Sur les limites entre lesquelles le caténoïde est une surface minima.

Par

L. LINDELÖF à HELSINGFORS.

On sait depuis longtemps que la plus petite surface de révolution, terminée par deux bases circulaires données, est celle qui est engendrée par une chaînette tournant autour de sa directrice, surface à laquelle M. Plateau a donné le nom de *caténoïde.* Plus tard on a reconnu que cette propriété de minimum n'appartient à la surface dont il s'agit, qu'entre certaines limites, qu'on n'avait pourtant déterminées que pour le cas très-simple où les extrémités de la courbe méridienne se trouvent à distance égale de la directrice ou de l'axe de révolution. Dans nos *leçons de calcul des variations* (Paris 1861) nous avons traité cette question d'une manière plus générale qu'on ne l'avait fait jusqu'alors, et nous avons démontré (p. 209) que pour un arc de chaînette, dont l'une des extrémités A est prise à volonté, le minimum de la surface de révolution cesse d'avoir lieu, lorsque la seconde extrémité B, en s'éloignant suivant la courbe, arrive à une position telle que les deux tangentes menées à la chaînette en A et en B se rencontrent en un point de l'axe de révolution. C'est là, il nous semble, un des résultats les plus remarquables qu'on ait pu tirer jusqu'ici d'un examen de la variation seconde, dans les cas extrêmement rares où un pareil examen a été possible*).

Ces résultats théoriques acquièrent une signification matérielle en vertu du rapport intime qui existe entre les surfaces minima et les figures d'équilibre des fluides soustraits à l'action de la pesanteur, rapport développé par M. Plateau et mis au jour par ses belles expériences. C'est pourquoi, en lisant le mémoire**) où le célèbre physicien

*) En traitant du problème de la brachistochrone (Leçons de calc. des var. p. 231) nous avons donné un autre exemple d'une recherche semblable.

**) Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur, Série X (dans les Mémoires de l'Académie Royale de Belgique, T. XXXVII).

vient de rendre compte des résultats obtenus par les géomètres au sujet de la théorie de ces figures, et où il cherche à faire soigneusement la part de chacun, j'ai été un peu étonné de ne voir aucune mention faite du théorème général que je viens de signaler. En traitant de la stabilité d'un caténoïde laminaire réalisé au moyen du liquide glycérique, M. Plateau se contente, en effet, de citer un calcul par lequel M. Goldschmidt a déterminé le plus grand écartement possible entre les deux bases du caténoïde, lorsqu'elles sont égales. Mais il ne dit rien de la stabilité d'un caténoïde dont les bases sont inégales, hors du cas extrême où l'une des bases coïncide avec le cercle de gorge, dans lequel il trouve (Série XI, No. 26) que la figure n'a point de limite de stabilité, c'est-à-dire que la seconde base peut s'éloigner (en s'agrandissant convenablement) aussi loin de la première qu'on le veut; sans que la figure tende à s'altérer spontanément.

Cette omission, sans doute involontaire, m'engage à revenir encore une fois sur le théorème déjà énoncé, pour en tirer des formules générales et des nombres exacts relatifs à la limite de stabilité d'un caténoïde liquide à bases quelconques. Les considérations employées dans le calcul des variations étant nécessairement un peu abstraites, on nous saura gré de les laisser de côté, pour le moment, et de montrer qu'on arrive au même résultat par le seul emploi de la méthode ordinaire des maxima, en cherchant directement le plus grand écartement possible des deux bases d'un caténoïde, lorsque ces bases sont données arbitrairement. Nous commençons par résoudre ce dernier problème.

Soit

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

l'équation d'une chaînette rapportée à un système de coordonnées rectangulaires, où la directrice est prise pour axe des x et l'axe des y passe par le sommet de la courbe. On en déduit successivement

$$\frac{\sqrt{y^2-a^2}}{a} = \pm\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

$$\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a} = e^{\pm\frac{x}{a}}$$

et par suite

$$\pm\frac{x}{a} = \log\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}.$$

Dans toutes ces formules il faut prendre le signe supérieur ou inférieur suivant que l'abscisse x est positive ou négative.

Soient x_1, y_1 et x_2, y_2 les coordonnées de deux points A et B

pris sur la chaînette des deux côtés du sommet et désignons par $2l$ la partie de l'axe des x comprise entre les ordonnées de ces points; on aura $2l = x_2 - x_1$, ou en substituant les valeurs de x_1 et x_2 d'après la formule précédente,

$$(1) \qquad \frac{2l}{a} = \log \frac{y_1 + \sqrt{y_1^2 - a^2}}{a} + \log \frac{y_2 + \sqrt{y_2^2 - a^2}}{a}.$$

Si les ordonnées y_1 et y_2 sont données et qu'on fasse varier le paramètre a, la longueur l deviendra fonction de a et l'on pourra demander quelle est la valeur de a pour laquelle l devient maximum. Pour la déterminer, nous différentions l'équation (1), en regardant a et l comme seules variables, et dans le résultat nous faisons la dérivée

$$\frac{dl}{da} = 0;$$

nous trouvons ainsi la condition

$$(2) \qquad \frac{2l}{a} = \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 - a^2}} + \frac{y_2}{\sqrt{y_2^2 - a^2}}.$$

Or il est facile de voir que

$$\frac{ay}{\sqrt{y^2 - a^2}}$$

est l'expression générale de la sous-tangente; cette condition exprime donc que la somme des sous-tangentes aux points A et B est égale à la portion de l'axe des x comprise entre ces points, c'est-à-dire que les tangentes aux extrémités de l'arc vont se couper en un point de la directrice.

La valeur de $2l$ déterminée par les équations (1) et (2) est la plus grande hauteur que puisse avoir un caténoïde dont les bases ont les rayons y_1 et y_2. Mais elle représente aussi, nous le savons par le calcul des variations, la limite à laquelle le caténoïde cesse d'être une surface minima, ou sa limite de stabilité lorsqu'il est réalisé par une lame liquide. Ainsi le caténoïde laminaire ne cesse d'être stable que lorsqu'il cesse d'être géométriquement possible par suite de l'éloignement des bases.

Nous allons maintenant développer les formules nécessaires pour calculer la hauteur $2l$ du caténoïde limite, lorsque les rayons y_1, y_2 des deux bases sont donnés. Si l'on fait

$$(3) \qquad \frac{y_1}{a} = \frac{1}{\sin\varphi_1}, \quad \frac{y_2}{a} = \frac{1}{\sin\varphi_2},$$

les équations (2) et (1) deviennent simplement

$$(4) \qquad \begin{aligned} \frac{2l}{a} &= \frac{1}{\cos\varphi_1} + \frac{1}{\cos\varphi_2}, \\ e^{\frac{2l}{a}} &= \cot\frac{\varphi_1}{2}\cot\frac{\varphi_2}{2}. \end{aligned}$$

Admettons que $y_2 < y_1$, ou $\sin\varphi_2 > \sin\varphi_1$, et posons, pour abréger,

$$\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = u,$$

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = v;$$

nous aurons $\varphi_1 = u - v$, $\varphi_2 = u + v$, et la première équation (4) deviendra

$$\frac{l}{a} = \frac{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2}{2\cos\varphi_1 \cos\varphi_2} = \frac{\cos u \cos v}{\cos^2 u \cos^2 v - \sin^2 u \sin^2 v},$$

ou bien

$$\cos u \cos v = \frac{l}{a}\left(\cos^2 u + \cos^2 v - 1\right). \tag{5}$$

La seconde équation (4) se transforme de la manière suivante:

$$\frac{\cos\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2}{2}}{e^{\frac{l}{a}}} = \frac{\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_2}{2}}{e^{-\frac{l}{a}}} = \frac{\cos u}{e^{\frac{l}{a}} - e^{-\frac{l}{a}}} = \frac{\cos v}{e^{\frac{l}{a}} + e^{-\frac{l}{a}}};$$

d'où

$$\frac{\cos u}{\cos v} = \frac{e^{\frac{l}{a}} - e^{-\frac{l}{a}}}{e^{\frac{l}{a}} + e^{-\frac{l}{a}}} = \cos\alpha, \tag{6}$$

en faisant, pour abréger,

$$\cot\frac{\alpha}{2} = e^{\frac{l}{a}}. \tag{7}$$

Les équations (5) et (6), combinées tour à tour par multiplication et par division, donnent

$$\cos^2 u = \frac{l}{a}\cos\alpha\,(\cos^2 u + \cos^2 v - 1),$$

$$\cos^2 v = \frac{l}{a}\sec\alpha\,(\cos^2 u + \cos^2 v - 1),$$

et ces formules peuvent s'écrire

$$\frac{\cos^2 u}{\frac{l}{a}\cos\alpha} = \frac{\cos^2 v}{\frac{l}{a}\sec\alpha} = \frac{\cos^2 u + \cos^2 v - 1}{1}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 u}{\frac{l}{a}\sec\alpha - 1} = \frac{1 - \cos^2 v}{\frac{l}{a}\cos\alpha - 1},$$

d'où il résulte immédiatement

$$\operatorname{tang}^2 u = \frac{1 - \cos^2 u}{\cos^2 u} = \frac{\frac{l}{a}\sec\alpha - 1}{\frac{l}{a}\cos\alpha},$$

$$\operatorname{tang}^2 v = \frac{1 - \cos^2 v}{\cos^2 v} = \frac{\frac{l}{a}\cos\alpha - 1}{\frac{l}{a}\sec\alpha},$$

ou en restituant les valeurs de u et v,

$$(8)\qquad \begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} &= \sqrt{\frac{\frac{l}{a} \sec\alpha - 1}{\frac{l}{a} \cos\alpha}}, \\ \operatorname{tang} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} &= \sqrt{\frac{\frac{l}{a} \cos\alpha - 1}{\frac{l}{a} \sec\alpha}}. \end{aligned}$$

Ajoutons que si l'on fait encore

$$m = \frac{y_2}{y_1} = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2},$$

on trouvera sans peine

$$(9)\qquad \frac{1+m}{1-m} = \frac{\operatorname{tang} \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}} = \sec\alpha \sqrt{\frac{\frac{l}{a} \sec\alpha - 1}{\frac{l}{a} \cos\alpha - 1}}.$$

Ces formules sont assez commodes, lorsqu'il s'agit de calculer les valeurs de $\frac{y_1}{a}$ et $\frac{y_2}{a}$ correspondant à une valeur donnée de $\frac{l}{a}$. Par la formule (7) on évalue d'abord l'angle auxiliaire α, puis φ_1 et φ_2 par les formules (8), et enfin $\frac{y_1}{a}$ et $\frac{y_2}{a}$ par les équations (3). Des résultats ainsi obtenus on peut déduire les valeurs y_2 et l_2 exprimées en y_1 comme unité. Mais si l'on se donne au contraire les valeurs de y_2 et y_1, ou leur rapport m, et qu'on veuille calculer la valeur correspondante de l, on est obligé de procéder par des approximations successives. Il convient alors de déterminer d'abord par les équations (7) et (9) la valeur de $\frac{l}{a}$ de manière que la quantité $\frac{1+m}{1-m}$ reçoive la valeur qu'elle doit avoir. Ce calcul indirect est nécessairement un peu laborieux, parce qu'il exige des tâtonnements plus ou moins nombreux, avant qu'on puisse s'aider par des interpolations. De la quantité $\frac{l}{a}$ on déduit ensuite, comme nous l'avons dit, les valeurs de $\frac{y_1}{a}$ et $\frac{y_2}{a}$.

J'ai effectué ce calcul pour les dixièmes de m depuis $m = 1$ jusqu'à $m = 0$. Les résultats se trouvent consignés dans le tableau suivant. En fait d'explication, j'ajouterai encore que la quantité m, qui sert d'argument, n'est autre chose que le rapport des diamètres des deux bases du caténoïde limite. Les rapports $\frac{y_1}{a}$, $\frac{y_2}{a}$, $\frac{l}{a}$, $\frac{x_2}{2a}$, qui figurent à la tête des colonnes suivantes, représentent, en d'autres termes, les diamètres des deux bases, la hauteur du caténoïde et la distance de la plus petite base au cercle de gorge, le diamètre de ce cercle étant pris pour unité.

$m = \frac{y_2}{y_1}$	$\frac{y_1}{a}$	$\frac{y_2}{a}$	$\frac{l}{a}$	$\frac{x_2}{2a}$
1,0	1,81017	1,81017	1,19968	0,59984
0,9	1,91158	1,72042	1,20114	0,56897
0,8	2,04043	1,63234	1,20622	0,53622
0,7	2,20890	1,54622	1,21631	0,50134
0,6	2,43733	1,46240	1,23351	0,46400
0,5	2,76251	1,38125	1,26120	0,42381
0,4	3,25806	1,30323	1,30508	0,38015
0,3	4,09590	1,22877	1,37602	0,33207
0,2	5,79109	1,15822	1,49865	0,27768
0,1	10,91075	1,09107	1,75220	0,21181
0,0	∞	1,00000	∞	0,00000

L'aspect de ce tableau donne une idée de la variation des bases et de la hauteur d'un caténoïde limite, lorsque le paramètre a et par suite la cercle de gorge restent invariables. On voit en particulier qu'à mesure que l'une des bases s'approche du cercle de gorge, l'autre s'en éloigne indéfiniment, ainsi que M. Plateau l'avait déjà remarqué, et qu'en même temps les dimensions de celle-ci croissent avec la distance des bases, mais beaucoup plus rapidement.

Mais si l'on veut soumettre les résultats du calcul à une vérification expérimentale, il vaut mieux de considérer l'une des bases comme fixe et le caténoïde même, ou son paramètre a, comme variable avec la seconde base. Le tableau suivant est construit sur ce principe. Nous y supposons le caténoïde vertical et le diamètre de la base inférieure égal à l'unité.

Tableau des dimensions d'un caténoïde limite.

(Diamètre de la base inférieure = 1).

Diamètre de la base supérieure	Hauteur du caténoïde	Diamètre du cercle de gorge	Distance du cercle de gorge à la base sup.
1,0	0,66274	0,55243	0,33137
0,9	0,62835	0,52313	0,29765
0,8	0,59116	0,49009	0,26280
0,7	0,55064	0,45271	0,22696
0,6	0,50609	0,41028	0,19037
0,5	0,45654	0,36199	0,15341
0,4	0,40057	0,30693	0,11668
0,3	0,33595	0,24415	0,08107
0,2	0,25878	0,17268	0,04795
0,1	0,16059	0,09165	0,01941
0,0	0,00000	0,00000	0,00000

En terminant ce petit travail, j'ose exprimer le désir que M. Plateau veuille bien vérifier, par ces expériences délicates auxquelles il a su donner un si haut degré de précision, quelques-uns des nombres contenus dans ce tableau. Ce serait une confirmation importante à la fois de notre analyse et de sa théorie de l'équilibre des lames liquides.