 = 0;$$

et on aura l'expression suivante pour l'équation de la conique C_2 , polaire réciproque de C_1 par rapport à Σ ,

$$\begin{vmatrix} r, a_{12}, a_2 \\ -2q, b_{12}, b_2 \\ p, c_{12}, c_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} r, a_{12}, a_1 \\ -2q, b_{12}, b_1 \\ p, c_{12}, c_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r, a_1, a_2 \\ -2q, b_1, b_2 \\ p, c_1, c_2 \end{vmatrix}^2 = 0.$$

Chaque terme de cette dernière équation est divisible par le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_{12}, & b_{12}, & c_{12} \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix};$$

en supprimant ce facteur constant, on a l'expression plus simple:

$$C_2 = 3\Omega + (R - 3S)\Sigma = 0.$$

Les fonctions D et $R - 3S$ sont très connues; l'évanescence de la première implique que les axes d'homologie des triangles $y y' y''$, $Y Y' Y''$ passent tous par un même point, et que le système contient un triangle dont les trois sommets se confondent en un seul; l'évanescence de la seconde exprime que deux triangles quelconques du système sont harmoniquement conjugués l'un à l'autre, et que, par conséquent, le système donné coïncide avec le système harmonique correspondant. (Voir le Mémoire de M. BARTAGLINI, p. 44-49.)

NOTE X, p. 156.

Si les sept points $1, \dots 7$, appartiennent tous à une même conique, la détermination de la cubique $(9, \dots 16)$ ne réussit pas. En effet, dans ce cas, le point biquadratiquement opposé au système $(1, \dots 7, \alpha)$ est le point α lui-même; ou, plus exactement, il n'y a aucun point biquadratiquement opposé à ce système, puisqu'il n'y a aucune courbe biquadratique passant par les treize points, et ayant $(1, \dots 7, \alpha)$ pour base de courbes cubiques génératrices. Il faudra donc, dans cette hypothèse particulière, éviter de faire usage de la cubique $(9, \dots 16)$, ce qui sera toujours possible.

Si les dix points $1, \dots 10$ appartiennent à une même cubique, la détermination de la cubique $(9, \dots 16)$ devient illusoire, et doit être remplacée par une autre, puisque, dans ce cas, les trois systèmes de points $(p_8, 9, 10)$, $(p_9, 10, 8)$, $(p_{10}, 8, 9)$, sont respectivement en ligne droite; d'où il résulte que l'équation anharmonique

$$p_8 \cdot [x, 11, 9, 10] \times p_9 \cdot [x, 11, 10, 8] \times p_{10} \cdot [x, 11, 8, 9] = +1$$

devient identique quel que soit le point x , et ne peut servir à définir aucun lieu géométrique. La même chose arriverait si les droites $p_9 p_{10}$, $p_{10} p_8$, $p_8 p_9$ passaient par les points $8, 9, 10$ respectivement. Pour éviter cet inconvénient, on prendra arbitrairement les points $8, 9$, et on déterminera les points p_8 , p_9 avant de choisir le point 10 . La droite $p_8 p_9$ peut bien passer par un des points $10, \dots 13$, mais elle ne peut pas passer par deux de ces points α, β , puisqu'il s'ensuivrait de cette supposition que les neuf points $1, \dots 7, \alpha, \beta$ forment la base d'un faisceau de courbes cubiques, ou bien que les onze points $1, \dots 9, \alpha, \beta$ appartiennent à une même cubique. Il y aura donc au

moins trois des points 10, ... 13, qui ne se trouvent pas sur la droite $p_8 p_9$; de plus, de ces trois points il y aura au moins deux qui ne peuvent pas appartenir à la cubique (1, ... 9); on prendra à volonté l'un ou l'autre pour le point 10.

Il correspond une analyse très simple à la démonstration géométrique du théorème de cet article. Soient (a, b) , (a, b, c, d, e) , ..., les fonctions algébriques qui, égalées à zéro, donnent les équations de la droite (a, b) , de la conique (a, b, c, d, e) , ... et ainsi de suite. En désignant par λ une constante indéterminée, les courbes cubiques du faisceau

$$(1, \dots 8, 9) = \lambda(1, \dots 8, 10);$$

correspondent anharmoniquement aux droites

$$(p_8, 9) = \lambda(p_8, 10);$$

et puisque les fonctions $(P_8, 9)$, $(p_8, 9)$, ..., qui entrent dans ces équations, peuvent être multipliées par des constantes quelconques, on peut faire en sorte que la droite $(p_8, 11)$ corresponde à la cubique $(P_8, 11)$. Cela posé,

$$(1, \dots 7, 8, 9)(p_8, 10) = (1, \dots 7, 8, 10)(p_8, 9) \quad (a)$$

sera l'équation d'une courbe biquadratique qui passe par le point p_8 et par les treize points donnés. Pareillement, les courbes biquadratiques

$$(1, \dots 7, 9, 10)(p_9, 8) = (1, \dots 7, 9, 8)(p_9, 10), \quad (b)$$

$$(1, \dots 7, 10, 8)(p_{10}, 9) = (1, \dots 7, 10, 9)(p_{10}, 8) \quad (c)$$

passeront par les mêmes treize points, et par les points p_9 , p_{10} , respectivement. En multipliant ces trois équations, membre à membre, et divisant par le produit

$$(1, \dots 7, 8, 9)(1, \dots 7, 9, 10)(1, \dots 7, 10, 8)$$

on aura l'équation cubique

$$(p_8, 10)(p_9, 8)(p_{10}, 9) = (p_8, 9)(p_9, 10)(p_{10}, 8). \quad (d)$$

Il résulte du choix que nous avons fait du point 10, que les deux membres de cette équation ne peuvent pas être identiques, à moins que le triangle $p_8 p_9 p_{10}$ ne coïncide avec le triangle 8, 9, 10. Mais, en supposant toujours que les sept points 1, ... 7 n'appartiennent pas tous à une même conique, on remarquera que, si cette coïncidence a lieu, les courbes biqua-

dratiques (a) , (b) , (c) doivent avoir des points doubles aux points 8, 9, 10 respectivement; c'est à dire, que les trois points cherchés coïncident avec ces mêmes points, et que toutes les courbes biquadratiques qui passent par les treize points ont en ces trois points des tangentes communes, dont on trouve facilement la direction, en se servant des courbes (a) , (b) , (c) . En revenant donc au cas général, l'équation (d) sera l'équation d'une courbe cubique, qui passe évidemment par les six points 8, 9, 10, p_8 , p_9 , p_{10} et par les trois points d'intersection de $(p_8, 10)$, $(p_{10}, 8)$, $(p_8, 9)$; $(p_{10}, 9)$, $(p_9, 10)$. Mais cette courbe passe aussi par les points 11, ... 16. Soit ξ un de ces points; la chose est évidente, si ξ n'appartient à aucune des courbes cubiques

$$(1, \dots 7, 8, 9), (1, \dots 7, 9, 10), (1, \dots 7, 10, 8);$$

ensuite, si ξ appartient à une seulement de ces courbes, par exemple à la première, ξ sera le point d'intersection de $(p_9, 8)$ et $(p_8, 9)$, et ne cessera point d'appartenir à (d) ; enfin, si ξ appartient à la fois à deux des mêmes courbes cubiques (ce qui par hypothèse ne peut pas arriver, à moins que ξ ne soit un des trois points inconnus), ξ sera le neuvième point appartenant à une base cubique donnée, et pourra être déterminé linéairement, sans qu'il soit nécessaire de chercher la cubique (d) .

Il est assez remarquable que la solution que nous avons donnée du problème de cet article, s'applique aussi à cet autre problème plus général:

'Étant donné $4n-3$ des $4n$ points d'intersection d'une courbe d'ordre n avec une courbe biquadratique, trouver les trois autres points.' On suppose $n > 4$.

Prenons $4n-8$ des $4n-3$ points donnés; ajoutons-y

$$\frac{(n-1)(n+2)}{1 \cdot 2} - 1 - (4n-8)$$

points choisis arbitrairement, et considérons l'ensemble des $\frac{(n-1)(n+2)}{1 \cdot 2} - 1$ points comme déterminant la base P_{4n-8} d'un faisceau de courbes d'ordre $n-1$. En considérant cette base par rapport aux cinq points $4n-7$, $4n-6$, $4n-5$, $4n-4$, $4n-3$, on aura un point *opposé* p_{4n-8} , qui sera le centre d'un faisceau de droites correspondant anharmoniquement aux courbes du faisceau P_{4n-9} . Le lieu des intersections des lignes correspondantes des deux faisceaux sera une courbe de l'ordre n , qui passera par les $4n-3$

points donnés, et, par conséquent, par les trois points cherchés. En permutant cycliquement les points $4n-8$, $4n-7$, $4n-6$, (sans changer autrement la base des courbes de l'ordre $n-1$), on aura deux autres courbes de l'ordre n passant, comme la première, par les $4n$ points. De là en suivant, soit notre démonstration géométrique, soit l'analyse précédente, on conclura que la courbe cubique des neuf points $4n-8, \dots, 4n$ passe aussi par les points opposés p_{4n-8}, p_{4n-7} etc..., et par les points d'intersection tels que celui des droites $(p_{4n-8}, 4n-7)$ et $(p_{4n-7}, 4n-8)$. On voit donc que tout se réduit à la détermination des points opposés, détermination qui sera facile, lorsqu'on connaîtra les rapports anharmoniques des faisceaux

$$P_{4n-8} \cdot [4n-7, 4n-6, 4n-5, 4n-4, 4n-3].$$

Or, il n'est pas douteux, qu'étant donné des points en nombre suffisant pour déterminer une courbe géométrique d'ordre n , on ne puisse trouver linéairement, soit la tangente à cette courbe en un point donné, soit la droite polaire d'un point donné par rapport à la courbe; mais, puisqu'il paraît qu'on n'a pas encore cherché la solution de ce problème général de géométrie linéaire, nous ferons voir qu'on peut s'en passer ici, en se servant d'une méthode particulière qui se présente naturellement. Considérons les points $1, \dots, 8$, comme déterminant la base A d'un faisceau de courbes cubiques. Soit (a) la conique qui satisfait à l'équation

$$(9, 10, 11, 12) = A \cdot [9, 10, 11, 12].$$

En prenant successivement différents points a de cette conique pour des points opposés à la base A , on aura un faisceau de courbes biquadratiques, correspondant anharmoniquement aux points a . Soit B la base du faisceau biquadratique; il est évident, qu'étant donné un point quelconque x , on pourra trouver linéairement le point a correspondant à la courbe (B, x) . Déterminons la conique (b) qui satisfait à l'équation

$$(13, 14, 15, 16) = B \cdot [13, 14, 15, 16].$$

Prenons un point quelconque b de (b) ; nous le considérons comme un point opposé à la base biquadratique B ; et nous aurons de la sorte un faisceau de courbes du cinquième ordre qui correspondront anharmoniquement aux points b . Soit C la base de ce nouveau faisceau; pour trouver linéairement le point b qui correspond à une courbe quelconque (C, x) du

faisceau, on détermine sur la conique (b) le point x' qui satisfait à l'équation anharmonique

$$[13, 14, 15, 16, x'] = B \cdot [13, 14, 15, 16, x];$$

le point b est le second point d'intersection de la conique par la droite xx' . Après avoir déterminé une troisième conique (c), qui satisfait à l'équation

$$(17, 18, 19, 20) = C \cdot [17, 18, 19, 20],$$

on sera conduit à considérer une base D de courbes du sixième ordre; et, en continuant de la sorte, on arrivera enfin à une base M de courbes de l'ordre $n-1$; cette base comprendra tous les points $1, 2, 3, \dots, 4n-8$, puisque chaque base de la série ascendante comprend évidemment tous les points de la base précédente; de plus, les courbes du faisceau M correspondront anharmoniquement aux points d'une certaine conique (l) passant par les points $4n-11, 4n-10, 4n-9, 4n-8$; de sorte qu'étant donné un point quelconque x , on pourra trouver linéairement le point l de cette conique qui correspond à la courbe (M, x). Enfin, on déterminera la conique (m) qui satisfait à l'équation

$$(4n-7, 4n-6, 4n-5, 4n-4) = M \cdot (4n-7, 4n-6, 4n-5, 4n-4),$$

et le point m'_{4n-3} de cette dernière conique qui correspond à la courbe ($M, 4n-3$); le second point d'intersection de la conique (m) avec la droite $(4n-3, m'_{4n-3})$ sera le point p_{4n-8} , qu'il s'agissait de trouver.

On peut dire que cette construction est composée de transformations homographiques successives. On commence par déterminer la conique Γ qui satisfait à l'équation

$$[5, 6, 7, 8] = (1, 2, 3, 4) \cdot [5, 6, 7, 8].$$

Soit $\nu'[\nu=9, \dots, 4n-3]$ le point de cette conique qui corresponde anharmoniquement à la conique $(1, 2, 3, 4, \nu)$: le second point d'intersection de la droite (ν, ν') avec Γ est le point ω_ν de Γ qui correspond anharmoniquement à la cubique (A, ν) . On transforme homographiquement la figure de manière que les points $\omega_9, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{12}$ deviennent les points $9, 10, 11, 12$; la transformée de Γ sera (α); soit $\alpha'_\nu[\nu=13, \dots, 4n-3]$ le point de cette dernière conique qui correspond au point ω_ν de la conique Γ ; le second point d'intersection de la droite (ν, α'_ν) avec (α) sera le point a_ν , qui correspond anharmoniquement à la courbe biquadratique (B, ν) . On transforme encore la

figure de manière que les points $a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}$ deviennent les points 13, 14, 15, 16; on détermine la conique (b) correspondant à (a) , et le point b'_ν [$\nu=17 \dots 4n-3$], correspondant à a_ν ; on mene la droite (ν, b'_ν) , qui détermine le point b_ν , correspondant anharmoniquement à la courbe (C, ν) ; et en continuant cette série uniforme d'opérations linéaires on parvient enfin à déterminer le point m_{4n-3} de la conique (m) , qui n'est autre que le point opposé p_{4n-3} .
