Die Bedeutung „reduzierter" orthogonaler Koordinatensysteme für die Tensoranalysis und die spezielle Relativitätstheorie.

Von **Paul Gruner** in Bern.

Mit drei Abbildungen. (Eingegangen am 12. Juni 1922.)

Die in der vorangehenden Arbeit angegebenen Methoden lassen sich von einem allgemeineren Standpunkt aus behandeln.

Ein Vektor $\overrightarrow{OP} = \mathfrak{r}$ soll in einer Ebene auf eine beliebige Schar zweidimensionaler, schiefwinkliger Parallelkoordinatensysteme ($X_1\,O\,X_2$, $X_1'\,O'\,X_2' \ldots$ Fig. 1), die durch denselben Anfangspunkt O gehen, bezogen werden.

Irgend ein orthogonales System $R_1\,O\,R_2$ werde willkürlich festgelegt durch 2 orthogonale Einheitsvektoren $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ vom gleichen Betrag:

$$|\mathfrak{k}_1| = |\mathfrak{k}_2| = +\frac{1}{\sqrt{K}}.$$

Dieses System nenne man das universelle System der betrachteten Schar und bezeichne die Koordinaten:

$$O\,Q_1 = r_1 = \varrho_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{K}} \quad \text{und} \quad O\,Q_2 = r_2 = \varrho_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{K}}$$

als die universellen Koordinaten von P, bzw. die universellen Komponenten von $\mathfrak{r}$.

Die übrigen Koordinatensysteme können durch beliebige Drehungen der Achsen um Winkel ψ, $\psi' \ldots$, χ, $\chi' \ldots$ und entsprechende Änderungen ihrer Öffnungswinkel erhalten werden; sie werden durch Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}^1$, $\mathfrak{e}^2 \ldots$ bestimmt, die im allgemeinsten Fall beliebig gewählt werden können. Hier aber wollen wir sie der einschränkenden Bedingung unterwerfen, daß sie durch jeweilige Parallelprojektion der universellen Einheitsvektoren $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ entstehen. Z. B. für ein System $X_1\,O\,X_2$ (Fig. 1), dessen Achsen um die Winkel χ und ψ gegen die Achsen des universellen Systems gedreht sind (die Wahl des positiven Sinnes der Drehungen χ und ψ ist ein für allemal willkürlich festzusetzen), entstehen die Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$, so daß

$$|\mathfrak{e}_1| = \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{\sin(90+\chi)}{\sin(90-\chi-\psi)} = \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{\cos\chi}{\cos(\chi+\psi)}, \quad |\mathfrak{e}_2| = \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{\cos\psi}{\cos(\chi+\psi)}. \tag{1}$$

Es werden dann die Parallelkoordinaten von P: $O\,S^1 = \xi^1\,|\mathfrak{e}_1|$, $O\,S^2 = \xi^2\,|\mathfrak{e}_2|$, wobei wir hier die Indizes oben setzen (sie bedeuten also nicht Exponenten), um mit der in der Tensoranalysis gebräuchlichen Schreibweise übereinzustimmen.

Es ist nun von Vorteil, statt dieser Parallelkoordinaten OS^1 und OS^2 die Abschnitte OP^1 und OP^2 der Projektionsstrahlen PS^1 und PS^2 auf den Achsen des universellen Systems als Koordinaten von P aufzufassen. Wegen der den Einheitsvektoren $\mathfrak{e}$ auferlegten Bedingung,

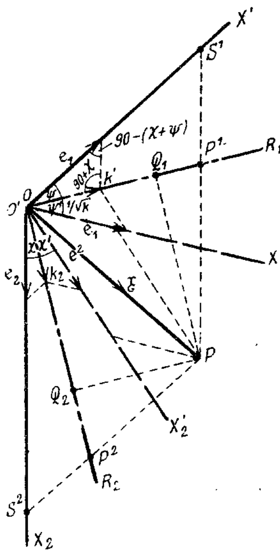

Fig. 1.

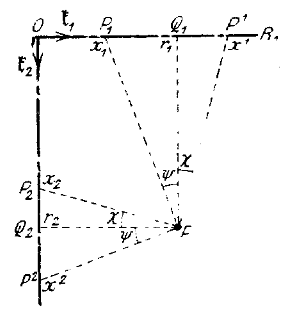

Fig. 2.

weisen diese neuen Koordinaten, die wir reduzierte Koordinaten nennen wollen, dieselben Beträge ξ^1 und ξ^2 auf wie die zugehörigen Parallelkoordinaten.

Indem wir in der Folge nur noch mit diesen reduzierten Koordinaten rechnen wollen und deshalb die Bezeichnung „reduziert“ wieder weglassen, nennen wir hinfort:

$$OP^1 = \xi^1 |\mathfrak{k}_1| = \frac{\xi^1}{\sqrt{K}} = x^1 \quad \text{und} \quad OP^2 = \xi^2\ \mathfrak{k}_2 = \frac{\xi^2}{\sqrt{K}} = x^2$$

die kontravarianten Koordinaten von P, bzw. kontravarianten Komponenten des Vektors $\mathfrak{x}$ in bezug auf das zweidimensionale Koordinatensystem (χ, ψ). Ebenso würden sich die entsprechenden Koordinaten und Komponenten für andere Koordinatensysteme, $(\chi^1 \psi^1)$ usf., in gleicher Weise konstruieren und definieren lassen. Dabei ist es gleichgültig, ob wir die ξ oder die x als Koordinaten, bzw. Komponenten auffassen, es hängt dies von der Wahl unserer

Einheiten ab; je nachdem werden wir auch die universellen Koordinaten ϱ oder r ihnen zuordnen können.

Diese bisher wohl noch nicht praktisch verwendete Darstellung schiefwinkliger Parallelkoordinaten hat den Vorteil, die Koordinaten sämtlicher Systeme durch Abmessungen auf demselben orthogonalen Koordinatensystem mit derselben Einheit $1/\sqrt{K}$ anzugeben. Sie gestattet deshalb auch eine relativ einfache und übersichtliche Darstellung der kovarianten und kontravarianten Koordinaten, bzw. Komponenten, die zwar grundsätzlich nichts Neues [1]) gibt, die aber doch hier in neuer eleganter Darstellung auftritt.

Wir betrachten jetzt ein bestimmtes schiefwinkliges Koordinatensystem, charakterisiert durch die Winkel χ und ψ (Fig. 2). Die kontravarianten Koordinaten eines Punktes P: $OP^1 = x^1 = \frac{\xi^1}{\sqrt{K}}$, $OP^2 = x^2 = \frac{\xi^2}{\sqrt{K}}$ werden durch die unter den Winkeln χ und ψ zu PQ_1 und PQ_2 geneigten Projektionsstrahlen PP^1 und PP^2 bestimmt.

Wir zeichnen das zu ihm „reziproke Koordinatensystem", das dadurch definiert ist, daß seine Projektionsstrahlen zu den vorigen wechselseitig orthogonal sind: $PP_1 \perp PP^2$, $PP_2 \perp PP^1$; die Projektionsstrahlen PP_1 und PP_2 bilden jetzt die Winkel ψ und χ mit PQ_1 und PQ_2. Wir erhalten dadurch: $OP_1 = x_1 = \frac{\xi_1}{\sqrt{K}}$, $OP_2 = x_2 = \frac{\xi_2}{\sqrt{K}}$, die wir als kovariante Koordinaten von P, bzw. kovariante Komponenten des Vektors $\mathfrak{r}$ bezeichnen.

Zwischen diesen, auf ein und dasselbe Koordinatensystem und auf sein reziprokes System bezogenen kovarianten und kontravarianten Koordinaten, sowie zwischen diesen und den universellen Koordinaten bestehen einfache Beziehungen, die auf verschiedenartige Weise, geometrisch oder analytisch, hergeleitet werden können.

Aus Fig. 2 folgt ohne weiteres:

$$\left.\begin{array}{ll} x^1 = r_1 + r_2 \cdot \operatorname{tg}\chi & \quad x^2 = r_2 + r_1 \cdot \operatorname{tg}\psi \\ x_1 = r_1 - r_2 \cdot \operatorname{tg}\psi & \quad x_2 = r_2 - r_1 \cdot \operatorname{tg}\chi \end{array}\right\} \tag{2}$$

Daraus einerseits

$$\left.\begin{array}{l} x^1 - x_1 = x^2 \cdot \operatorname{tg}\chi + x_2 \cdot \operatorname{tg}\psi \\ x^2 - x_2 = x^2 \cdot \operatorname{tg}\psi + x_1 \cdot \operatorname{tg}\chi \end{array}\right\} \tag{3}$$

[1]) Vgl. W. Pauli, Relativitätstheorie. Art. V, 19 der Enzykl. Math. Wiss. 1921.

andererseits

$$\left.\begin{aligned} x^1 - x^2 . \operatorname{tg} \chi &= r_1 \frac{\cos(\chi + \psi)}{\cos\chi . \cos\psi} = x_1 + x_2 . \operatorname{tg} \psi \\ x^2 - x^1 . \operatorname{tg} \psi &= r_2 \frac{\cos(\chi + \psi)}{\cos\chi . \cos\psi} = x_2 + x_1 . \operatorname{tg} \chi \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wenn man beachtet, daß

$$1 - \operatorname{tg}\chi . \operatorname{tg}\psi = \frac{\cos(\chi+\psi)}{\cos\chi . \cos\psi}, \quad \operatorname{tg}\chi + \operatorname{tg}\psi = \frac{\sin(\chi+\psi)}{\cos\chi . \cos\psi}$$

und

$$1 + \operatorname{tg}^2\psi = \frac{1}{\cos^2\psi} \text{ usf.}$$

ist. Eliminiert man z. B. x^2 aus den Gleichungen (3), so folgt

$$x^1 (1 - \operatorname{tg}\chi . \operatorname{tg}\psi) = x_1 (1 + \operatorname{tg}^2\chi) + x_2 (\operatorname{tg}\chi + \operatorname{tg}\psi),$$

also

$$x^1 = \frac{1}{\cos(\chi+\psi)} \left(\frac{\cos\psi}{\cos\chi} . x_1 + \sin(\chi+\psi) . x_2\right) \text{ usf.}$$

Führt man folgende doppelte Reihe von Substitutionen ein:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = \sin(\chi+\psi), \quad \beta = \frac{1}{\cos(\chi+\psi)}, \quad \gamma = \frac{\cos\chi}{\cos\psi}, \\ \text{wobei} \quad &\beta^2 (1 - \alpha^2) = 1, \quad \alpha . \beta = \operatorname{tg}(\chi+\psi), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ferner

$$\left.\begin{aligned} &g^{11} = g_{22} = \beta/\gamma, \quad g_{11} = g^{22} = \beta . \gamma, \\ &g^{12} = g^{21} = - g_{12} = - g_{21} = \alpha . \beta, \\ \text{wobei die Determinante} \quad &g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

wird, so folgt

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= \beta (1/\gamma . x_1 + \alpha . x_2) &&= g^{11} . x_1 + g^{12} . x_2 \\ x^2 &= \beta \;\; (\alpha . x_1 + \gamma . x_2) &&= g^{21} . x_1 + g^{22} . x_2 \\ x_1 &= \beta \;\; (\gamma . x^1 - \alpha . x^2) &&= g_{11} . x^1 + g_{12} . x^2 \\ x_2 &= \beta (-\alpha . x^1 + 1/\gamma . x^2) &&= g_{21} . x^1 + g_{22} . x^2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Gleichungen (6) sind nichts anderes als die bekannten Beziehungen zwischen kontra- und kovarianten Komponenten eines Tensors ersten Ranges (des Vektors $\mathfrak{x}$), ausgedrückt durch die Komponenten $g_{11} g_{22}, g^{11} \ldots$ des metrischen Fundamentaltensors. Die Gleichungen (6) behalten ohne weiteres ihre Form bei, wenn man die x durch die $\sqrt{K}$-mal größeren ξ ersetzt.

Die „Länge“ des Vektors $\mathfrak{x}$ wird bekanntlich durch sein Quadrat gemessen: $(\mathfrak{x})^2 = (r_1)^2 + (r_2)^2$.

Substituiert man die aus (4) sich ergebenden Werte von r_1 und r_2, so folgt:

$$(\mathfrak{r})^2 = \left(\frac{\cos\chi\,.\cos\psi}{\cos(\chi+\psi)}\right)^2 \{(x^1 - x^2.\operatorname{tg}\chi)^2 + (x^2 - x^1.\operatorname{tg}\psi)^2\}$$
$$= \left(\frac{\cos\chi\,.\cos\psi}{\cos(\chi+\psi)}\right)^2 \{(x_1 + x_2.\operatorname{tg}\psi)^2 + (x_2 + x_1.\operatorname{tg}\chi)^2\},$$

was mit Benutzung der Substitutionen (5) ergibt:

$$\left.\begin{aligned}(\mathfrak{r})^2 &= \frac{\cos\chi\,.\cos\psi}{\cos(\chi+\psi)}\{g_{11}\cdot(x^1)^2 + 2\,g_{12}\cdot(x^1x^2) + g_{22}\cdot(x^2)^2\}\\ &= \frac{\cos\chi\,.\cos\psi}{\cos(\chi+\psi)}\{g^{22}.(x_1)^2 + 2\,g^{12}.(x_1x_2) + g^{22}.(x_2)^2\},\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

oder auch unter Beiziehung von (6):

$$(\mathfrak{r})^2 = \frac{\cos\chi\,.\cos\psi}{\cos(\chi+\psi)}(x_1x^1 + x_2x^2). \tag{7a}$$

Ersetzt man in diesen Ausdrücken für $(\mathfrak{r})^2$ die x durch die ξ, $\xi = \sqrt{K}.x$, so ist ersichtlich, daß die bekannte invariante Form für $(\mathfrak{r})^2$ erhalten wird:

$$(\mathfrak{r})^2 = (\xi_1\xi^1 + \xi_2\xi^2) = g_{11}\cdot(\xi^1)^2 + 2\,g_{12}\cdot(\xi^1\xi^2) + g_{22}\cdot(\xi^2)^2 = \ldots, \tag{8}$$

sofern man dem durch die Winkel χ und ψ bestimmten Koordinatensystem einen bestimmten Betrag des universellen Einheitsvektors zuordnet, nämlich:

$$\frac{1}{\sqrt{K}} = \sqrt{\frac{\cos(\chi+\psi)}{\cos\chi\,.\cos\psi}}. \tag{9}$$

Es bedeuten dann die in dieser Einheit $\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)$ gemessenen Werte der $\xi^1\xi^2\xi_1\xi_2$ die kontra- und kovarianten Koordinaten von P bzw. Komponenten von $\mathfrak{r}$. Wie schon erwähnt, gelten dafür die Gleichungen (6) in unveränderter Form. Die Beziehungen (2) und (4) lauten dann:

$$\left.\begin{aligned}\xi^1 &= \sqrt{K}(r_1 + r_2.\operatorname{tg}\chi) \qquad & \xi^2 &= \sqrt{K}(r_2 + r_1.\operatorname{tg}\psi)\\ \xi_1 &= \sqrt{K}(r_1 - r_2.\operatorname{tg}\psi) \qquad & \xi_2 &= \sqrt{K}(r_2 + r_1.\operatorname{tg}\chi)\end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

$$\left.\begin{aligned}r_1 &= \sqrt{K}(\xi^1 - \xi^2.\operatorname{tg}\chi) = \sqrt{K}(\xi_1 + \xi_2.\operatorname{tg}\psi)\\ r_2 &= \sqrt{K}(\xi^2 - \xi^1.\operatorname{tg}\psi) = \sqrt{K}(\xi_2 + \xi_1.\operatorname{tg}\chi)\end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

Kehrt man wieder zu den Parallelkoordinatenachsen der Fig. 1 zurück, so gehört zum System X^1OX^2 (siehe Fig. 3), das die kontravarianten Koordinaten bestimmt, ein reziprokes System X_1OX_2, das die kovarianten Koordinaten bestimmt, und für welches die Einheitsvektoren, die wir jetzt mit $\mathfrak{e}^1$ und $\mathfrak{e}^2$ bezeichnen, die Bedingung wechselseitiger Orthogonalität zu den ursprünglichen Einheitsvektoren erfüllen, also $\mathfrak{e}^1 \perp \mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}^2 \perp \mathfrak{e}_1$, wobei entsprechend (1):

$$|\mathfrak{e}^1| = \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot \frac{\cos\psi}{\cos(\chi+\psi)} = |\mathfrak{e}_2| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{e}^2| = \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot \frac{\cos\chi}{\cos(\chi+\psi)} = |\mathfrak{e}_1| \quad (1\text{a})$$

Aus Fig. 3 ist sofort ersichtlich, daß sich die vier Einheitsvektoren $\mathfrak{e}$ aus der zunächst ganz beliebig gewählten Einheit $\frac{1}{\sqrt{K}}$ ermitteln

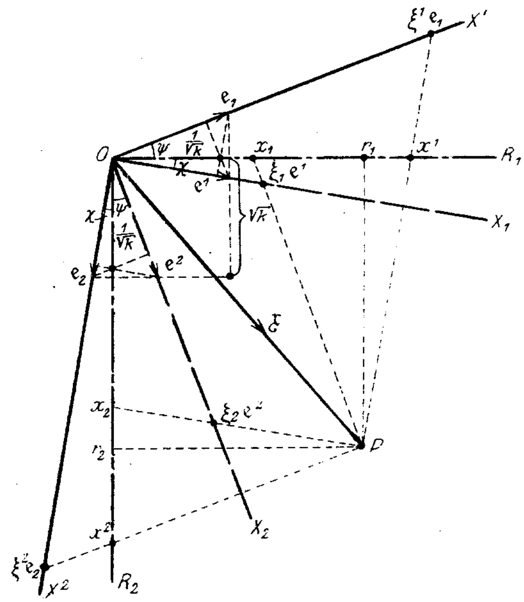

Fig. 3.

lassen. Für den uns interessierenden Fall, in welchem nach (9) $K = \frac{\cos\chi \cdot \cos\psi}{\cos(\chi+\psi)}$, konstruiere man das Quadrat mit Inhalt K und findet dann (Fig. 3) durch Verlängerung der Quadratseiten sofort die vier Vektoren $\mathfrak{e}$. Nach (1) und (1a) wird in diesem Falle:

$$\left.\begin{aligned} |\mathfrak{e}^1| = |\mathfrak{e}_2| &= +\sqrt{\frac{\cos\psi}{\cos\chi \cdot \cos(\chi+\psi)}} = +\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} \\ |\mathfrak{e}^2| = |\mathfrak{e}_1| &= +\sqrt{\frac{\cos\chi}{\cos\psi \cdot \cos(\chi+\psi)}} = +\sqrt{\beta \cdot \gamma} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Daraus folgen, durch Einsetzen in (5a), die bekannten Beziehungen, die in einfacher Weise die Komponenten des metrischen

Fundamentaltensors durch skalare Produkte der Einheitsvektoren $\mathfrak{e}$ geometrisch darstellen:

$$g^{11} = g_{22} = |\mathfrak{e}^1 \mathfrak{e}^1| = |\mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_2|, \quad \text{nämlich} = \beta/\gamma = \frac{\cos\psi}{\cos\chi \cdot \cos(\chi+\psi)}$$

$$g_{11} = g^{22} = |\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_1| = |\mathfrak{e}^2 \mathfrak{e}^2|, \quad \text{nämlich} = \beta \cdot \gamma = \frac{\cos\chi}{\cos\psi \cdot \cos(\chi+\psi)}$$

$$g^{12} = -g_{12} = |\mathfrak{e}^1 \mathfrak{e}^2| = -|\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2|, \quad \text{nämlich} = |\mathfrak{e}^1||\mathfrak{e}^2| \cdot \cos(90-\chi-\psi)$$
$$= |\mathfrak{e}_1||\mathfrak{e}_2| \cdot \cos(90+\chi+\psi) = \operatorname{tg}(\chi+\psi) = \alpha \cdot \beta,$$

wozu noch die Normierungsbedingung hinzukommt:

$$|\mathfrak{e}^1 \mathfrak{e}_2| = |\mathfrak{e}^2 \mathfrak{e}_2| = |\mathfrak{e}_1||\mathfrak{e}^1| \cdot \cos(\chi+\psi) = |\mathfrak{e}_2||\mathfrak{e}^2| \cdot \cos(\chi+\psi) = 1.$$

Wesentlich einfacher werden alle Beziehungen, wenn man nur solche Parallelkoordinatensysteme verwendet, die zu dem universellen System symmetrisch sind, für welche also $\chi = \psi = \varphi/2$. Dann wird aus (5): $\alpha = \sin\varphi$, $\beta = \frac{1}{\cos\varphi}$, $\gamma = 1$,

$$\text{aus (9): } K = \frac{\cos^2\psi}{\cos 2\psi} = \frac{\cos^2\varphi}{\cos\varphi/2},$$

$$\text{aus (5a): } g^{11} = g_{22} = g_{11} = g^{22} = \beta, \; g^{12} = -g_{12} = \alpha\beta,$$

$$\text{aus (1) und (1a): } |\mathfrak{e}^1| = |\mathfrak{e}^2| = |\mathfrak{e}_1| = |\mathfrak{e}_2| = \frac{1}{\sqrt{\cos\varphi}} = \sqrt{\beta}.$$

Es gelten dann nach (6) für die Transformation der kontravarianten in die kovarianten Koordinaten und umgekehrt die Lorentz-Einsteinschen Transformationsformeln:

$$x^1 = \beta(x_1 + \alpha \cdot x_2), \quad x^2 = \beta(x_2 + \alpha x_2) \quad \text{usf.}$$

Es ergeben sich also alle unsere, in der vorigen Arbeit behandelten relativitätstheoretischen Beziehungen ganz einfach als Spezialfall der allgemeinen Beziehungen zwischen kovarianten und kontravarianten Koordinaten.

Ebenso ergibt sich aus (2a) für $\chi = \psi$ nach einigen Umformungen die bekannte Invarianzbedingung der speziellen Relativitätstheorie:

$$|\xi^1|^2 - |\xi^2|^2 = |\xi_1|^2 - |\xi_2|^2 = |r_1|^2 - |r_2|^2,$$

die demnach nur für die ξ, nicht aber für die x gilt.

Bern, 10. Juni 1922.