38.

Mémoire sur les points singuliers d'une courbe à double courbure.

(Par Mr. *William Spottiswoode,* de l'université d'Oxford.)

Soient données les équations d'une courbe

$$(1.)\qquad F=0,\quad G=0,\quad H=0,$$

où F et G sont des fonctions quelconques homogènes des variables x, y, z, t; H étant une fonction linéaire des mêmes variables, avec un terme constant.

En écrivant

$$(2.)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{dF}{dx}=U,\quad \frac{dF}{dy}=V,\quad \frac{dF}{dz}=W,\quad \frac{dF}{dt}=T,\\ \frac{dU}{dx}=u,\quad \frac{dV}{dy}=v,\quad \frac{dW}{dz}=w,\quad \frac{dT}{dt}=s,\\ \frac{dV}{dz}=\frac{dW}{dy}=u',\quad \frac{dW}{dx}=\frac{dU}{dz}=v',\quad \frac{dU}{dy}=\frac{dV}{dx}=w',\\ \frac{dU}{dt}=\frac{dT}{dx}=p,\quad \frac{dV}{dt}=\frac{dT}{dy}=q,\quad \frac{dW}{dt}=\frac{dT}{dz}=r, \end{array}\right.$$

puis

$$U,\quad V,\quad W,\quad T,$$
$$u_1,\ v_1,\ w_1,\ u_1',\ v_1',\ w_1',\ p_1,\ q_1,\ r_1,\ s_1,$$

pour les mêmes coefficients différentiels de G; et

$$(3.)\qquad \frac{dH}{dx}=\alpha,\quad \frac{dH}{dy}=\beta,\quad \frac{dH}{dz}=\gamma,\quad \frac{dH}{dt}=\varepsilon,$$

et, de plus,

$$(4.)\qquad \Omega=\begin{vmatrix} a & b & c & e\\ \alpha & \beta & \gamma & \varepsilon\\ U & V & W & T\\ U_1 & V_1 & W_1 & T_1 \end{vmatrix}$$

(où a, b, c, e sont des quantités quelconques): les équations d'une *tangente* peuvent être écrites comme suit:

$$(5.)\qquad dx:dy:dz:dt=\frac{d\Omega}{da}:\frac{d\Omega}{db}:\frac{d\Omega}{dc}:\frac{d\Omega}{de}.$$

Or, pour un point ***singulier,*** les quantités

$$\frac{d\Omega}{da},\quad \frac{d\Omega}{db},\quad \frac{d\Omega}{dc},\quad \frac{d\Omega}{de},$$

s'évanouissent. En écrivant

$$(6.)\qquad \left\| \begin{matrix} U & V & W & T \\ U_1 & V_1 & W_1 & T_1 \end{matrix} \right\| = \mathrm{U,\ V,\ W,\ T,\ T_1,\ T_2},$$

c'est à dire

$$(7.)\qquad \begin{cases} \begin{vmatrix} V & W \\ V_1 & W_1 \end{vmatrix} = \mathrm{U}, & \begin{vmatrix} W & U \\ W_1 & U_1 \end{vmatrix} = \mathrm{V}, & \begin{vmatrix} U & V \\ U_1 & V_1 \end{vmatrix} = \mathrm{W}, \\ \begin{vmatrix} U & T \\ U_1 & T_1 \end{vmatrix} = \mathrm{T}, & \begin{vmatrix} V & T \\ V_1 & T_1 \end{vmatrix} = \mathrm{T_1}, & \begin{vmatrix} W & T \\ W_1 & T_1 \end{vmatrix} = \mathrm{T_2}, \end{cases}$$

les équations

$$(8.)\qquad \frac{d\Omega}{da} = 0,\quad \frac{d\Omega}{db} = 0,\quad \frac{d\Omega}{dc} = 0,\quad \frac{d\Omega}{de} = 0$$

donnent

$$(9.)\qquad \begin{cases} \quad * \;+\beta\mathrm{T_2}-\gamma\mathrm{T_1}+\varepsilon\mathrm{U} = 0 \\ -\alpha\mathrm{T_2}+\; * \;+\gamma\mathrm{T}+\varepsilon\mathrm{V} = 0 \\ \alpha\mathrm{T_1}-\beta\mathrm{T_2}+\; * \;+\varepsilon\mathrm{W} = 0 \\ \alpha\mathrm{U}+\beta\mathrm{V}+\gamma\mathrm{W}+\; * \; = 0. \end{cases}$$

Il y a à rémarquer que ces équations se trouvent être vérifiées pour des valeurs quelconques de α, β, γ, ε. On en s'assurera en éliminant ces quantités. Il en résulte

$$(10.)\qquad \begin{vmatrix} * & \mathrm{T_2} & -\mathrm{T_1} & \mathrm{U} \\ -\mathrm{T_2} & * & \mathrm{T} & \mathrm{V} \\ \mathrm{T_1} & -\mathrm{T_2} & * & \mathrm{W} \\ \mathrm{U} & \mathrm{V} & \mathrm{W} & * \end{vmatrix} = (\mathrm{TU}+\mathrm{T_1V}+\mathrm{T_2W})^2 = 0;$$

équation identique.

Or ces équations n'équivalent qu'à ***deux*** équations indépendantes. En effet, si l'on multiplie la première par α, la seconde par β, la troisième par γ, la quatrième par ε, la somme de ces produits s'évanouit identiquement. Si l'on multiplie les trois premières par T, $\mathrm{T_1}$, $\mathrm{T_2}$, respectivement, la somme de ces produits donne

$$(11.)\qquad \mathrm{TU}+\mathrm{T_1V}+\mathrm{T_2W} = 0;$$

équation identique. On peut aussi trouver explicitement les deux équations indépendantes. En multipliant les trois premières par U, V, W, respectivement, la somme de ces produits donne

$$(12.)\qquad \varepsilon(U^2+V^2+W^2)-\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ U & V & W\\ T & T_1 & T_2\end{vmatrix}=0,$$

ce qui est la première expression; par conséquent la seconde n'est autre que

$$(13.)\qquad \alpha U+\beta V+\gamma W = 0,$$

et les deux équations peuvent aussi être écrites ainsi:

$$(14.)\qquad \begin{vmatrix}\alpha U+\beta V+\gamma W & \alpha U_1+\beta V_1+\gamma W_1 & \varepsilon\\ U^2+V^2+W^2 & UU_1+VV_1+WW_1 & T\\ UU_1+VV_1+WW_1 & U_1^2+V_1^2+W_1^2 & T_1\end{vmatrix}=0,$$

$$(15.)\qquad \begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ U & V & W\\ U_1 & V_1 & W_1\end{vmatrix}=0.$$

Revenant aux équations (9.). On en tirera une conséquence remarquable. Savoir, en éliminant α, β, γ, ε, tour à tour des trois premières équations, il en résulte,

$$(16.)\qquad \alpha:\beta:\gamma = T:T_1:T_2,$$

et parsuite

$$(17.)\qquad U=0,\quad V=0,\quad W=0,$$

c'est à dire

$$(18.)\qquad U:V:W = U_1:V_1:W_1.$$

A l'aide de ces expressions les équations (16.) donnent

$$(19.)\qquad \alpha:\beta:\gamma = U:V:W,$$

ce qui n'arrive pas nécessairement. Donc on doit avoir

$$(20.)\qquad T=0,\quad T_1=0,\quad T_2=0,$$

et enfin

$$(21.)\qquad U:V:W:T = U_1:V_1:W_1:T_1.$$

Par ces conditions deux cas géométriques dans lequels elles se trouvent satisfaites peuvent être déterminés; 1°, si les deux surfaces *se touchent* au point (x, y, z, t), et 2°, si

$$(22.)\qquad U=0,\quad V=0,\quad W=0,\quad T=0,$$

ou bien

$$(23.)\qquad U_1=0,\quad V_1=0,\quad W_1=0,\quad T_1=0,$$

c'est à dire, si F, ou la surface G, a elle même un *point singulier.*

Mais comme dans ce cas les équations (5.) deviennent illusoires, il est nécessaire d'évaluer les rapports,

$$dx : dy : dz : dt$$

par la méthode des fractions à numérateurs et dénominateurs évanouissantes. On doit donc *différentier* les quantités U, V, W, T, ou bien les quantités U_1, V_1, W_1, T_1, et substituer leur différentielle dans les équations (5.); ou, ce qui revient au même, les équations (5.) seront encore vérifiées, si l'on écrit au lieu de (4.):

$$(24.)\qquad \Omega = \begin{vmatrix} u\,dx + w'dy + v'dz + p\,dt & U_1 & \alpha & a \\ w'dx + v\,dy + u'dz + q\,dt & V_1 & \beta & b \\ v'dx + u'dy + w\,dz + r\,dt & W_1 & \gamma & c \\ p\,dx + q\,dy + r\,dz + s\,dt & T_1 & \varepsilon & e \end{vmatrix}$$

ou bien l'expression que l'on obtient en différentiant les quantités relatives à G, au lieu de celles relatives à F. En ne considérant maintenant que le premier cas, et en écrivant

$$(25.)\qquad \begin{Vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \varepsilon \\ U_1 & V_1 & W_1 & T_1 \end{Vmatrix} = L,\ M,\ N,\ K,\ K_1,\ K_2,$$

en ayant égard aux définitions (7.), on tire des équations (5.), avec la nouvelle valeur de Ω:

$$(26.)\qquad \left\{\begin{array}{l} dx : -dy : dz : -dt \\ = (\ \ast + w'K_2 - v'K_1 + pL)\,dx + (\ \ast + vK_2 - u'K_1 + qL)\,dy \\ :(-uK_2 + \ast + v'K + pM)\,dx + (-w'K_2 + \ast + u'K + qM)\,dy \\ :(\ uK_1 - w'K + \ast + pN)\,dx + (\ w'K_1 - vK + \ast + qN)\,dy \\ :(\ uL + w'M + v'N + \ast\ )\,dx + (\ w'L + vM + u'N + \ast\ )\,dy \\ +(\ \ast + u'K_2 - wK_1 + rL)\,dz + (\ \ast + qK_2 - rK_1 + sL)\,dt \\ +(-v'K_2 + \ast + wK + rM)\,dz + (-pK_2 + \ast + rK + sM)\,dt \\ +(\ v'K_1 - u'K + \ast + rN)\,dz + (\ pK_1 - qK + \ast + sN)\,dt \\ +(\ v'L + u'M + w'N + \ast\ )\,dz + (\ pL + qM + rN + \ast\ )\,dt \end{array}\right.$$

et delà on tire

$$(27.)\qquad \begin{vmatrix} \ast + w'K_2 + v'K_1 + pL - \theta & \ast + vK_2 - u'K_1 + qL & \ast + u'K_2 - wK_1 + rL & \ast + qK_2 - rK_1 + sL \\ -uK_2 + \ast + v'K + pM & -w'K_2 + \ast + u'K + qM + \theta & -v'K_2 + \ast + wK + rM & -pK_2 + \ast + rK + sM \\ uK_1 - w'K + \ast + pN & w'K_1 - vK + \ast + qN & v'K_1 - u'K + \ast + rN - \theta & pK_1 - qK + \ast + sN \\ uL + w'M + v'N + \ast & w'L + vM + u'N + \ast & v'L + u'M + wN + \ast & pL + qM + rN + \ast + \theta \end{vmatrix} = 0.$$

Or cette équation, qui en apparence est du quatrième degré, ne l'est en effet que du second degré; comme cela se fera voir tout de suite. En effet, si $\theta=0$, le déterminant dont il s'agit, devient

$$(28.)\quad \begin{vmatrix} u & w' & v' & p \\ w' & v & u' & q \\ v' & u' & w & r \\ p & q & r & s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} * & K_2 & -K_1 & L \\ -K_2 & * & K & M \\ K_1 & -K & * & N \\ L & M & N & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & w' & v' & p \\ w' & v & u' & q \\ v' & u' & w & r \\ p & q & r & s \end{vmatrix} (KL+K_1M+K_2N)^2$$

et il s'évanouit, parcequ'on a identiquement

$$(29.)\quad KL+K_1M+K_2N=0.$$

En passant, il y a aussi à remarquer que le système inverse à

$$\begin{matrix} * & K_2 & -K_1 & L \\ -K_2 & * & K & M \\ K_1 & -K & * & N \\ L & M & N & * \end{matrix}$$

est

$$(30.)\quad \begin{vmatrix} * & N & -M & K \\ -N & * & L & K_1 \\ M & -L & * & K_2 \\ K & K_1 & K_2 & * \end{vmatrix} (KL+K_1M+K_2N);$$

ce qui peut être vérifié par un calcul immédiat, ou bien aussi en écrivant le système donné avec la forme suivante:

$$\begin{vmatrix} 1 & * & * & L \\ * & 1 & * & M \\ * & * & 1 & N \\ K & K_1 & K_2 & * \end{vmatrix}^2$$

Il suit de là que le système inverse à (27.) (c'est à dire les fonctions que M. *Sylvestre* a nommé *mineurs premiers*) s'évanouit pour $\theta=0$. Mais le coefficient de θ dans le développement de (27.) est la somme de ceux des *mineurs premiers* qui se trouvent placés sur la *diagonale* de (27.) et qu'on peut nommer *mineurs premiers principaux;* donc il s'ensuit que non seulement le terme indépendant de θ, mais aussi de plus, le coefficient de θ s'évanouit; et l'on en tire enfin, après quelques réductions:

$$(31.) \quad \begin{vmatrix} u & w' & v' & p & \alpha & U_1 \\ w' & v & u' & q & \beta & V_1 \\ v' & u' & w & r & \gamma & W_1 \\ p & q & r & s & \varepsilon & T_1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \varepsilon & * & * \\ U_1 & V_1 & W_1 & T_1 & * & * \end{vmatrix} + 2\theta \begin{vmatrix} p & q & r \\ \alpha & \beta & \gamma \\ U_1 & V_1 & W_1 \end{vmatrix} + \theta^2 = 0.$$

Cette équation donne deux valeurs de θ, à l'aide desquelles on pourra déterminér deux valeurs des rapports $dx:dy:dz:dt$, c'est à dire les directions des deux branches de la courbe, qui passent par le point (x, y, z, t).

La nature du point dont il s'agit, dépend de la nature des racines de l'équation (31.); c'est à dire de la nature de la fonction

$$(32.) \quad \begin{vmatrix} u & w' & v' & p & \alpha & U_1 \\ w' & v & u' & q & \beta & V_1 \\ v' & u' & w & r & \gamma & W_1 \\ p & q & r & s & \varepsilon & T_1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \varepsilon & * & * \\ U_1 & V_1 & W_1 & T_1 & * & * \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u & w' & v' & p & \alpha & U_1 \\ w' & v & u' & q & \beta & V_1 \\ v' & u' & w & r & \gamma & W_1 \\ p & q & r & * & * & * \\ \alpha & \beta & \gamma & * & * & * \\ U_1 & V_1 & W_1 & * & * & * \end{vmatrix} <, =, > 0.$$

Les différentes espèces de ces points sont si bien connues qu'il n'est pas nécessaire de les discuter ici.

Il y a à remarquer, qu'un second système de conditions peut être trouvé en faisant varier les quantités relatives à G au lieu de celles relatives a F, c'est à dire en écrivant

$$(33.) \qquad \Omega = \begin{vmatrix} U & u_1 dx + w_1' dy + v_1' dz + p_1 dt & \alpha & a \\ V & w_1' dx + v_1 dy + u_1' dz + q_1 dt & \beta & b \\ W & v_1' dx + u_1' dy + w_1 dz + r_1 dt & \gamma & c \\ T & p_1 dx + q_1 dy + r_1 dz + s_1 dt & \varepsilon & e \end{vmatrix}$$

au lieu de (24.). Donc les points multiples sont distribués en deux classes; et on peut nommer ceux, qui sont déterminées par (24.) etc., ***points multiples relatifs à la surface F,*** et ceux, qui sont déterminés par (33.) etc., ***points multiples relatifs à la surface G.*** Si la fonction (32.) est $= 0$, on obtient l'équation d'une surface qui touche la courbe dans ses points ***d'osculation et d'embrassement,*** ainsi que dans ses points de ***rebroussement,*** distingués les uns des autres par des conditions bien connues. Par conséquent, si les surfaces F et G sont des ordres m et n respectivement, le nombre des points de cette nature est, 1° relativement à la surface F:

$$= 2mn(m + n - 3),$$

et 2° relativement à la surface G:

$$= 2mn(m+n-3).$$

Je passe maintenant à discuter les conditions de l'existence d'un point *d'inflexion*. Dans un tel point les deux éléments consécutifs de la courbe ont la même *tangente*, ce qui doit arriver si

$$(34.)\quad \mathrm{D}\frac{d\Omega}{da}=0,\quad \mathrm{D}\frac{d\Omega}{db}=0,\quad \mathrm{D}\frac{d\Omega}{dc}=0,\quad \mathrm{D}\frac{d\Omega}{de}=0,$$

c'est à dire, en écrivant

$$(35.)\quad \begin{cases} \mathrm{DU}=\mathrm{U}', & \mathrm{DV}=\mathrm{V}', \quad \mathrm{DW}=\mathrm{W}', \\ \mathrm{DT}=\mathrm{T}', & \mathrm{DT}=\mathrm{T}'_1, \quad \mathrm{DT}=\mathrm{T}'_2, \end{cases}$$

$$(36.)\quad \begin{cases} \quad * \;+\beta\mathrm{T}'_2-\gamma\mathrm{T}'_1+\varepsilon\mathrm{U}'=0, \\ -\alpha\mathrm{T}'_2+\; * \;+\gamma\mathrm{T}'+\varepsilon\mathrm{V}'=0, \\ \alpha\mathrm{T}'_1-\beta\mathrm{T}'+\; * \;+\varepsilon\mathrm{W}'=0, \\ \alpha\mathrm{U}'+\beta\mathrm{V}'+\gamma\mathrm{W}'+\; * \;=0, \end{cases}$$

d'ou l'on tire, comme dans le cas de (9.):

$$(37.)\quad \begin{cases} \mathrm{U}'=0, & \mathrm{V}'=0, \quad \mathrm{W}'=0, \\ \mathrm{T}'=0, & \mathrm{T}'_1=0, \quad \mathrm{T}'_2=0, \end{cases}$$

c'est à dire

$$(38.)\quad \mathrm{D}U:\mathrm{D}V:\mathrm{D}W:\mathrm{D}T = U_1:V_1:W_1:T_1,$$

ou bien

$$(39.)\quad \mathrm{D}U_1:\mathrm{D}V_1:\mathrm{D}W_1:\mathrm{D}T_1 = U:V:W:T;$$

d'ou l'on tire, en éliminant $dx,\ dy,\ dz,\ dt$,

$$(40.)\quad \begin{vmatrix} u & w' & v' & p & U_1 \\ w' & v & u' & q & V_1 \\ v' & u' & w & r & W_1 \\ p & q & r & s & T_1 \\ U_1 & V_1 & W_1 & T_1 & * \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou bien,} \quad (41.)\quad \begin{vmatrix} u_1 & w'_1 & v'_1 & p_1 & U \\ w'_1 & v_1 & u'_1 & q_1 & V \\ v'_1 & u'_1 & w_1 & r_1 & W \\ p_1 & q_1 & r_1 & s_1 & T \\ U & V & W & T & * \end{vmatrix} = 0.$$

Donc l'équation (40.) détermine les points d'*inflexion* relatifs à F, et (41.) ceux relatifs à G; et leur nombre est par conséquent

$$(\alpha.)\quad mn(2m+3n-8) \qquad \text{et} \qquad (\beta.)\quad mn(3m+2n-8).$$

comme l'a fait remarquer M. *Hesse*. Mais si $m=1$, la fonction (41.) s'évanouit identiquement, et l'expression (β.) n'a pas lieu. Les fonctions (40.) et (41.) sont en effet identiques avec celles P et Q du mémoire de M. *Hesse* (tome 41. p. 283 de ce journal).

Londres, Novbr. 1851.

Druck von G. Reimer in Berlin.