

Formeln und Tafeln für die Refraktion in Positionswinkel und Zenitdistanz.

Von Dr. L. de Ball.

In Nr. 3934, Band 164 dieser Zeitschrift habe ich für die Differenz zwischen der wahren (Δ) und der gemessenen Distanz (Δ') die Formel abgeleitet:

$$\Delta - \Delta' = \alpha' \sin \Delta \sec^2 Bm + \alpha' \sin \Delta \frac{d \log \alpha'}{M d \zeta} \tan \zeta \cos^2 \gamma + \frac{1}{4} \alpha' \sin^3 \Delta \sec^4 Bm. \quad (1)$$

Hierin bedeutet ζ die wahre Zenitdistanz des Mittelpunktes m des die beiden Sterne s und σ verbindenden Bogens, $\alpha' \tan \zeta$ die Refraktion für m , Bm den Winkelabstand des Fußpunktes B des vom Zenit senkrecht zu $s\sigma$ gezogenen größten Kreises von m , M den Modul der Briggschen Logarithmen, γ die Differenz $p-q$, wo p den Positionswinkel von σ , gerechnet von m aus, und q den parallaktischen Winkel bei m bezeichnet. Um Bm zu berechnen, wende man die Formel an

$$\tan Bm = \tan \zeta \cos \gamma \quad (2)$$

$$\tan \zeta \cos^2 \gamma = \sin \zeta \cos \zeta (1 + \tan^2 \zeta) \cos^2 \gamma = \sin \zeta \cos \zeta (\sec^2 Bm - \sin^2 \gamma)$$

so erhält man an Stelle von (1) die in Nr. 3934 als endgültig betrachtete Formel

$$\Delta - \Delta' = \alpha' \left[1 + \frac{d \log \alpha'}{M d \zeta} \sin \zeta \cos \zeta \right] \sin \Delta \sec^2 Bm - \alpha' \frac{d \log \alpha'}{M d \zeta} \sin \zeta \cos \zeta \sin \Delta \sin^2 \gamma + \frac{1}{4} \alpha' \sin^3 \Delta \sec^4 Bm. \quad (3)$$

Das Aggregat der beiden ersten Glieder auf der rechten Seite der vorigen Gleichung ist gleichbedeutend mit dem Hansenschen Ausdrucke für die Refraktion in Distanz, das von Δ^3 abhängige Glied fehlt bei Hansen. Es ist aber vorteilhafter, statt der oben angeführten Transformation die fol-

und wähle Bm stets positiv und im ersten Quadranten.

Aus den a. a. O. mitgeteilten Rechnungen folgt, daß die mit Hilfe der Formel (1) berechnete Refraktion, selbst wenn $\Delta = 7000''$ und $\zeta = 70^\circ$ ist, um weniger als 0.005 von dem strengen, mit Hilfe der in Band 158 gegebenen Formel berechneten Werte abweicht. Erst bei $\zeta = 75^\circ$ kann der Fehler für eine Distanz von $7000''$ auf 0.01 steigen, aber selbst dieser Fehler ist, wie man nachher sehen wird, ganz bedeutungslos.

Setzt man mit Hansen

gende vorzunehmen, wobei von der Formel (2) Gebrauch gemacht wird,

$$\tan \zeta \cos^2 \gamma = \cot \zeta \tan^2 Bm = \cot \zeta (\sec^2 Bm - 1).$$

Damit erhält man aus (1)

$$\Delta - \Delta' = \alpha' \left(1 + \cot \zeta \frac{d \log \alpha'}{M d \zeta} \right) \sin \Delta \sec^2 Bm - \alpha' \cot \zeta \frac{d \log \alpha'}{M d \zeta} \sin \Delta + \frac{1}{4} \alpha' \sin^3 \Delta \sec^4 Bm \quad (4)$$

das zweite Glied auf der rechten Seite von (4) ist also unabhängig von γ . Für die Differenz zwischen dem wahren (p) und dem gemessenen Positionswinkel (p') gibt Hansen die Formel

$$p - p' = -\alpha' \tan^2 \zeta \sin \gamma \cos \gamma - \alpha' \frac{d \log \alpha'}{M d \zeta} \tan \zeta \sin \gamma \cos \gamma - \alpha' \tan \zeta \sin q \tan \delta;$$

diese läßt sich schreiben

$$p - p' = -\alpha' \left(1 + \cot \zeta \frac{d \log \alpha'}{M d \zeta} \right) \tan^2 Bm \tan \gamma - \alpha' \tan \zeta \sin q \tan \delta. \quad (5)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \alpha' \left(1 + \cot \zeta \frac{d \log \alpha'}{M d \zeta} \right) &= f \\ -\alpha' \cot \zeta \frac{d \log \alpha'}{M d \zeta} &= g \\ \frac{1}{4} \alpha' &= h \end{aligned} \quad (6)$$

so lauten die Formeln (4) und (5)

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta' + f \sin \Delta \sec^2 Bm + g \sin \Delta + h \sin^3 \Delta \sec^4 Bm \\ p &= p' - f \tan^2 Bm \tan \gamma - \alpha' \tan \zeta \sin q \tan \delta. \end{aligned}$$

α' , somit auch f , g und h ändern sich mit dem Barometer- und Thermometerstande bez. mit der Luftdichtigkeit und der Temperatur. Ist β der Barometerstand in mm, korrigiert wegen Seehöhe und geographischer Breite des Beobachtungsortes, wegen des Unterschiedes zwischen den An-

gaben des äußeren und inneren Thermometers sowie wegen der Feuchtigkeit (Astr. Nachr. Nr. 3983, Band 166), und bedeutet t die Ablesung des äußeren Thermometers (Celsius), so ergibt sich die Dichtigkeit der Luft (ρ) aus der Gleichung

$$\rho = \frac{\beta}{760} \frac{1 - 0.000162 t}{1 + 0.003663 t}$$

Den $\log \rho$ erhält man mit Hilfe zweier Tafeln, von denen die eine den Logarithmus des ersten Faktors im vorigen Ausdrucke für ρ von 0.1 zu 0.1 mm, und die andere den Logarithmus des zweiten Faktors von 0.1 zu 0.1 angibt. Aus der Formel für ρ folgt, daß, wenn β zwischen 700 und 780 mm, und t zwischen -20° und $+30^\circ$ eingeschlossen ist, $\log \rho$ nur Werte zwischen 9.917 und 0.046 annehmen kann. Ferner läßt sich für jeden Wert des $\log \rho$ die mit ihm noch vereinbare höchste oder tiefste Temperatur bestimmen, vorausgesetzt, daß man die Grenzen kennt, inner-

halb deren sich der Barometerstand bewegt. So z. B. muß die Temperatur höher als $+27^\circ$ sein, wenn $\log \rho = 9.920$ ist und das Barometer nicht unter 700 mm sinkt; ist $\log \rho = 9.930$ und $\beta \approx 700$ mm, so muß $t > +21^\circ$ sein; ist $\log \rho = 0.010$, so muß die Temperatur unterhalb $+2^\circ$ liegen, wenn $\beta \leq 780$ mm ist, usw. Hierdurch erklären sich die in den gleich folgenden Tabellen vorhandenen leeren Felder.

Nachstehend führe ich für die wahre Zenitdistanz 73° die Werte von $\log f$, $\log g$ und $\log h$ für verschiedene Werte des $\log \rho$ und der Temperatur an; als Refraktionskonstante ist für 760 mm, 0° C. und 6 mm Dampfdruck der von Prof.

Bauschinger abgeleitete Mittelwert $60''15$ gewählt worden, der überdies durch die vor kurzem veröffentlichten Untersuchungen von Herrn Dr. Courvoisier eine neue Stütze gefunden hat. Die Werte von $\log \alpha'$ sind siebenstellig berechnet, mit ihrer Hilfe erhält man $\log f$ bis auf fünf und $\log g$ bis auf drei Stellen richtig. Es wird sich alsbald zeigen, daß bei $\log f$ die Angabe von mehr als vier Stellen ganz nutzlos ist, aber für die hier zu gebende Begründung der neuen Refraktionstafeln empfiehlt es sich, $\log f$ bis auf fünf Stellen mitzuteilen. Für $\zeta = 73^\circ$ erhält man die folgenden Werte von $\log f$:

$\log \rho$	-20°	-10°	0°	$+10^\circ$	$+20^\circ$	$+30^\circ$
9.920					1.67791	1.67726
9.930					1.68786	1.68722
9.940				1.69846	1.69782	1.69718
9.950			1.70907	1.70842	1.70778	1.70713
9.960			1.71902	1.71837	1.71773	1.71708
9.970		1.72963	1.72897	1.72832	1.72768	1.72703
9.980		1.73958	1.73893	1.73828	1.73763	
9.990	1.75017	1.74952	1.74888	1.74823		
0.000	1.76012	1.75947	1.75883	1.75817	1.75753	1.75688
0.010	1.77007	1.76941	1.76877			
0.020	1.78001	1.77936	1.77872			
0.030	1.78996	1.78931				
0.040	1.79990	1.79925				
0.050	1.80984	1.80920				

Man erhält also den einem gegebenen Werte des $\log \rho$ und einer bestimmten Temperatur entsprechenden Wert von $\log f$, indem man zu dem für diese Temperatur und $\log \rho = 0.000$ gültigen $\log f$ den gegebenen $\log \rho$ addiert und an die Summe noch eine kleine Korrektur anbringt, welche nur von der Dichtigkeit der Luft abhängt. Für diese Korrektur, gültig für $\zeta = 73^\circ$ und ausgedrückt in Einheiten der fünften Dezimale, ergibt sich nach der vorstehenden Tabelle:

$\log \rho$	Korr.	$\log \rho$	Korr.
9.920	+38	9.990	+5
9.930	+33	0.000	0
9.940	+29	0.010	-5
9.950	+25	0.020	-11
9.960	+20	0.030	-16
9.970	+15	0.040	-22
9.980	+10	0.050	-27

Die Korrektur ändert sich nur sehr wenig mit der Zenitdistanz, so z. B. unterscheidet sich die für $\zeta = 74^\circ$ gültige Korrektortabelle von der vorigen im Maximum um drei Einheiten der letzten Stelle.

Für $\zeta = 73^\circ$ hat man die folgenden Werte von $\log g$ und $\log h$:

$\log \rho$	$\log g$						$\log h$					
	-20°	-10°	0°	$+10^\circ$	$+20^\circ$	$+30^\circ$	-20°	-10°	0°	$+10^\circ$	$+20^\circ$	$+30^\circ$
9.92					0.201	0.213					1.090	1.090
9.93					0.211	0.224					1.100	1.100
9.94					0.222	0.234					1.110	1.110
9.95				0.220	0.233	0.245				1.120	1.120	1.120
9.96				0.231	0.244	0.256				1.130	1.130	1.130
9.97			0.229	0.242	0.255	0.267			1.140	1.140	1.140	1.140
9.98		0.226	0.240	0.253	0.266			1.151	1.150	1.150	1.150	
9.99		0.238	0.251	0.264				1.161	1.160	1.160		
0.00	0.235	0.249	0.262	0.275	0.288	0.300	1.171	1.171	1.170	1.170	1.170	1.170
0.01	0.246	0.260	0.273				1.181	1.181	1.180			
0.02	0.257	0.271	0.284				1.191	1.191	1.190			
0.03	0.268	0.282					1.201	1.201				
0.04	0.279	0.293					1.211	1.211				
0.05	0.290	0.304					1.221	1.221				

Um also den einem gegebenen Wertepaar des $\log \rho$ und der Temperatur zugehörigen $\log g$ zu erhalten, würde man in folgender Weise vorgehen können: Man addiere zu demjenigen Werte des $\log g$, welcher der gegebenen Temperatur und $\log \rho = 0.000$ entspricht, den $\log \rho$, und füge außerdem eine Korrektur hinzu, welche, wie die vorige Tabelle lehrt, nur von ρ abhängt. Diese Korrektur, welche überdies für alle Werte der Zenitdistanz von 70° bis 75° dieselbe ist, beträgt in Einheiten der dritten Dezimale:

$\log \rho$	Korr.	$\log \rho$	Korr.	$\log \rho$	Korr.
9.920	-7	9.970	-3	0.020	+2
9.930	-6	9.980	-2	0.030	+3
9.940	-6	9.990	-1	0.040	+4
9.950	-5	0.000	0	0.050	+5
9.960	-4	0.010	+1		

Da aber sogar ein Fehler von 10 Einheiten der dritten Stelle des $\log g$, selbst bei $\zeta = 75^\circ$ und $\Delta = 1^\circ 54'$, im Maximum nur einen Fehler von 0.002 in der Refraktion in Distanz zur Folge hat, so kann man die eben erwähnte Korrektur auch ganz vernachlässigen und den $\log g$ in den Refraktionstafeln nur auf zwei Stellen anführen; zu dem Wert von $\log g$, der für $\log \rho = 0.000$ und die gegebene Temperatur gilt, wäre dann nur der $\log \rho$ zu addieren.

Es ist jetzt zu zeigen, wie man den für $\log \rho = 0.000$ und eine gegebene Temperatur gültigen $\log g$ erhält. Zu diesem Zwecke gebe ich hierunter für $\log \rho = 0.000$ und die Temperaturen -20° , -10° , ..., $+30^\circ$ die Werte von $\log g$ an, welche den wahren Zenitdistanzen $70^\circ 0'$, $72^\circ 30'$, $75^\circ 0'$ entsprechen. Wenn auch die eigentlichen Refraktionstafeln den $\log g$ nur auf zwei Stellen geben sollen, so möge doch gegenwärtig noch die dritte Dezimale beibehalten werden.

	-20°	-10°	0°	$+10^\circ$	$+20^\circ$	$+30^\circ$
$70^\circ 0'$	0.107	0.121	0.135	0.148	0.161	0.174
$72^\circ 30'$	0.212	0.226	0.239	0.253	0.265	0.278
$75^\circ 0'$	0.332	0.346	0.359	0.372	0.384	0.397

Es genügt also, in den Refraktionstafeln den $\log g$ für $\log \rho = 0.000$ und die Temperatur 0° anzugeben, und eine kleine Tabelle hinzuzufügen, aus der man mit dem Argument Temperatur für alle Zenitdistanzen zwischen 70° und 75° die an den $\log g$ der Tafel anzubringende Korrektur entnimmt. Diese Korrektur, welche ich hierunter in Einheiten der dritten Stelle des $\log g$ mitteile, beträgt den vorhin gegebenen, für $\log \rho = 0.000$ gültigen Werten des $\log g$ zufolge:

	Korr.		Korr.
-20°	-27	$+10^\circ$	+13
-10°	-13	$+20^\circ$	+26
0°	0	$+30^\circ$	+39

Man kann aber hierbei auch noch auf die oben erwähnte, von der Dichtigkeit der Luft abhängende Korrektur des $\log \rho g$ Rücksicht nehmen, obschon sie ohne Nachteil ganz übergangen werden könnte. Berechnet man nämlich für die Barometerstände $\beta = 720$, 750 und 780 mm und die Temperaturen -20° , -10° , ... den $\log \rho$ und die entsprechende Korrektur des $\log \rho g$ in Einheiten der dritten Dezimale, so erhält man:

	$\log \rho$			Korr. des $\log \rho g$		
	720^{mm}	750^{mm}	780^{mm}	720^{mm}	750^{mm}	780^{mm}
-20°	0.01	0.03	0.05	+1	+3	+5
-10°	9.99	0.01	0.03	-1	+1	+3
0°	9.98	9.99	0.01	-2	-1	+1
$+10^\circ$	9.96	9.98	9.99	-4	-2	-1
$+20^\circ$	9.94	9.96	9.98	-6	-4	-2
$+30^\circ$	9.93	9.95	9.96	-6	-5	-4

Mit Rücksicht darauf, daß die Barometerstände an den gegenwärtig mit Heliometern versehenen Sternwarten beiläufig zwischen 720 und 780 mm eingeschlossen sind, füge ich die für $\beta = 750$ mm geltenden Korrekturen zu den vorhin gegebenen hinzu, so daß man jetzt zwischen $\zeta = 70^\circ$ und 75° an Stelle der früheren die folgende Korrektortabelle des $\log g$ hat, wobei wiederum die dritte Dezimale als Einheit gewählt ist:

	Korr.		Korr.
-20°	-24	$+10^\circ$	+11
-10°	-12	$+20^\circ$	+22
0°	-1	$+30^\circ$	+34

Die Korrektur des $\log g$ bez. des $\log \rho g$ braucht aber nur auf zwei Stellen angegeben zu werden, und es ergibt sich, indem man jedesmal das Temperaturintervall bezeichnet, innerhalb dessen die Korrektur dieselbe bleibt,

Intervall	Korr.	Intervall	Korr.
-20° bis -12°	-2	$+5^\circ$ bis $+14^\circ$	+1
-12° » -4°	-1	$+14^\circ$ » $+23^\circ$	+2
-4° » $+5^\circ$	0	$+23^\circ$ » $+30^\circ$	+3

Noch einfacher ist die Berechnung von $\log h$. Schon in Nr. 3934, Band 164 dieser Zeitschrift habe ich darauf aufmerksam gemacht, daß, wenn man für α' , also auch für $h = \frac{1}{4}\alpha'$ den für $\zeta = 75^\circ$ gültigen Wert setzt, das Glied $h \sin^3 \Delta \sec^4 Bm$ für alle Zenitdistanzen $\leq 75^\circ$ bis auf 0.001 richtig erhalten wird, selbst wenn $\Delta = 1^\circ 54'$ ist. Für $\log h$ kann man ferner bei jeder Dichtigkeit der Luft ohne weiteres seinen der Temperatur 0° entsprechenden Wert annehmen, denn dieser unterscheidet sich niemals um mehr als eine Einheit der dritten Stelle von dem wahren Wert, und selbst ein Fehler von vier Einheiten würde auch bei $\zeta = 75^\circ$ und $\Delta = 1^\circ 54'$ einen Fehler von höchstens 0.001 in der Refraktion in Distanz verursachen können. Endlich zeigt die vorhin für $\zeta = 73^\circ$ gegebene Tabelle der Werte des $\log h$, daß man, um den für einen beliebigen Wert des $\log \rho$ gültigen $\log h$ zu erhalten, nur nötig hat, zu dem für $\log \rho = 0.000$ gültigen $\log h$ den jeweiligen Wert des $\log \rho$ zu addieren. Für $\zeta = 75^\circ$, $\log \rho = 0.000$ und $t = 0^\circ$ ist $\log h = 1.169$; dem eben gesagten zufolge hat man also für alle Zenitdistanzen $\leq 75^\circ$ und für alle Temperaturen

$$h \sin^3 \Delta \sec^4 Bm = [1.169] \rho \sin^3 \Delta \sec^4 Bm.$$

Was die Berechnung des Gliedes $\alpha' \tan \zeta \sin \varphi \tan \delta$ in dem Ausdruck für die Refraktion im Positionswinkel betrifft, so genügt es, in die Tafel nur die für $\log \rho = 0.000$ und $t = 0^\circ$ gültigen Werte von $\log \alpha'$ aufzunehmen; zu diesen ist dann $\log \rho$ zu addieren.

Setzt man nun

$$f = \rho F c, \quad g = \rho G d, \quad a' = \rho K \quad (7)$$

wo c und d Korrektionsfaktoren darstellen, und F , G und K die für $\log \rho = 0.000$ gültigen Werte von f , g und a' bedeuten (wobei aber F sich noch mit der Temperatur ändert, während G und K für $t = 0^\circ$ gelten), so wird

$$A = A' + \rho F c \sin A \sec^2 Bm + \rho G d \sin A + [1.169] \rho \sin^3 A \sec^4 Bm \quad (8)$$

$$p = p' - \rho F c \tan^2 Bm \tan \gamma - \rho K \tan \zeta \sin q \tan \delta. \quad (9)$$

Die Tafeln geben nun die Logarithmen von F , c , G , d und K , und zwar $\log F$ und $\log c$ auf vier, $\log G$ und $\log d$ auf zwei, und $\log K$ auf drei Stellen. $\log F$ und $\log c$ auf mehr als vier Stellen anzugeben würde keinen Zweck haben, weil bei $\log \rho$ die vierte Stelle nicht verbürgt werden kann. Schon ein Fehler von 0.05 in der Ablesung des Thermometers, der ja bei der Abrundung auf 0.1 häufiger vorkommen wird, bewirkt, daß der $\log \rho$ um rund eine Einheit der vierten Stelle unrichtig erhalten wird. Wenn aber, wie es gewöhnlich geschieht, das Thermometer im Laufe einer längeren Beobachtungsreihe nur eine ganz beschränkte Anzahl von Malen abgelesen wird, so wird die für die zwischenliegenden Beobachtungsmomente durch Interpolation ermittelte Temperatur oft genug um ein und auch mehrere zehntel Grade von der wahren verschieden sein, und demgemäß auch der $\log \rho$ um mehr als eine Einheit der vierten Stelle falsch erhalten. Da es darauf ankommt zu wissen, welchen Einfluß eine fehlerhafte Annahme der Temperatur auf die Refraktion hat, so führe ich an, daß einem Fehler von 0.25 in der angenommenen Temperatur ein Fehler von vier Einheiten der vierten Stelle des $\log \rho$ und diesem für $A = 1^\circ$, $Bm = \zeta = 70^\circ$ ein Fehler von 0.01 in der Refraktion in Distanz entspricht, für $A = 1^\circ 54'$ und $Bm = \zeta = 75^\circ$ würde der Fehler 0.03 betragen. Es handelt sich also hier freilich nur um kleine Größen; man sieht aber doch, daß man bei großen Distanzen und Zenitdistanzen nicht erwarten kann, die Refraktion in Distanz auf 0.01 richtig zu erhalten, wenn man die interpolierten Temperaturen anwendet, denn daß letztere um 0.25 von der wahren abweichen, ist ganz gewiß keine Seltenheit. Von der Unsicherheit der Refraktionsrechnung, welche davon herrührt, daß die der Theorie zu-

grunde liegenden Hypothesen nicht erfüllt sind, wird hier natürlich völlig abgesehen.

Bei dieser Gelegenheit möge darauf hingewiesen werden, wie notwendig auch für Heliometerbeobachtungen eine Untersuchung über den Einfluß des Beobachtungsraumes auf die Refraktion ist. Für Meridiankreisbeobachtungen ist ja schon von mehreren Seiten die Saalrefraktion in Rechnung gezogen worden, dagegen liegt für die Beobachtungen am Heliometer noch keine einzige derartige Untersuchung vor, und doch handelt es sich hier um Größen, die sicherlich nicht zu vernachlässigen sind. Zur Begründung dessen führe ich folgendes an. In den Abhandlungen, welche Herr Professor Peter über seine Beobachtungen am Heliometer der Leipziger Sternwarte veröffentlicht hat, sind auch die Ablesungen eines im Spalt des Heliometerturms hängenden Thermometers (T), ferner die Mittel der Ablesungen zweier am Kopf des Heliometers angebrachten Thermometer (K) oder vielmehr die für die Zeiten der Distanzmessungen durch Interpolation gefundenen Mittel, sowie die Unterschiede zwischen dem Mittel der Kopft thermometer und der Angabe eines an der Säule des Instruments befestigten Thermometers (S) mitgeteilt. Die Unterschiede zwischen den drei Temperaturangaben T, K und S sind nun vielfach ganz bedeutend. Bei dem Stern Br. 3077 z. B., dessen Parallaxe Prof. Peter an erster Stelle ableitet, liegen die Differenzen S—K zwischen $+0.1$ und $+3.7$, und die Differenzen K—T zwischen -0.1 und $+2.5$; dabei zeigen diese Differenzen auch eine Abhängigkeit von der Jahreszeit. Die Beobachtungen fallen nämlich mit Ausnahme von zweien auf die Monate Januar und Februar resp. Juli und August, und die Mittel der Differenzen S—K und K—T sind:

Winter	S—K	Sommer	S—K
1891	+1.37	1390	+2.21
1892	+1.75	1391	+2.05
1893	+1.42	1392	+2.55
Mittel	+1.51		+2.27

Winter	K—T	Sommer	K—T
1891	+1.25	1890	+1.47
1892	+0.60	1891	+1.20
1893	+1.00	1892	+1.68
Mittel	+0.95		+1.45

Für die Berechnung der Refraktion ist von Prof. Peter die im Spalt herrschende mit T bezeichnete Temperatur gewählt worden, doch ein zwingender Grund gerade für diese Annahme liegt gegenwärtig nicht vor. Da den eben gegebenen Zahlen zufolge die Temperatur vom Spalt bis zur Instrumentensäule stetig steigt, so könnte man auch annehmen, daß bei der Berechnung der Refraktion die Kopftemperatur K zugrunde zu legen sei. Für die im Winter angestellten Beobachtungen des Sterns Br. 3077 war die Temperatur K im Mittel um rund 1° höher als T. Es sei nun die reduzierte Barometerhöhe $\beta = 760$ mm, $T = -10^\circ$ und $K = -9^\circ$, dann würde man für $A = 1^\circ 54'$ und $Bm = \zeta = 75^\circ$ unter der Annahme der Temperatur K eine um 0.11 kleinere Refraktion in Distanz erhalten als unter der An-

nahme der Temperatur T. Die Differenzen K—T steigen aber, wie oben bemerkt, auf $+2.5$ an. In solchen Fällen kann sich die mit K berechnete Refraktion ganz erheblich von der mit T berechneten unterscheiden; so z. B. würde man für $\beta = 760$ mm und $K = -7.5$, wenn $A = 1^\circ 54'$ und $Bm = \zeta = 75^\circ$ ist, eine um 0.29 kleinere Refraktion erhalten als wie für $\beta = 760$ mm und $T = -10^\circ$. In welcher Weise auf den Verlauf der Temperatur von außen zum Objektiv hin Rücksicht genommen werden muß, läßt sich nur durch eigens zu diesem Zweck angestellte Beobachtungen entscheiden. Schon vor mehreren Jahren hat Herr Radau im Bull. astr. darauf hingewiesen, daß das Heliometer sich sehr gut zu einer Untersuchung über die Refraktion eignen würde; die vorstehenden Bemerkungen dürften keinen

Zweifel darüber bestehen lassen, daß eine solche Untersuchung auch notwendig sei.

Von den Tafeln, von denen hier Bruchstücke folgen, gibt die erste den $\log \frac{\beta}{760}$ von 0.1 zu 0.1 mm, die zweite den $\log \frac{1 - 0.000162t}{1 + 0.003663t}$ von 0.1 zu 0.1; durch Addition dieser beiden Logarithmen erhält man also den $\log \rho$. Die Bedeutung der übrigen Tafeln ist durch die jedesmalige Über-

schrift gekennzeichnet. Bezüglich der Tafel 3 sei noch bemerkt, daß dieselbe für die wahren Zenitdistanzen zwischen 65° und 75° den $\log F$ für jede zehnte Minute von ζ und für jeden vollen Temperaturgrad gibt; für $\zeta < 65^\circ$ werden die Intervalle größer genommen. Da einer Änderung der Temperatur um 10° selbst bei $\zeta = 75^\circ$ nur eine Änderung des $\log F$ um acht Einheiten der vierten Stelle entspricht, so würde man sich damit begnügen können, $\log F$ nur für jeden zehnten Grad der Temperatur anzugeben.

Tafel 1.

	.0	.1	.2	.3
730 ^{mm}	9.9825	826	826	827
731	9.9831	832	832	833
732	9.9837	838	838	839

Tafel 2.

	.0	.1	.2	.3
+10°	9.9837	835	834	832
+11	9.9821	819	817	816
+12	9.9805	803	802	800

Tafel 3. $\log F$, vert. Arg. = ζ .

	+10°	+11°	+12°	+13°	+14°
74° 0'	1.7556	556	555	554	554
10	1.7552	551	550	550	549
20	1.7547	546	545	545	544
30	1.7542	541	540	540	539

Tafel 4. $\log c$ (Einheit = vierte Dezimale).

Horiz. Arg. = $\log \rho$, vertik. Arg. = ζ .

	9.92	.93	.94	.95	.96	.97	.98	.99
72°	+3	+3	+3	+2	+2	+1	+1	0
73	+4	+3	+3	+2	+2	+1	+1	0
74	+4	+4	+3	+3	+2	+2	+1	+1
75	+5	+4	+4	+3	+2	+2	+1	+1

Tafel 5.

	$\log G$
74° 0'	0.31
10	0.32
20	0.33
30	0.33

Tafel 6. $\log d$ (Einheit = zweite Dezimale).

Intervall	$\log d$
-20° bis -12°	-2
-12 » -4	-1
-4 » +5	0
+5 » +14	+1
+14 » +23	+2
+23 » +30	+3

Tafel 7.

	$\log K$
72°	1.773
73	1.772
74	1.772
75	1.771

Beispiel. Es soll die Refraktion in Distanz berechnet werden, wenn $\beta = 732.2$ mm, $t = +11.1$, $\zeta = 74^\circ 13'$ ist.

Tafel 1	9.9838	$\log F$ (Tafel 3)	1.7549	$\log G$ (Tafel 5)	0.32
Tafel 2	9.9819	$\log c$ (Tafel 4)	+2	$\log d$ (Tafel 6)	+1
$\log \rho$	9.9657				
$\log Fc$	1.7551				
$\log Gd$	0.33				

Also

$$\Delta - \Delta' = [1.7208] \sin \Delta \sec^2 Bm + [0.30] \sin \Delta + [1.135] \sin^3 \Delta \sec^4 Bm.$$

Ist $\Delta = 1^\circ 42'$, $Bm = 72^\circ 56'$, so erhält man für die drei Glieder auf der rechten Seite der Reihe nach 18"109, 0"059, 0"048, folglich $\Delta - \Delta' = 18"22$.

Wien-Ottakring, 1905 April 27.

L. de Ball.

Noch einmal die „jährliche Refraktion“.

Von Ant. Pannekoek.

Die nochmalige Wiederholung seiner früheren Erörterungen, die Herr Courvoisier in Nr. 4012 der A. N. gibt, würde mir keine Veranlassung geben, darauf zurückzukommen, wenn es sich nicht zeigte, daß er in dem wichtigsten Punkte

den Sinn meiner Beschwerden nicht verstanden hat. Darüber also noch eine kurze Erläuterung.

Wenn auch für Einzelsterne oder kleinere oder besonders ausgewählte Gruppen dies Verhältnis nicht zutrifft,