# Über die Laplacesche Reihe.

Von

Leopold Fejér in Klausenburg.

## Inhaltsverzeichnis.



## Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit verallgemeinere ich meine für die Fouriersche Reihe gefundenen Resultate auf die Laplacesche Reihe.

Für die Fouriersche Reihe habe ich die arithmetischen Mittel *erster* Ordnung der Partialsummen untersucht und sie zur Behandlung verschiedener Fragen benutzt.

Bei den Laplaceschen und Legendreschen Reihenentwicklungen spielen nun die arithmetischen Mittel *zweiter* Ordnung eine analoge Rolle, wie diejenigen von der ersten Ordnung bei der Fourierreihe.

Dies darzutun ist der Zweck dieser Arbeit.

Ich setze nur die Kenntnis der elementarsten Eigenschaften der Kugelfunktionen voraus.*) Die Konvergenztheorie der arithmetischen Mittel zweiter Ordnung der Laplaceschen Reihe ist viel einfacher und durchsichtiger als die Konvergenztheorie der Partialsummen selbst.**)

## § 1.

## Die Hölderschen und Cesàroschen Mittelwerte einer beliebigen unendlichen Reihe.

Es sei

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

eine beliebige unendliche Reihe.

Es sei ferner

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n,$$
$$s_n' = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1},$$
$$s_n'' = \frac{s_0' + s_1' + \cdots + s_n'}{n+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

*Die Folgen*

$$\text{(H)}\qquad \begin{cases} s_0, \; s_1, \; s_2, \; \cdots, \; s_n, \; \cdots \\ s_0', \; s_1', \; s_2', \; \cdots, \; s_n', \; \cdots \\ s_0'', \; s_1'', \; s_2'', \; \cdots, \; s_n'', \; \cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

*nenne ich, der Reihe nach, Höldersche Mittelwerte nullter, erster, zweiter, etc. Ordnung der unendlichen Reihe* (1).

Vorübergehend werde ich auch die Cesàroschen Mittelwerte einer unendlichen Reihe (1) betrachten. Diese sind folgendermaßen definiert.

Es sei

$$\sigma_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n,$$
$$\sigma_n' = \sigma_0 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_n,$$
$$\sigma_n'' = \sigma_0' + \sigma_1' + \cdots + \sigma_n',$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

*) In bezug auf die Literatur verweise ich auf die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Bd. II 1, Heft 5: Theorie der Kugelfunktionen etc. von A. Wangerin.

**) Diese Arbeit ist ein (umgearbeiteter und erweiterter) Teil einer in ungarischer Sprache geschriebenen Abhandlung, die am 6. April 1908 der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt wurde. Eine kurze Zusammenfassung habe ich in den Comptes Rendus (3 février 1908) veröffentlicht.

*Dann sind die Folgen*

$$(\mathrm{C})\quad \begin{cases} \sigma_0, \ \sigma_1, \ \sigma_2, \cdots, \sigma_n, \cdots \\ \frac{\sigma_0'}{1}, \ \frac{\sigma_1'}{2}, \ \frac{\sigma_2'}{3}, \cdots, \frac{\sigma_n'}{n+1}, \cdots \\ \frac{\sigma_0''}{1}, \ \frac{\sigma_1''}{3}, \ \frac{\sigma_2''}{6}, \cdots, \frac{\sigma_n''}{\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}}, \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

*der Reihe nach die Cesàroschen Mittelwerte nullter, erster, zweiter, etc. Ordnung der Reihe* (1).

Es wird zweckmäßig sein, auch den Folgen

$$\begin{array}{l} \sigma_0, \ \sigma_1, \ \sigma_2, \cdots, \sigma_n, \cdots \\ \sigma_0', \ \sigma_1', \ \sigma_2', \cdots, \sigma_n', \cdots \\ \sigma_0'', \ \sigma_1'', \ \sigma_2'', \cdots, \sigma_n'', \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

einen Namen zu geben. Ich nenne sie die zur Reihe (1) gehörigen *σ-Summen nullter, erster, zweiter, etc. Ordnung.*

Aus den Definitionen folgt, daß im Schema (H) in den ersten zwei Zeilen der Reihe nach dieselben Zahlen stehen, wie im Schema (C) in den ersten zwei Zeilen. Hingegen sind schon die Zahlen der dritten Reihen im allgemeinen voneinander verschieden. Z. B. ist

$$s_1'' = \frac{4u_0 + u_1}{4},$$

während das entsprechende

$$\frac{\sigma_1''}{3} = \frac{3u_0 + u_1}{3}$$

ist, etc.

Es habe die Potenzreihe

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots + u_n z^n + \cdots$$

einen von Null verschiedenen Konvergenzkreis. Dann soll die Funktion $\varphi(z)$ die erzeugende Funktion der Zahlenfolge

$$u_0, \ u_1, \ u_2, \cdots, u_n, \cdots,$$

oder auch der unendlichen Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

heißen. Aus dieser Funktion ist es (nach einer Bemerkung von Dirichlet) sehr leicht, die erzeugenden Funktionen der zur Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ gehörigen σ-Folgen herzuleiten. Es ist nämlich einfach

$$\frac{\varphi(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n z^n,$$

$$\frac{\varphi(z)}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma'_n z^n,$$

$$\frac{\varphi(z)}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma''_n z^n,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \,.$$

Ich mache in bezug auf die $\sigma$-Summen nur noch folgende einfache Bemerkung.

Es sei

(2) $$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

eine unendliche Reihe, und

$$U_0,\ U_1,\ U_2,\ \cdots,\ U_n,\ \cdots$$

seien ihre $\sigma$-Summen *nullter* Ordnung.

Es sei

(3) $$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$$

eine andere unendliche Reihe, und

$$V_0',\ V_1',\ V_2',\ \cdots,\ V_n',\ \cdots$$

seien ihre $\sigma$-Summen *erster* Ordnnng.

Es sei weiter

(4) $$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + \cdots + (u_0 v_n + \cdots + u_n v_0) + \cdots$$

das Cauchysche Produkt der Reihen (2) und (3), und es seien

$$W_0'',\ W_1'',\ W_2'',\ \cdots,\ W_n'',\ \cdots$$

die $\sigma$-Summen *zweiter* Ordnung dieser Reihe (4).

*Dann besteht folgende Identität:*

(J) $$W_n'' = U_0 V_n' + U_1 V_{n-1}' + \cdots + U_n V_0'.$$

Beweis. Da

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n\right),$$

so ist

$$\frac{1}{(1-z)^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = \frac{1}{1-z} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n\right) \cdot \frac{1}{(1-z)^2} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n\right),$$

oder

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n'' z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} V_n' z^n\right).$$

Daraus folgt schon ersichtlich die Identität (J)*).

## § 2.

## Untersuchung der Hölderschen Mittel zweiter Ordnung für die spezielle Legendresche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos\gamma)$.

Für die folgenden Untersuchungen sind grundlegend gewisse Eigenschaften der unendlichen Reihe

(5) $$P_0(\cos\gamma) + 3P_1(\cos\gamma) + \cdots + (2n+1)P_n(\cos\gamma) + \cdots.$$

Hier bezeichnet $P_n(x)$ das zum Index $n$ gehörige Legendresche Polynom. Die Folge dieser Legendre-Polynome ist durch die erzeugende Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n$$

definiert. Im Nenner soll jener Zweig der Quadratwurzel genommen werden, der für $z=0$ gleich $+1$ wird.

Unter $\gamma$ verstehe ich eine reelle Variable, die sich im Intervalle

$$0 \leqq \gamma \leqq \pi$$

bewegt.

Zur vorläufigen Orientierung bemerke ich gleich, daß die Reihe (5) in der Theorie der Laplaceschen Reihe eine analoge Rolle spielt, wie die Reihe

(6) $$\frac{1}{2} + \cos\gamma + \cos 2\gamma + \cdots + \cos n\gamma + \cdots$$

in der Theorie der Fourierschen Reihe.

---

*) Seit dem Erscheinen meiner Arbeit in den Math. Annalen Bd. 58, 1904, sind über die Höldersche und Cesàrosche Summabilität einer allgemeinen Reihe

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

und über den *Grenzwert* der für $t > 0$ konvergenten Reihe

$$u_0 f_0(t) + u_1 f_1(t) + \cdots + u_n f_n(t) + \cdots$$
$$(f_n(0) = 1, \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \cdots)$$

für $\lim t = +0$ verschiedene, den Gegenstand wesentlich fördernde, Arbeiten erschienen. Ich erwähne diejenigen von T. J. I'a. Bromwich, G. H. Hardy, K. Knopp, C. N. Moore, M. Riesz, W. Schnee.

Von der Reihe (6) habe ich folgende zwei Eigenschaften bewiesen*):

1. Die Hölderschen Mittel *erster* Ordnung $s'_n(\gamma)$ der Reihe (6) sind für jedes reelle $\gamma$ und für jeden Wert des Index $n$ *nichtnegativ.*

2. Es ist $\lim\limits_{n=\infty} s'_n(\gamma) = 0$, wenn $0 < \gamma \leqq \pi$. Außerdem, wenn $\varepsilon$ eine beliebige innere Stelle des Intervalles $(0, \pi)$ bedeutet, so konvergiert $s'_n(\gamma)$ für $\lim n = \infty$ *gleichmäßig zu Null im Intervalle* $\varepsilon \leqq \gamma \leqq \pi$.

Ganz analog gelten nun für die Reihe (5) folgende zwei Sätze:

Theorem I. *Die Hölderschen Mittel zweiter Ordnung* $s''_n(\gamma)$ *der Reihe* (5) *sind für jedes reelle* $\gamma$ *und für jeden Wert des Index* $n$ *nichtnegativ.*

Theorem II. *Es ist* $\lim\limits_{n=\infty} s''_n(\gamma) = 0$, *wenn* $0 < \gamma \leqq \pi$. *Außerdem konvergiert die Folge der* $s''_n(\gamma)$ *gleichmäßig zu Null in jedem Intervalle* $\varepsilon \leqq \gamma \leqq \pi$, *wo* $\varepsilon$ *eine beliebige innere Stelle des Intervalles* $(0, \pi)$ *bedeutet.*

Die in den Theoremen I, II gegebenen Eigenschaften der Hölderfolgen $s''_n(\gamma)$ der Reihe (5) sind für das Folgende sehr wichtig.**)

Um diese Theoreme zu beweisen, stelle ich die Reihe (5) als Cauchysches Produkt zweier unendlicher Reihen dar.

Bekanntlich ist die erzeugende Funktion der Reihe (5)

$$\frac{1 - z^2}{(1 - 2z\cos\gamma + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, P_n(\cos\gamma)\, z^n.$$

Diese zerlege ich nun folgenderweise in zwei Faktoren:

$$\frac{1 - z^2}{(1 - 2z\cos\gamma + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2z\cos\gamma + z^2}} \cdot \frac{1 - z^2}{1 - 2z\cos\gamma + z^2}.$$

Es ist aber

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2z\cos\gamma + z^2}} = P_0(\cos\gamma) + P_1(\cos\gamma)z + \cdots + P_n(\cos\gamma)z^n + \cdots,$$

und

$$\frac{1 - z^2}{1 - 2z\cos\gamma + z^2} = 2\left(\frac{1}{2} + z\cos\gamma + \cdots + z^n \cos n\gamma + \cdots\right).$$

Ich erhalte also folgendes Resultat:

*Die* zu untersuchende *Reihe*

(5) $$P_0(\cos\gamma) + 3P_1(\cos\gamma) + \cdots + (2n+1)P_n(\cos\gamma) + \cdots$$

*ist das Cauchysche Produkt der beiden unendlichen Reihen*

(7) $$P_0(\cos\gamma) + P_1(\cos\gamma) + \cdots + P_n(\cos\gamma) + \cdots,$$

(8) $$2\left(\frac{1}{2} + \cos\gamma + \cdots + \cos n\gamma + \cdots\right).$$

---

*) Comptes Rendus, 1900, 2ième semestre; Math. Annalen Bd. 58, 1904.

**) Im § 7 werde ich zeigen, daß die Hölderfolgen nullter und erster Ordnung diese Eigenschaften der $s''_n(\gamma)$ *nicht* besitzen.

Ich beweise die Theoreme I und II zunächst für die Folge der Cesàroschen Mittelwerte zweiter Ordnung der Reihe (5). Die Gültigkeit der Theoreme für die Hölderschen folgt dann nachträglich sehr leicht.

Es bezeichne

$$U_0(\gamma),\ U_1(\gamma),\ \cdots,\ U_n(\gamma),\ \cdots \tag{9}$$

die $\sigma$-Summen *nullter* Ordnung der Reihe (7), und

$$V_0'(\gamma),\ V_1'(\gamma),\ \cdots,\ V_n'(\gamma),\ \cdots \tag{10}$$

die $\sigma$-Summen *erster* Ordnung der Reihe (8).

Weiter bezeichne

$$\sigma_0''(\gamma),\ \sigma_1''(\gamma),\ \cdots,\ \sigma_n''(\gamma),\ \cdots \tag{11}$$

die $\sigma$-Summen *zweiter* Ordnung der Reihe (5).

Dann erhalten wir, mit Benutzung der Identität (J),

$$\sigma_n''(\gamma) = U_0(\gamma)V_n'(\gamma) + U_1(\gamma)V_{n-1}'(\gamma) + \cdots + U_n(\gamma)V_0'(\gamma). \tag{12}$$

*Ich behaupte nun, daß sämtliche Glieder der Folgen* (9) *und* (10) *nichtnegativ sind, welchen reellen Wert die Größe $\gamma$ auch habe.* Daraus folgt dann, mit Rücksicht auf (12), dasselbe für die Folge der $\sigma_n''(\gamma)$.

Um diese Eigenschaft der Folgen (9) und (10) zu beweisen, schicke ich eine Bemerkung voraus. Sie bezieht sich auf eine merkwürdige Eigenschaft der Summe

$$\lambda_n(x) = \sin x + \sin 3x + \cdots + \sin(2n+1)x. \tag{13}$$

Multipliziert man die beiden Seiten der Gleichung (13) mit $2\sin x$, so erhält man, mit Rücksicht auf

$$2\sin x\ \sin(2k+1)x = \cos 2kx - \cos 2(k+1)x,$$

$$\begin{aligned}2\sin x\cdot\lambda_n(x) &= 1-\cos 2x+\cos 2x-\cos 4x+\cdots+\cos 2nx-\cos 2(n+1)x\\ &= 1-\cos 2(n+1)x.\end{aligned}$$

Folglich*) ist

$$\lambda_n(x) = \frac{(\sin(n+1)x)^2}{\sin x}. \tag{14}$$

Die Gleichung (14) zeigt, daß $\lambda_n(x)$ dieselbe Vorzeicheneigenschaft hat, wie $\sin x$ selbst; nämlich $\lambda_n(x)$ ist im Intervalle $(0,\pi)$ nichtnegativ, im Intervalle $(\pi, 2\pi)$ nichtpositiv etc.

*) Die Relation (14) kann man vielleicht am leichtesten in der Form

$$\frac{\sin x}{\sin x}+\frac{\sin 3x}{\sin x}+\cdots+\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = \left(\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}\right)^2$$

behalten.

Sie ist eine Verallgemeinerung der folgenden Relation, in welche sie für $x=0$ übergeht

$$1+3+\cdots+(2n+1) = (n+1)^2$$

Dies vorausgeschickt, wende ich mich zur Folge (9). *Ich will,* wie schon bemerkt, *zeigen, daß*

$$U_n(\gamma) = P_0(\cos\gamma) + P_1(\cos\gamma) + \cdots + P_n(\cos\gamma)$$

*für jeden Wert des Index $n$ und für jeden reellen Wert des Argumentes $\gamma$ nichtnegativ ist.*

Nach der bekannten Formel von Mehler ist nämlich

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}\,dt}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos t)}}.$$

Diese Formel ist für

$$n = 0, 1, 2, \cdots,$$

und für

$$0 < \gamma < \pi$$

gültig. Die Quadratwurzel des für $\gamma < t \leqq \pi$ positiven Radikanden $2(\cos\gamma - \cos t)$ ist positiv zu nehmen.

Es ist daher

$$P_0(\cos\gamma) + P_1(\cos\gamma) + \cdots + P_n(\cos\gamma)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\sin\frac{t}{2} + \sin 3\frac{t}{2} + \cdots + \sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos t)}}\,dt.$$

Wenn ich nun Gleichung (14) in Betracht ziehe, so erhalte ich folgendes Resultat:

$$U_n(\gamma) = P_0(\cos\gamma) + P_1(\cos\gamma) + \cdots + P_n(\cos\gamma) \tag{15}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\left(\sin(n+1)\frac{t}{2}\right)^2 dt}{\sin\frac{t}{2}\sqrt{2(\cos\gamma - \cos t)}}.$$

Da der *Integrand* im Integrationsintervalle nichtnegativ ist, so ist $U_n(\gamma)$ für $0 < \gamma < \pi$ positiv. Da weiter $U_n(\gamma)$ für jeden Wert von $\gamma$ stetig ist, *so habe ich bewiesen, daß $U_n(\gamma)$ für jedes $n$ und $0 \leqq \gamma \leqq \pi$ nichtnegativ ist.* Übrigens läßt sich die Frage für die Endpunkte $\gamma = 0$ und $\gamma = \pi$ auch leicht direkt erledigen. Für diese Punkte geht nämlich die Reihe

$$P_0(\cos\gamma) + P_1(\cos\gamma) + \cdots + P_n(\cos\gamma) + \cdots$$

in

$$1 + 1 + 1 + \cdots,$$

resp. in

$$1 - 1 + 1 - \cdots$$

über. Sämtliche Partialsummen dieser Reihen sind nichtnegativ.*)

Ich wende mich jetzt zur Folge (10). Da bekanntlich

$$V_n(\gamma) = 2\left(\frac{1}{2} + \cos\gamma + \cdots + \cos n\gamma\right) = \frac{\sin(2n+1)\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}},$$

so ist, mit Rücksicht auf (14),

$$V_n'(\gamma) = V_0(\gamma) + \cdots + V_n(\gamma) = \left(\frac{\sin(n+1)\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}\right)^2. \tag{16}$$

*Die Glieder der Folge* (10) *sind also auch nichtnegativ.*

Schließlich ist also, mit Rücksicht auf (12), bewiesen, daß die $\sigma_n''(\gamma)$ der Reihe (5) nichtnegativ sind, womit der Beweis des Theorems I für die Cesàrosche Folge zweiter Ordnung der Reihe (5) geliefert ist.

Nun gehe ich zum Beweise des Theorems II über. Für die Cesàrosche Folge zweiter Ordnung formuliert, lautet dieses Theorem folgendermaßen:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n''(\gamma)}{\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}} = 0,$$

$$(0 < \gamma \leqq \pi)$$

*) Im Briefwechsel zwischen Hermite und Stieltjes (Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, publiée par les soins de B. Baillaud et H. Bourget, 1905, Gauthier-Villars, 2 Bände) findet man auch eine Formel für die Summe der ersten $(n+1)$ Legendre-Polynome. In einem vom 9. Mai 1890 datierten Briefe (Bd. II, pag. 43 der genannten Ausgabe) gibt Hermite für die fragliche Summe eine Formel, die in meiner Bezeichnung folgendermaßen lautet:

$$U_n(\gamma) = \frac{1}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\sin(n+1)t\,dt}{\sin\frac{t}{2}\sqrt{2(\cos t - \cos\gamma)}}.$$

Er findet diesen Ausdruck, indem er für $P_n(\cos\gamma)$ die, ebenfalls von Mehler herrührende, Formel

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{2}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\cos(2n+1)\frac{t}{2}\cdot dt}{\sqrt{2(\cos t - \cos\gamma)}}$$

zugrunde legt. Die Eigenschaft der $U_n(\gamma)$, für jeden Wert von $\gamma$ nicht negativ zu sein, kommt aber bei der Hermiteschen Formel *nicht* zur Evidenz. Der Integrand des Hermiteschen Integrales hat nämlich im Integrationsintervalle ein veränderliches Vorzeichen, so daß man aus seiner Formel über das Vorzeichen von $U_n(\gamma)$ — wenigstens unmittelbar — nichts schließen kann.

und zwar gleichmäßig im Intervalle

$$\varepsilon \leqq \gamma \leqq \pi,$$

wo $\varepsilon$ eine beliebige innere Stelle des Intervalles $(0, \pi)$ bedeutet.

Wir beachten wieder die Gleichung (12) und beschäftigen uns, dieser gemäß, wieder mit den Folgen $U_n(\gamma)$ und $V_n'(\gamma)$.

Da nach (16)

$$V_n'(\gamma) = \frac{\left(\sin (n+1) \frac{\gamma}{2}\right)^2}{\left(\sin \frac{\gamma}{2}\right)^2},$$

so ist

(17)
$$|V_n'(\gamma)| = V_n'(\gamma) \leqq \frac{1}{\left(\sin \frac{\gamma}{2}\right)^2},$$
$$\left(\begin{array}{c} 0 < \gamma \leqq \pi, \\ n = 0, 1, 2, \cdots \end{array}\right).$$

Die Kurve $\frac{1}{\left(\sin \frac{\gamma}{2}\right)^2}$ ist daher im Intervalle $(0, \pi)$ eine Majorante sämtlicher Kurven $V_n'(\gamma)$. Die Ordinate dieser Majorantenkurve ist für $\gamma = \pi$ gleich 1. Wenn $\gamma$ von $\pi$ an abnimmt, so wächst die Ordinate der Kurve monoton und konvergiert zu $+\infty$, wenn $\gamma$ zu Null konvergiert.

Andererseits ist, wie ich gleich beweisen werde,

(18)
$$|U_n(\gamma)| = U_n(\gamma) \leqq \frac{2}{\left(\sin \frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$
$$\left(\begin{array}{c} 0 < \gamma \leqq \pi, \\ n = 0, 1, 2, \cdots \end{array}\right).$$

Die Kurve $\frac{2}{\left(\sin \frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$ stellt also eine Majorante sämtlicher $U_n(\gamma)$ dar. Sie ist ähnlich gebaut wie die Majorantenkurve der $V_n'(\gamma)$.

Es sei nun $\varepsilon$ eine beliebige, aber bestimmte Zahl im Innern des Intervalles $(0, \pi)$. Dann ist nach den Ungleichungen (17) und (18)

$$U_n(\gamma) \leqq \frac{2}{\left(\sin \frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

und

$$V_n'(\gamma) \leqq \frac{1}{\left(\sin \frac{\varepsilon}{2}\right)^2}$$

für

$$\varepsilon \leqq \gamma \leqq \pi,$$
$$n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Auf Grund von (12) erhalte ich daher

$$|\sigma_n''(\gamma)| = \sigma_n''(\gamma) \leqq (n+1) \frac{2}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^2},$$

oder

$$\text{(19)} \qquad \frac{\sigma_n''(\gamma)}{\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}} \leqq \frac{4}{(n+2)} \cdot \frac{1}{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{7}{2}}}$$

für

$$\varepsilon \leqq \gamma \leqq \pi,$$
$$n = 0, 1, 2, 3, \cdots.$$

Schließlich habe ich also auch das Theorem II für die Cesàrosche Folge zweiter Ordnung der Reihe (5) erwiesen, da doch aus der Ungleichung (19) unmittelbar

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n''(\gamma)}{\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}} = 0$$

folgt, und zwar gleichmäßig im Intervalle $(\varepsilon, \pi)$.

Ich habe nur noch den Beweis der Ungleichung (18)

$$U_n(\gamma) = P_0(\cos\gamma) + P_1(\cos\gamma) + \cdots + P_n(\cos\gamma) \leqq \frac{2}{\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\begin{pmatrix} 0 < \gamma \leqq \pi, \\ n = 0, 1, 2, \cdots \end{pmatrix}$$

nachzuholen.

Zur Abschätzung von $U_n(\gamma)$ benutze ich meine Formel

$$\text{(15)} \qquad U_n(\gamma) = \frac{2}{\pi} \int_\gamma^\pi \frac{\left(\sin(n+1)\frac{t}{2}\right)^2 dt}{\sin\frac{t}{2}\sqrt{2(\cos\gamma - \cos t)}}.$$

Hier bedeutet $\gamma$ eine *innere* Stelle des Intervalles $(0, \pi)$.

Nun ist

$$|U_n(\gamma)| = U_n(\gamma) \leqq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot \int_\gamma^\pi \frac{dt}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos t)}},$$

oder auch

$$U_n(\gamma) \leqq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot \int_\gamma^\pi \frac{dt}{\sqrt{4\sin\frac{t-\gamma}{2}\sin\frac{t+\gamma}{2}}}.$$

Da aber $0 < \gamma < \pi$, so ist, wie auch geometrisch leicht ersichtlich, für jedes $t$, das der Ungleichung

$$0 < \gamma \leqq t \leqq \pi$$

genügt, einerseits

$$\sin \frac{t-\gamma}{2} \geqq \frac{t-\gamma}{\pi},$$

und andererseits

$$\sin \frac{t+\gamma}{2} > \frac{\sin \gamma}{2}.$$

Daher ist

$$U_n(\gamma) \leqq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} \int_\gamma^\pi \frac{dt}{\sqrt{4 \cdot \frac{t-\gamma}{\pi} \cdot \frac{\sin \gamma}{2}}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin \gamma}} \cdot \int_\gamma^\pi \frac{dt}{\sqrt{t-\gamma}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\left(\sin \frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{\pi-\gamma}{\cos \frac{\gamma}{2}}},$$

oder

$$U_n(\gamma) \leqq \frac{2}{\left(\sin \frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$(0 < \gamma < \pi).$$

Daraus endlich, zufolge der Stetigkeit von $U_n(\gamma)$,

$$U_n(\gamma) \leqq \frac{2}{\left(\sin \frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$(0 < \gamma \leqq \pi).$$

Damit ist Ungleichung (18) bewiesen.

Im Vorhergehenden habe ich die Theoreme I und II für die Cesàrofolge zweiter Ordnung der Reihe (5) bewiesen. Jetzt zeige ich mit Leichtigkeit, wie aus dem Bewiesenen die Gültigkeit derselben Theoreme für die Hölderschen Mittel zweiter Ordnung folgt.

Für eine beliebige unendliche Reihe ist

$$s_n'' = \frac{\frac{\sigma_0'}{1} + \frac{\sigma_1'}{2} + \frac{\sigma_2'}{3} + \cdots + \frac{\sigma_n'}{n+1}}{n+1}.$$

Nun ist aber weiter

$$\sigma_0' = \sigma_0'',$$

$$\sigma_1' = \sigma_1'' - \sigma_0'',$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n' = \sigma_n'' - \sigma_{n-1}'',$$

folglich ist

$$s_n'' = \frac{\dfrac{\sigma_0''}{1} + \dfrac{\sigma_1'' - \sigma_0''}{2} + \dfrac{\sigma_2'' - \sigma_1''}{3} + \cdots + \dfrac{\sigma_n'' - \sigma_{n-1}''}{n+1}}{n+1}.$$

Es ist daher für eine beliebige unendliche Reihe

$$s_n'' = \frac{\dfrac{\sigma_0''}{1\cdot 2} + \dfrac{\sigma_1''}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{\sigma_{n-1}''}{n(n+1)} + \dfrac{\sigma_n''}{n+1}}{n+1}.$$

Wendet man diese Identität*) auf die Reihe (5) an, so erhält man, da

$$\sigma_0''(\gamma),\quad \sigma_1''(\gamma),\ \cdots,\ \sigma_n''(\gamma),\ \cdots$$

alle nichtnegativ sind, daß auch die Glieder der Folge

$$s_0''(\gamma),\quad s_1''(\gamma),\ \cdots,\ s_n''(\gamma),\ \cdots$$

alle nichtnegativ sind.

Weiter ist

$$s_n'' = \frac{\dfrac{\sigma_0''}{1\cdot 2} + \dfrac{\sigma_1''}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{\sigma_{n-1}''}{n(n+1)}}{n+1} + \frac{\sigma_n''}{(n+1)^2}.$$

Da aber für $\varepsilon \leqq \gamma \leqq \pi$ gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_{n-1}''(\gamma)}{n(n+1)} = \lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n''(\gamma)}{(n+1)^2} = 0,$$

so ist für die Reihe (5) auch

$$\lim_{n=\infty} s_n''(\gamma) = 0,$$

u. z. gleichmäßig im Intervalle $\varepsilon \leqq \gamma \leqq \pi$. Hier bedeutet $\varepsilon$ wieder eine beliebige innere Stelle des Intervalles $(0, \pi)$.**)

*Damit sind die Theoreme I und II für die Hölderschen Mittel zweiter Ordnung der unendlichen Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, P_n(\cos\gamma)$$

*vollständig erwiesen.*

---

*) Diese Identität hat, ungefähr zur gleichen Zeit mit mir, auch Bromwich gefunden. S. Math. Annalen, Bd. 65, pag. 265.

**) Das letzte Ergebnis folgt auch aus einem allgemeinen Satz von W. Schnee, demzufolge die Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte aller Ordnungen einander gleich sind. (Math. Annalen, Bd. 67.)

## § 3.

## Die allgemeine Laplacesche Reihe.

Die Punkte des Raumes seien durch die rechtwinkligen Descartesschen Koordinaten $x, y, z$ bestimmt. Man betrachte jene Kugelfläche $K$, deren Mittelpunkt im Anfangspunkte des Koordinatensystems liegt und deren Radius gleich 1 ist. Ein Punkt der Kugelfläche $K$ wird, in üblicher Weise, durch seine geographischen Koordinaten charakterisiert. $\theta$ bezeichne die Poldistanz, $\varphi$ die geographische Länge irgend eines Punktes. „Strahl des Punktes $(\theta, \varphi)$" nenne ich jenen geradlinigen Halbstrahl, der vom Anfangspunkte des Koordinatensystems ausgeht und durch den Punkt $(\theta, \varphi)$ führt.

Es sei nun $f(\theta, \varphi)$ eine für jeden Punkt der Einheitskugel $K$ eindeutig definierte Funktion, die die beiden folgenden Eigenschaften besitzt:

a) sie bleibt dem absoluten Betrage nach auf der ganzen Kugel kleiner als eine positive Zahl $M$,

b) sie ist für die ganze Kugelfläche im gewöhnlichen (Riemannschen) Sinne integrierbar; d. h.

$$\iint_K f(\theta, \varphi)\, do$$

existiert, wo $do$ das Flächenelement der Kugel $K$ bedeutet.

Zu einer solchen Funktion $f(\theta, \varphi)$ gehört eine ganz bestimmte unendliche Reihe, die sog. Laplacesche Reihe. Diese lautet folgendermaßen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \iint_K f(\theta', \varphi')\, P_n(\cos\gamma)\, do'. \tag{20}$$

Hier bedeutet $(\theta', \varphi')$ irgend einen Punkt der Kugelfläche, $do'$ das zugehörige Flächenelement. Weiter bedeutet $\gamma$ jenen Winkel, den die Strahlen der Punkte $(\theta', \varphi')$ und $(\theta, \varphi)$ miteinander bilden.*) Folglich ist

$$\begin{aligned}\cos\gamma &= \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi' - \varphi)\\ &= \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\cos\varphi\sin\theta'\cos\varphi' + \sin\theta\sin\varphi\sin\theta'\sin\varphi'.\end{aligned}$$

$P_n(\cos\gamma)$ bedeutet, wie früher, das zum Index $n$ gehörige Legendresche Polynom.

Es sei nun $(\theta, \varphi)$ eine solche Stelle der Kugel, wo die Funktion $f(\theta, \varphi)$ *stetig* ist. Dann gilt folgender Satz:

*Die zur Funktion* $f(\theta, \varphi)$ *gehörige Laplacesche Reihe* (20) *ist im Stetigkeitspunkte* $(\theta, \varphi)$ *im Hölderschen Sinne summierbar, u. z. von der*

*) Dieser Winkel kann stets der Bedingung $0 \leqq \gamma \leqq \pi$ gemäß gewählt werden.

*zweiten Ordnung, und ihre Summe ist gleich* $f(\theta, \varphi)$. *In Formeln ausgedrückt:*

$$\lim_{n=\infty} s_n''(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi),$$

*wo*

$$s_0''(\theta, \varphi), \quad s_1''(\theta, \varphi), \cdots, s_n''(\theta, \varphi), \cdots$$

*die Höldersche Folge zweiter Ordnung der Laplaceschen Reihe* (20) *bedeutet.*

**Beweis:** Zunächst ist evident, daß

$$s_n''(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \iint_K f(\theta', \varphi')\, s_n''(\gamma)\, do',$$

wo $s_n''(\gamma)$, wie früher, das zum Index $n$ gehörige Höldersche Mittel zweiter Ordnung der Reihe

$$\sum_{n=\infty}^{\infty} (2n+1)\, P_n(\cos\gamma)$$

bedeutet.

Man beschreibe um den Punkt $(\theta, \varphi)$ auf der Kugelfläche $K$ einen kleinen Kreis mit dem sphärischen Radius $\varepsilon$. Dieser kleine Kreis teilt die Kugelfläche $K$ in zwei Teile. Der eine Teil, welcher den Punkt $(\theta, \varphi)$ enthält, heiße $K_1$, der andere $K_2$.

Dann ist

$$\begin{aligned} s_n''(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{K_1} f(\theta', \varphi')\, s_n''(\gamma)\, do' \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_{K_2} f(\theta', \varphi')\, s_n''(\gamma)\, do' \\ &= J_n' + J_n''. \end{aligned}$$

Das Integral $J_n''$ konvergiert für $\lim n = \infty$ zu Null. Das folgt aus Theorem II des § 2, nach welchem $s_n''(\gamma)$ für $\lim n = \infty$ gleichmäßig zu Null konvergiert, wenn $\varepsilon \leqq \gamma \leqq \pi$.

Es sei nun $\delta$ eine beliebig kleine, aber bestimmte positive Größe. Dann läßt sich, zufolge der Stetigkeit von $f(\theta, \varphi)$, der sphärische Radius $\varepsilon$ gewiß so klein wählen, daß stets

$$|f(\theta', \varphi') - f(\theta, \varphi)| \leqq \delta,$$

wenn $(\theta', \varphi')$ einen beliebigen Punkt von $K_1$ bedeutet. Ich denke mir nun $\varepsilon$ dieser Bedingung gemäß gewählt.

Da nun laut Theorem I des § 2 das Höldersche Mittel $s_n''(\gamma)$ niemals negativ ist, so kann ich auf $J_n'$ den ersten Integralmittelwertsatz anwenden und erhalte

$$J_n' = (f(\theta, \varphi) + \eta_n) \iint_{K_1} s_n''(\gamma)\, do',$$

wo gewiß

$$|\eta_n| \leqq \delta.$$

Da aber (laut Theorem II des § 2)

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{4\pi} \iint_{K_2} s_n''(\gamma)\, do' = 0,$$

so kann ich auch folgende Gleichung schreiben:

$$s_n''(\theta, \varphi) = (f(\theta, \varphi) + \eta_n') \cdot \frac{1}{4\pi} \iint_K s_n''(\gamma)\, do',$$

wo gewiß

$$|\eta_n'| \leqq 2\delta,$$

wenn nur $n$ genügend groß ist.

Nun ist aber

$$\frac{1}{4\pi} \iint_K s_n''(\gamma)\, do' = 1.$$

Laut Definition von $s_n''(\gamma)$ ist nämlich

$$s_n''(\gamma) = 1 + c_1 P_1(\cos\gamma) + \cdots + c_n P_n(\cos\gamma),$$

wo $c_1, c_2, \cdots, c_n$ (übrigens positive und rationale) Konstanten bedeuten. Weiter ist nach der Grundeigenschaft der Kugelfunktionen

$$\iint_K P_k(\cos\gamma)\, do' = 0,$$

$$(k = 1, 2, 3, \cdots).$$

Folglich ist

$$\frac{1}{4\pi} \iint_K s_n''(\gamma)\, do' = \frac{1}{4\pi} \iint_K do' = 1.$$

Ich erhalte also schließlich

$$|s_n''(\theta, \varphi) - f(\theta, \varphi)| \leqq 2\delta,$$

wenn nur $n$ gehörig groß ist.

*Damit ist die Konvergenz der Hölderschen Mittel zweiter Ordnung der Laplaceschen Reihe* (20) *zu $f(\theta, \varphi)$ dargetan.**)

*Ist die Funktion auf der ganzen Kugel ausnahmslos stetig, so konvergieren die zur Laplaceschen Reihe* (20) *gehörigen Hölderschen Mittel zweiter Ordnung $s_n''(\theta, \varphi)$ auf der ganzen Kugel gleichmäßig zu $f(\theta, \varphi)$ als Grenzfunktion.*

---

*) Das Theorem ist auch gültig für das Cesàrosche Mittel zweiter Ordnung. Mir erscheinen aber die Hölderschen Mittel insofern interessanter, als sie durch mechanische Wiederholung des einfachen, anschaulichen und allgemein wichtigen Prinzips des gewöhnlichen arithmetischen Mittels — ohne irgendwelche rechnerische Willkürlichkeit — entstehen. Unstreitig sind aber die Hölderschen Mittel höherer Ordnung praktisch schwerer zu berechnen als die Cesàroschen.

Dies ist aus der soeben gegebenen Argumentation leicht ersichtlich.

*Ist* $f(\theta, \varphi)$ *bloß auf einem Teilgebiete* $T$ *der Kugel stetig, so konvergiert* $s''_n(\theta, \varphi)$ *gleichmäßig zu* $f(\theta, \varphi)$ *in jedem Gebiete* $T_1$, *welches vollständig im Innern von* $T$ *liegt.*

Diese Sätze enthalten einen neuen *Beweis des Weierstraßschen Satzes über die gleichmäßige und beliebig feine Approximation einer stetigen Funktion zweier Variabeln* $f(\theta, \varphi)$ *durch analytische Funktionen (oder Polynome) derselben Argumente.*

Ich kehre jetzt zu den $s''_n(\theta, \varphi)$ zurück. Die Hölderschen Mittel zweiter Ordnung $s''_n(\theta, \varphi)$ der Laplaceschen Reihe haben eine merkwürdige Eigenschaft, die im allgemeinen den $s_n(\theta, \varphi)$ und den $s'_n(\theta, \varphi)$ *nicht* zukommt. Es sei wieder $f(\theta, \varphi)$ auf der ganzen Kugel endlich und integrabel. Es bezeichne $M$ die obere Grenze und $m$ die untere Grenze von $f(\theta, \varphi)$ auf der ganzen Kugel. *Dann ist*

$$m \leqq s''_n(\theta, \varphi) \leqq M,$$

*und zwar für*

$$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

*und für beliebige Werte von* $\theta$ *und* $\varphi$.

In der Tat ist

$$s''_n(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_K f(\theta', \varphi')\, s''_n(\gamma)\, do'.$$

Da aber $s''_n(\gamma) \geqq 0$ für jeden Index $n$ und für jedes $\gamma$, so ist

$$m \cdot \frac{1}{4\pi} \iint\limits_K s''_n(\gamma)\, do' \leqq s''_n(\theta, \varphi) \leqq M \cdot \frac{1}{4\pi} \iint\limits_K s''_n(\gamma)\, do'.$$

Nun ist aber, wie ich schon bemerkt habe,

$$\frac{1}{4\pi} \iint\limits_K s''_n(\gamma)\, do' = 1,$$

folglich erhält man

$$m \leqq s''_n(\theta, \varphi) \leqq M. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

Dieser Satz über die $s''_n(\theta, \varphi)$ der Laplaceschen Reihe ist analog einem Satze, den ich über die $s'_n(x)$ der Fourierschen Reihe einer im Intervalle $(0, 2\pi)$ endlichen und integrabelen Funktion $f(x)$ gegeben habe. Ich habe nämlich bemerkt, daß

$$m \leqq s'_n(x) \leqq M$$

für

$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

und

$$0 \leqq x \leqq 2\pi.$$

Während also für eine im Intervalle $(0, 2\pi)$ endliche und stetige Funktion die Folge der Fourierschen Partialsummen

$$s_0(x), \quad s_1(x), \cdots, s_n(x), \cdots$$

sogar zwischen $-\infty$ und $+\infty$ oszillieren kann, liegen die Hölderschen Mittel *erster* Ordnung $s'_n(x)$ der Fourierschen Reihe alle zwischen $m$ und $M$.

Analoges gilt nun, wie ich eben bewiesen habe, für die Hölderschen Mittel *zweiter* Ordnung der Laplaceschen Reihe einer auf der Kugel definierten, endlichen und integrabelen Funktion.*)

*) Auf pag. 36—51 meiner früher zitierten ungarischen Arbeit habe ich die Hölderschen Mittel erster Ordnung der Fourierschen Reihe, und die Hölderschen Mittel zweiter Ordnung der Laplaceschen Reihe auf Fragen angewendet, die Landau und Carathéodory im Zusammenhange mit dem Picardschen Satze aufgeworfen haben. Dabei kommt gerade die im Texte bewiesene Ungleichheitseigenschaft der Hölderschen Mittel in Betracht, und nicht etwa ihre allgemeinere „Darstellungskraft" (oder „Konvergenzfähigkeit").

Ich will hier nur den Gedanken mitteilen. Es sei

$$u(r, \varphi) = a_0 + (a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi) r + \cdots + (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) r^n + \cdots$$

die Entwicklung einer harmonischen Funktion zweier Variabeln in Polarkoordinaten. *Ich denke mir nur*

$$a_0, a_1, b_1, \cdots, a_\nu, b_\nu$$

*gegeben, und frage nach einer unteren Schranke von* $\underset{\varphi=0\cdots 2\pi}{\mathrm{Max}}\, u(r, \varphi)$, *und nach einer oberen Schranke von* $\underset{\varphi=0\cdots 2\pi}{\mathrm{Min}}\, u(r, \varphi)$.

Die durch die Daten bestimmten Partialsummen

$$(21) \qquad s_\varkappa(r, \varphi) = a_0 + (a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi) r + \cdots + (a_\varkappa \cos\varkappa\varphi + b_\varkappa \sin\varkappa\varphi) r^\varkappa$$
$$(\varkappa = 0, 1, 2, \cdots, \nu)$$

sind zur Beantwortung der Frage direkt *nicht* geeignet, hingegen sind es die durch die Daten ebenfalls bestimmten Hölderschen Mittel

$$s'_\varkappa(r, \varphi) = \frac{\varkappa+1}{\varkappa+1} a_0 + \frac{\varkappa}{\varkappa+1}(a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi) r + \cdots + \frac{1}{\varkappa+1}(a_\varkappa \cos\varkappa\varphi + b_\varkappa \sin\varkappa\varphi) r^\varkappa,$$
$$(\varkappa = 0, 1, 2, \cdots, \nu)$$

wohl. Nach dem Satze des Textes ist nämlich

$$\underset{\varphi=0\cdots 2\pi}{\mathrm{Min}}\, u(r, \varphi) \leqq s'_\varkappa(r, \varphi) \leqq \underset{\varphi=0\cdots 2\pi}{\mathrm{Max}}\, u(r, \varphi).$$

Diese Ungleichung ist für jedes $\varphi$ gültig, und für jedes $r$, das kleiner ist als der wahre Konvergenzradius der Reihe (21).

Die harmonische Funktion dreier Variabeln läßt sich analog behandeln, indem man die Hölderschen Summen zweiter Ordnung ihrer Laplaceschen Entwicklung zugrunde legt. Mit Leichtigkeit ergibt sich, unter anderem, der Satz, daß eine, im ganzen Raume $(x, y, z)$ reguläre, reelle harmonische Funktion dreier Variabeln *jeden reellen Wert annimmt. Aus den ersten Entwicklungskoeffizienten ihrer Laplaceschen Reihe läßt sich auch ein Radius $R$ angeben, so daß innerhalb der Kugel mit dem Mittelpunkte* $(0, 0, 0)$ *und dem Radius $R$ ein vorgeschriebener Wert $A$ auch wirklich angenommen wird.*

Im vorhergehenden war die Funktion $f(\theta, \varphi)$ stets als *endlich* vorausgesetzt.

Ich gehe jetzt zu dem Falle über, in welchem die Funktion $f(\theta, \varphi)$ an einzelnen isolierten Stellen der Kugel *unendlich* wird.

Wie sind die Konvergenzverhältnisse bei der Fourierschen Reihe, wenn die Funktion unendlich wird?

Riemann gab das Beispiel

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{\nu} \cos \frac{1}{x}\right),$$
$$0 < x \leqq 2\pi, \quad 0 < \nu < \frac{1}{2}.$$

Die Funktion $f(x)$ wird in diesem Beispiele an der Stelle $x = 0$ integrabel unendlich und ist sonst regulär analytisch. Ihre Fouriersche Reihe existiert, ist aber, wie Riemann nachgewiesen hat, im ganzen Intervalle $(0, 2\pi)$ divergent. Hingegen konvergieren die Hölderschen Mittel erster Ordnung der Fourierschen Reihe*) innerhalb des ganzen Intervalles $(0, 2\pi)$.

Die Riemannsche Funktion ist an der Stelle $x = 0$ (an welcher sie unendlich wird) zwar integrabel, aber nicht absolut integrabel. Hingegen ist für eine im Intervalle $(0, 2\pi)$ analytische, und an einer endlichen Anzahl von Stellen dieses Intervalles *absolut* integrabel unendlich werdende Funktion die Fouriersche Reihe (mit Ausnahme der Unendlichkeitsstellen) überall konvergent.

Bei der Laplaceschen Reihe sind nun die Verhältnisse sozusagen noch etwas ungünstiger. Selbst wenn die Funktion $f(\theta, \varphi)$ an einer Stelle der Einheitskugel absolut integrabel unendlich wird (und sonst z. B. überall analytisch regulär ist) kann die Laplacesche Reihe dieser Funktion auf der ganzen Kugel divergieren. Diese Tatsache hat Darboux entdeckt. Die Funktion

$$f(\theta, \varphi) \equiv \frac{1}{(1 - \cos\theta)^{\frac{4}{5}}}$$

wird am Nordpol der Einheitskugel absolut integrabel (natürlich im zweidimensionalen Sinne) unendlich, ist sonst auf der Kugel überall regulär analytisch, ihre Laplacesche Reihe aber ist auf der ganzen Kugel divergent.**)

Hingegen sind die Hölderschen Mittel zweiter Ordnung der Laplaceschen Reihe von $\dfrac{1}{(1 - \cos\theta)^{\frac{4}{5}}}$ auf der ganzen Kugel (nur den Nordpol ausgenommen) konvergent. Es besteht nämlich folgender allgemeiner Satz:

*) Math. Annalen, Bd. 58, pag. 59, Hauptsatz.

**) Der Beweis wird in § 6 gegeben.

*Es sei $f(\theta, \varphi)$ eine auf der ganzen Einheitskugel integrierbare Funktion, die an den Stellen*

$$(\theta_1, \varphi_1), \quad (\theta_2, \varphi_2), \cdots, (\theta_\varkappa, \varphi_\varkappa)$$

*der Kugel absolut integrierbar unendlich wird, sonst aber endlich bleibt. Bedeutet dann $(\theta, \varphi)$ irgend eine Stelle der Kugel, wo $f(\theta, \varphi)$ stetig ist, so konvergieren die Hölderschen Mittel zweiter Ordnung der Laplaceschen Reihe dieser Funktion an der Stelle $(\theta, \varphi)$ zu $f(\theta, \varphi)$ als Grenzwert.*

Ich schlage wieder um den Punkt $(\theta, \varphi)$ einen Kreis mit dem Radius $\varepsilon$. Dieser teilt die Einheitskugel $K$ in zwei Teile. Der eine Teil, derjenige, der den Punkt $(\theta, \varphi)$ enthält, heiße $K_1$, der andere $K_2$. Ich wähle übrigens $\varepsilon$ so klein, daß die Unendlichkeitspunkte

$$(\theta_1, \varphi_1), \quad (\theta_2, \varphi_2), \cdots, (\theta_\varkappa, \varphi_\varkappa)$$

alle innerhalb des Gebietes $K_2$ liegen. Dann zerlege ich entsprechend:

$$\begin{aligned} s_n''(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{K_1} f(\theta', \varphi')\, s_n''(\gamma)\, do' \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_{K_2} f(\theta', \varphi')\, s_n''(\gamma)\, do' \\ &= J_n' + J_n''. \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} J_n' = f(\theta, \varphi)$$

habe ich schon erwiesen. Es bleibt noch übrig zu zeigen, daß

$$\lim_{n=\infty} J_n'' = 0.$$

Da für $n > N$

$$s_n''(\gamma) \leqq \delta, \quad (\varepsilon \leqq \gamma \leqq \pi),$$

so ist für $n > N$

$$|J_n''| \leqq \frac{1}{4\pi} \iint_{K_2} |f(\theta', \varphi')|\, s_n''(\gamma)\, do' \leqq \frac{\delta}{4\pi} \iint_{K} |f(\theta', \varphi')|\, do'.$$

Nach Voraussetzung ist aber

$$\iint_K |f(\theta', \varphi'|\, do' = G$$

ein bestimmter, endlicher Wert; folglich ist

$$|J_n''| \leqq \frac{\delta \cdot G}{4\pi} \quad \text{für} \quad n > N.$$

Da $\delta$ beliebig klein angenommen werden kann, ist der obige Satz scho: erwiesen.

## § 4.

## Die allgemeine Legendresche Reihe.

Die Legendresche Reihe ist ein spezieller Fall der Laplaceschen Reihe. Die Laplacesche Reihe einer Funktion $f(\theta, \varphi)$ lautet

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma)\, f(\theta', \varphi') \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi'.$$

Es sei nun speziell $f(\theta, \varphi)$ von $\varphi$ unabhängig, d. h. es sei

$$f(\theta, \varphi) \equiv \psi(\cos\theta).$$

Von der Funktion $\psi(\cos\theta)$ setze ich voraus, daß sie im Intervalle $0 \leqq \theta \leqq \pi$ im Riemannschen Sinne integrabel ist. Dann ist

$$\frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma)\, f(\theta', \varphi') \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi'$$

$$= \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \psi(\cos\theta') \sin\theta'\, d\theta' \cdot \int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma)\, d\varphi'.$$

Da aber bekanntlich

$$\int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma)\, d\varphi' = 2\pi\, P_n(\cos\theta)\, P_n(\cos\theta'),$$

so lautet für $f(\theta, \varphi) = \psi(\cos\theta)$ die Laplacesche Reihe folgendermaßen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \left( \int_0^{\pi} \psi(\cos\theta')\, P_n(\cos\theta') \sin\theta'\, d\theta' \right) \cdot P_n(\cos\theta).$$

Schließlich führe man $\cos\theta = x$ als neue unabhängige Variable ein. Dadurch geht man vom Intervalle $(0, \pi)$ zum Intervalle $(-1, +1)$ über. Die Laplacesche Reihe lautet dann

$$(22) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \\ \displaystyle c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi(x)\, P_n(x)\, dx \\ \qquad n = 0, 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

Diese Reihe nenne ich „die zur Funktion $\psi(x)$ gehörige Legendresche Reihe“.

*Da sie eine spezielle Laplacesche Reihe ist, so gelten in bezug auf ihre Hölderschen Mittel zweiter Ordnung dieselben Theoreme, welche ich früher für diejenigen der allgemeinen Laplaceschen Reihe ausgesprochen habe.*

Ist speziell $\psi(x)$ eine im Intervalle $(-1, +1)$ überall stetige Funktion, so konvergieren die Hölderschen Mittel zweiter Ordnung ihrer Legendreschen Reihe im ganzen Intervalle $(-1, +1)$ gleichmäßig. Ich habe also dadurch einen neuen Beweis des Weierstraßschen Satzes über die Approximation einer beliebigen stetigen Funktion durch Polynome gewonnen. Da mir einerseits dieser Beweis, andererseits die approximierenden Polynome besonders interessant scheinen, so möchte ich diesen Beweis noch etwas näher beleuchten.

## § 5.

## Beweis des Weierstraßschen Satzes über die Approximation einer beliebigen stetigen Funktion durch Polynome mit Hilfe ihrer nach Legendreschen Polynomen fortschreitenden Reihenentwicklung.

Es sei $\psi(x)$ eine im Intervalle $(-1, +1)$ definierte beliebige stetige Funktion.*)

Die Weierstraßsche Aufgabe besteht darin, eine ganze rationale Funktion $g(x)$ der unabhängigen Variabeln $x$ zu finden, für welche

$$|\psi(x) - g(x)| < \varepsilon$$

für

$$-1 \leqq x \leqq +1,$$

wo $\varepsilon$ eine vorgeschriebene und beliebig kleine positive Zahl bedeutet.

Zur Lösung der Aufgabe bestimme ich zunächst jenes Polynom $n^{\text{ten}}$ Grades $g_n(x)$, für welches die „Abweichung", im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate,

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} (\psi(x) - g_n(x))^2\, dx$$

ein Minimum ist. Dieses, ganz bestimmte, Polynom ist bekanntlich

$$g_n(x) = c_0 + c_1 P_1(x) + \cdots + c_n P_n(x),$$

*) Die Grenzwerte $f(-1+0)$, $f(1-0)$ sollen auch existieren und endlich sein, brauchen aber nicht etwa einander gleich zu sein. Ist die stetige Funktion für das Intervall $a \leqq z \leqq b$ definiert, so führt man statt $z$ die unabhängige Variable $x$ ein, die mit $z$ durch

$$z = \frac{b-a}{2} x + \frac{b+a}{2}$$

verbunden ist.

wo

$$c_\varkappa = \frac{2\varkappa+1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi(x)\,P_\varkappa(x)\,dx$$
$$(\varkappa = 0, 1, 2, \cdots, n).$$

Hier bedeutet $P_\varkappa(x)$ das $\varkappa^{\text{te}}$ Legendresche Polynom.

Zu jedem Index $n$ gehört ein solches Minimumspolynom $g_n(x)$, und ich bin in solcher Weise zu einer ganz bestimmten Folge von Polynomen

(23) $$g_0(x),\ g_1(x),\ \cdots,\ g_n(x),\ \cdots$$

gelangt, für welche der Fehler

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(\psi(x)-g_n(x))^2\,dx$$

mit wachsendem $n$, wie bekannt*), gewiß zu Null konvergiert.

Daraus folgt aber natürlich in keiner Weise, daß die Glieder der Folge (23) zu $\psi(x)$ konvergieren, oder gar, daß sie gleichmäßig zu $\psi(x)$ konvergieren. Ich vermute, daß für geeignete stetige Funktionen die Folge (23) zwischen $-\infty$ und $+\infty$ oszillieren kann.

*Bilde ich aber (wieder eigentlich nach dem Prinzipe der kleinsten Quadrate)*

$$g_n'(x) = \frac{g_0(x)+g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{n+1},$$

*und dann*

$$g_n''(x) = \frac{g_0'(x)+g_1'(x)+\cdots+g_n'(x)}{n+1},$$

*so besitze ich* (mit Rücksicht auf die Theoreme des § 4) *in der Folge*

$$g_0''(x),\ g_1''(x),\ \cdots,\ g_n''(x),\ \cdots$$

*eine solche Folge von ganz bestimmten Polynomen, die mit wachsendem $n$ für $-1 \leqq x \leqq +1$ gleichmäßig zur Funktion $\psi(x)$ konvergieren.*

Die eventuelle Oszillation der $g_n(x)$ wird also durch zweimalige Anwendung des Prozesses des arithmetischen Mittels gewiß ausgeglichen, und wir erhalten eine Folge von Polynomen $g_n''(x)$, für die nicht nur die Abweichung

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(\psi(x)-g_n''(x))^2\,dx$$

zu Null konvergiert, sondern für die in bezug auf die Ordinate eine gleichmäßige Konvergenz zu $\psi(x)$ stattfindet.

---

*) Mit Hilfe der Besselschen Identität (s. Erhard Schmidt, Math. Annalen, Bd. 63, pag. 439) läßt sich das, mit Rücksicht auf § 4, leicht beweisen.

Übrigens ist $g_n''(x)$ eine ganz bestimmte rationale ganze Funktion $n^{\text{ten}}$ Grades, die noch die merkwürdige Eigenschaft besitzt, daß

$$m \leqq g_n''(x) \leqq M$$

für

$$n = 0, 1, 2, 3, \cdots,$$

$$-1 \leqq x \leqq +1,$$

wo $M$ das Maximum, $m$ das Minimum von $\psi(x)$ für $-1 \leqq x \leqq +1$ bezeichnet.*)

## § 6.

## Fortsetzung des § 4.

Das Theorem über die Hölderschen Mittel zweiter Ordnung einer Legendreschen Reihe gestattet viele Anwendungen. Ich möchte nur eine sehr einfache erwähnen.

Bekanntlich muß die stetige Funktion $f(x)$ identisch verschwinden, wenn für sie die Konstanten

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, x^n\, dx, \tag{24}$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots,$$

alle gleich Null sind. (Theorem von Lerch.)

Das beweise ich mit Hilfe meines Theorems folgendermaßen. Da die Konstanten (24) alle Null sind, so verschwinden auch alle Konstanten

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x)\, P_n(x)\, dx,$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots,$$

da doch $P_n(x)$ eine ganze rationale Funktion von $x$ ist. Folglich sind die Hölderschen Mittel zweiter Ordnung der Legendreschen Reihe von $f(x)$ alle identisch Null. Also ist auch ihr Grenzwert für $\lim n = \infty$ gleich Null, d. h. $f(x) \equiv 0$.

Ich kann auch das Theorem aussprechen: *Eine im Intervalle* $(-1, +1)$ *stetige Funktion ist durch ihre Konstanten* (24) *vollständig bestimmt.*

Ich wende mich jetzt zur Untersuchung der Legendreschen Reihe einer Funktion $\psi(x)$, die an einer Stelle des Intervalles $(-1, +1)$ *unendlich* wird. Darboux**) hat zuerst darauf hingewiesen, daß aus der absoluten

---

*) Über den Weierstraßschen Satz sind neuerdings interessante Aufsätze von Landau, Lebesgue, F. Riesz, Mollerup und de la Vallée Poussin erschienen.

**) „Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres, et sur une classe étendue de développements en séries". Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3ième série, tome IV, 1878.

Integrabilität der Funktion $\psi(x)$ noch nicht die Konvergenz ihrer Legendreschen Reihe folgt. Z. B. wird die Funktion

$$\frac{1}{(1-x)^{\frac{4}{5}}}$$

an der Stelle $x = 1$ absolut integrabel unendlich, während ihre Legendresche Reihe im Intervalle $(-1, +1)$ überall divergiert.

In bezug auf diese Frage mache ich hier auf eine interessante Mitteilung aufmerksam, die Stieltjes an Hermite machte. Im Band II der früher zitierten Ausgabe findet man im Briefe Nr. 249 (pag. 46) die explizite ausgerechnete Entwicklung der Funktion

$$\frac{2^\omega}{(1-x)^\omega}$$

nach den Legendreschen Polynomen $P_n(x)$*). Hier bedeutet $\omega$ eine positive Zahl, für welche $0 < \omega < 1$.

Die Formel von Stieltjes lautet

$$\frac{2^\omega}{(1-x)^\omega} = c_0 + c_1 P_1(x) + \cdots + c_n P_n(x) + \cdots, \tag{25}$$

wo

$$c_n = (2n+1) \cdot \frac{\omega(\omega+1)(\omega+2)\cdots(\omega+n-1)}{(1-\omega)(2-\omega)\cdots(n+1-\omega)}.$$

Es ist also

$$c_0 = \frac{1}{1-\omega}, \quad c_1 = \frac{3\omega}{(1-\omega)(2-\omega)}, \text{ etc.}$$

Da Stieltjes in seinem Briefe über die Herleitung seiner Reihe keine Andeutung gibt, kann ich vielleicht den Beweis hier kurz anführen. Es ist

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{2^\omega}{(1-x)^\omega} P_n(x)\, dx.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} D^{(n)}(x^2-1)^n,$$

folglich ist

$$\frac{2 \cdot 2^n \cdot n!}{(2n+1) \cdot 2^\omega} \cdot c_n = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{(1-x)^\omega} D^{(n)}(x^2-1)^n dx.$$

Auf das rechtsstehende Integral wende ich nun eine partielle Integration an. Ich erhalte

*) Diese Entwicklung gibt schon Franz Neumann in seinem Buche „Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen", (1878), pag. 133, ohne aber die Konvergenzfragen zu erörtern.

$$(26)\qquad \int_{-1}^{+1}(1-x)^{-\omega}D^{(n)}(x^2-1)^n dx$$
$$= \{(1-x)^{-\omega}D^{(n-1)}(x^2-1)^n\}_{-1}^{+1} - \omega\int_{-1}^{+1}(1-x)^{-\omega-1}\cdot D^{(n-1)}(x^2-1)^n dx.$$

Diese partielle Integration ist statthaft. In der Tat verschwindet

$$D^{(n-1)}(x^2-1)^n$$

an der Stelle $x=1$ von der ersten Ordnung. Da nun, wie vorausgesetzt, $0<\omega<1$, so wird

$$(1-x)^{-\omega-1}\cdot D^{(n-1)}(x^2-1)^n$$

an der Stelle $x=1$ von der Ordnung $\omega$ unendlich. Das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (26) existiert also gewiß. Da weiter

$$(1-x)^{-\omega}\cdot D^{(n-1)}(x^2-1)^n$$

an den Grenzen $(-1)$ und $(+1)$ verschwindet, so erhält man die Formel

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^{-\omega}D^{(n)}(x^2-1)^n dx = -\,\omega\int_{-1}^{+1}(1-x)^{-\omega-1}\cdot D^{(n-1)}(x^2-1)^n dx.$$

Durch Wiederholung dieses Verfahrens bekommt man schließlich

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^{-\omega}D^{(n)}(x^2-1)^n dx$$
$$= (-1)^n\cdot\omega(\omega+1)\cdots(\omega+n-1)\int_{-1}^{+1}(1-x)^{-\omega-n}(x^2-1)^n dx.$$

Nun ist aber

$$(x^2-1)^n = (-1)^n(1-x)^n(1+x)^n,$$

folglich

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^{-\omega}D^{(n)}(x^2-1)^n dx = \omega(\omega+1)\cdots(\omega+n-1)\int_{-1}^{+1}(1-x)^{-\omega}(1+x)^n dx.$$

Führt man

$$t=\frac{1-x}{2}$$

als neue Integrationsvariable ein, so erhält man

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^{-\omega}D^{(n)}(x^2-1)^n dx = \omega(\omega+1)\cdots(\omega+n-1)\cdot 2\cdot 2^n\cdot 2^{-\omega}\cdot\int_0^1 t^{-\omega}(1-t)^n dt.$$

Mithin ist

$$\frac{n!\,c_n}{2n+1} = \omega(\omega+1)\cdots(\omega+n-1)\int_0^1 t^{-\omega}(1-t)^n dt.$$

Das rechtsstehende Integral ist ein Eulersches Integral erster Gattung. Folglich ist

$$\int_0^1 t^{-\omega}(1-t)^n\,dt = \frac{\Gamma(-\omega+1)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(-\omega+n+2)}.$$

Man erhält daher für $c_n$ die Formel

$$\frac{c_n}{2n+1} = \omega(\omega+1)\cdots(\omega+n-1)\,\frac{\Gamma(-\omega+1)}{\Gamma(-\omega+n+2)}.$$

Da aber

$$\Gamma(-\omega+n+2) = (-\omega+1)(-\omega+2)\cdots(-\omega+n+1)\Gamma(-\omega+1),$$

so ist

$$c_n = (2n+1)\,\frac{\omega(\omega+1)\cdots(\omega+n-1)}{(1-\omega)(2-\omega)\cdots(n+1-\omega)}.$$

Das ist der Wert von Stieltjes.

Durch Gammafunktionen ausgedrückt hat $c_n$ die Form

$$c_n = \frac{\Gamma(1-\omega)}{\Gamma(\omega)}\cdot\frac{(2n+1)\,\Gamma(n+\omega)}{\Gamma(n+2-\omega)}.$$

Da aber nach der Stirlingschen Formel

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\,\frac{e^{-x}x^x}{\sqrt{x}}\,(1+\varepsilon(x)),$$

$$(\lim_{x=+\infty}\varepsilon(x)=0),$$

so ist

$$c_n = \frac{2\Gamma(1-\omega)}{\Gamma(\omega)}\,n^{2\omega-1}(1+\delta_n), \tag{27}$$

wo

$$\lim_{n=\infty}\delta_n = 0.$$

Ist $\omega$ eine positive Zahl, die $0<\omega<1$, so ist die Funktion $\frac{2^\omega}{(1-x)^\omega}$ absolut integrabel, und ihre Legendresche Reihe ist durch die Stieltjessche Reihe (25) gegeben. Sie ist aber allemal divergent, wenn

$$\frac{3}{4}\leqq\omega<1.$$

In der Tat, es sei $x$ eine beliebige innere Stelle des Intervalles $(-1,+1)$. Man betrachte das allgemeine Glied der Reihe (25)

$$c_nP_n(x) = c_nP_n(\cos\gamma).$$

Da

$$c_n = \frac{2\Gamma(1-\omega)}{\Gamma(\omega)}\,n^{2\omega-1}(1+\delta_n),$$

und da nach Laplace

$$P_n(\cos\gamma) = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\gamma}}\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma-\frac{\pi}{4}\right]+\eta_n(\gamma)\right\},$$

wo

$$\lim_{n=\infty}\delta_n = \lim_{n=\infty}\eta_n(\gamma) = 0,$$

so ist

$$c_n P_n(\cos\gamma) = \frac{2\Gamma(1-\omega)}{\Gamma(\omega)} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi \sin\gamma}} \cdot \left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma - \frac{\pi}{4}\right] + \varepsilon_n(\gamma)\right\} n^{2\omega - \frac{3}{2}},$$

wo

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n(\gamma) = 0.$$

Wenn also

$$2\omega - \frac{3}{2} \geqq 0$$

d. h. $\omega \geqq \frac{3}{4}$, so werden die Glieder der Stieltjesschen Reihe mit wachsendem $n$ nicht unendlich klein, und *folglich divergiert die Reihe.*

*Während nun die Stieltjessche Reihe, wenn* $\frac{3}{4} \leqq \omega < 1$, *für jedes* $x$ *divergiert, konvergieren nach meinem Satze die Hölderschen Mittel zweiter Ordnung für jeden Wert von* $x$, *welcher*

$$-1 \leqq x < 1.$$

*Die Konvergenz dieser Mittel ist sogar eine gleichmäßige für*

$$-1 \leqq x \leqq a,$$

*wo* $a$ *eine beliebige innere Stelle des Intervalles* $(-1, +1)$ *bedeutet.*

Ich habe die Konvergenzverhältnisse der Stieltjesschen Reihe für

$$0 < \omega < \frac{3}{4}$$

nicht genauer untersucht. Soviel steht aber fest, daß an der Stelle $-1$ auch noch für

$$\frac{1}{2} \leqq \omega < \frac{3}{4}$$

Divergenz herrscht. Das zeigt mit Leichtigkeit die asymptotische Formel (27) für $c_n$. Für $\omega = \frac{1}{2}$ geht die Stieltjessche Reihe in die bekannte Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}} = P_0(x) + P_1(x) + \cdots + P_n(x) + \cdots$$

über, die ich in dieser Arbeit genau untersucht habe. Diese Reihe geht für $x = -1$ in die Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

über und ist also an der Stelle $x = -1$ in der Tat divergent. An einer inneren Stelle des Intervalles $(-1, +1)$ ist sie aber konvergent.*)

*) Sehr instruktiv ist es, die Stieltjessche Reihe

$$\frac{1}{(1-x)^\omega} = \frac{1}{2^\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{\omega(\omega+1)\cdots(\omega+n-1)}{(1-\omega)(2-\omega)\cdots(n+1-\omega)} P_n(x)$$

## § 7.

## Über die Hölderschen Mittel nullter und erster Ordnung der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,P_n(\cos\gamma).$$

In diesem Paragraphen möchte ich auseinandersetzen, warum ich im Falle der Laplaceschen Reihe gleich zu den Hölderschen Mittel der *zweiten* Ordnung übergehen mußte.

Ich will also jetzt die Summen

$$s_n(\gamma)=\sigma_n(\gamma)$$

und die Summen

$$s'_n(\gamma)=\frac{\sigma'_n(\gamma)}{n+1}$$

der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,P_n(\cos\gamma)$$

untersuchen.

Ich stelle für $\sigma_n(\gamma)$ und $\sigma'_n(\gamma)$ asymptotische Formeln auf und benutze zu diesem Zwecke die berühmte Darbouxsche Methode. [Loc. cit.]

Um diese Methode anwenden zu können, muß ich zunächst die erzeugenden Funktionen der Folgen $\sigma_n(\gamma)$ und $\sigma'_n(\gamma)$ herstellen.

Da

$$\frac{1-z^2}{(1-2z\cos\gamma+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,P_n(\cos\gamma)\,z^n,$$

so ist

$$\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1-z^2}{(1-2z\cos\gamma+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n(\gamma)\,z^n$$

und

$$\frac{1}{(1-z)^2}\cdot\frac{1-z^2}{(1-2z\cos\gamma+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma'_n(\gamma)\,z^n.$$

Die erzeugende Funktion der Folge $\sigma_n(\gamma)$ ist also

$$\lambda(z)=\frac{1+z}{(1-2z\cos\gamma+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

---

mit der Binomialreihe

$$\frac{1}{(1-x)^{\omega}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega(\omega+1)\cdots(\omega+n-1)}{1\cdot2\cdots n}\,x^n$$

in Bezug auf die Konvergenz im Intervalle $-1\leqq x<1$ zu vergleichen.

und die der Folge $\sigma_n'(\gamma)$ ist

$$\mu(z) = \frac{1+z}{(1-z)(1-2z\cos\gamma + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ich beschäftige mich zuerst mit der Herleitung einer asymptotischen Formel für $\sigma_n(\gamma)$.

Es sei $\gamma$ eine beliebige, aber bestimmte Stelle im Innern des Intervalles $(0, \pi)$. Die erzeugende Funktion

$$\lambda(z) = \frac{1+z}{(1-e^{i\gamma}z)^{\frac{3}{2}}(1-e^{-i\gamma}z)^{\frac{3}{2}}}$$

ist nach Potenzen von $z$ entwickelbar und hat den Einheitskreis als wahren Konvergenzkreis. Sie hat am Einheitskreise die beiden algebraischen singulären Stellen

$$z_1 = e^{-i\gamma}, \quad z_2 = e^{i\gamma}.$$

Um den „Hauptteil" von $\sigma_n(\gamma)$ zu bekommen, habe ich nun, nach der Darbouxschen Methode, einfach

$$\bar{\lambda}(z) = \frac{1+e^{-i\gamma}}{(1-e^{-2i\gamma})^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{(1-e^{i\gamma}z)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1+e^{i\gamma}}{(1-e^{2i\gamma})^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{(1-e^{-i\gamma}z)^{\frac{3}{2}}}$$

nach Potenzen von $z$ zu entwickeln. Der Koeffizient von $z^n$ gibt den gesuchten Hauptteil von $\sigma_n(\gamma)$.

Nach dem Binomialsatze ist aber

$$\frac{1}{(1-e^{i\gamma}z)^{\frac{3}{2}}} = 1 + \cdots + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\ \ 2n} e^{ni\gamma} z^n + \cdots$$

und

$$\frac{1}{(1-e^{-i\gamma}z)^{\frac{3}{2}}} = 1 + \cdots + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\ \ 2n} e^{-ni\gamma} z^n + \cdots.$$

Die gesuchte asymptotische Formel lautet daher

$$\sigma_n(\gamma) = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\ \ 2n}\left\{\frac{1+e^{-i\gamma}}{(1-e^{-2i\gamma})^{\frac{3}{2}}} e^{ni\gamma} + \frac{1+e^{i\gamma}}{(1-e^{2i\gamma})^{\frac{3}{2}}} e^{-ni\gamma} + \eta_n(\gamma)\right\},$$

wo

$$\lim_{n=\infty} \eta_n(\gamma) = 0.$$

Ordne ich in der Klammer und führe trigonometrische Funktionen ein, so erhalte ich schließlich, mit Rücksicht auf die Wallissche Formel

$$\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\ 2n}=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1+\varepsilon_n)$$

$$(\lim_{n=\infty}\varepsilon_n=0),$$

(28) $$s_n(\gamma)=\sigma_n(\gamma)$$

$$=\sqrt{n}\left(\frac{8\cos\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{\pi}\,(2\sin\gamma)^{\frac{3}{2}}}\cdot\cos\left[(n+1)\gamma-\frac{3\pi}{4}\right]+\delta_n(\gamma)\right),$$

wo $\delta_n(\gamma)$ für $\lim n=\infty$ in jedem Intervalle $\varepsilon\leqq\gamma\leqq\pi-\varepsilon$, $(\varepsilon>0)$, gleichmäßig zu Null konvergiert.

Die asymptotische Formel (28) zeigt, daß die Folge der Partialsummen $s_n(\gamma)$ der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,P_n(\cos\gamma)$$

für jede innere Stelle des Intervalles $(0,\pi)$ zwischen $-\infty$ und $+\infty$ oszilliert. An der Stelle $\gamma=0$ geht die Reihe in

$$1+3+5+\cdots+(2n+1)+\cdots$$

über und die Partialsummen konvergieren zu $+\infty$. Für $\gamma=\pi$ geht sie in

$$1-3+5-7+\cdots$$

über und ihre Partialsummen oszillieren wieder zwischen $-\infty$ und $+\infty$.

Die $s_n(\gamma)$ der Reihe (5) haben also kein konstantes Vorzeichen im Intervalle $(0,\pi)$; sie haben veränderliches Vorzeichen, und die Anzahl der Vorzeichenwechsel wächst mit $n$ über jede Grenze.

Ich wende mich jetzt zu der Folge $\sigma'_n(\gamma)$. Die erzeugende Funktion lautet

$$\mu(z)=\frac{1+z}{(1-z)\,(1-e^{i\gamma}z)^{\frac{3}{2}}\,(1-e^{-i\gamma}z)^{\frac{3}{2}}}.$$

Sie hat auf dem Einheitskreise die singulären Stellen

$$z_1=e^{-i\gamma},\quad z_2=e^{i\gamma},\quad z_3=1.$$

Der Pol $z_3=1$ kommt aber, nach Darboux, bei der Frage nach dem Hauptteil des Koeffizienten von $z^n$ nicht in Betracht, weil hier die Funktion $\mu(z)$ von niedrigerer Ordnung unendlich wird als an den Stellen $z_1$, $z_2$. Man hat jetzt also

$$\bar{\mu}(z)=\frac{1+e^{-i\gamma}}{(1-e^{-i\gamma})\,(1-e^{-2i\gamma})^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{(1-e^{i\gamma}z)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+\frac{1+e^{i\gamma}}{(1-e^{i\gamma})\,(1-e^{2i\gamma})^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{(1-e^{-i\gamma}z)^{\frac{3}{2}}}$$

nach Potenzen von $z$ zu entwickeln. Dies liefert die asymptotische Formel

$$(29)\quad s'_n(\gamma) = \frac{\sigma'_n(\gamma)}{n+1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{4\cos\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{\pi}\sin\frac{\gamma}{2}\cdot(2\sin\gamma)^{\frac{3}{2}}}\cdot\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\gamma-\frac{5\pi}{4}\right]+\delta'_n(\gamma)\right),$$

wo

$$\lim_{n=\infty}\delta'_n(\gamma)=0$$

für

$$\varepsilon \leqq \gamma \leqq \pi-\varepsilon, \qquad (\varepsilon>0).$$

Diese asymptotische Formel für die Hölderschen Mittel erster Ordnung $s'_n(\gamma)$ der Reihe (5) zeigt, daß auch die $s'_n(\gamma)$ veränderliches Vorzeichen haben im Intervalle $(0, \pi)$. Die Anzahl der Vorzeichenwechsel wächst mit $n$ ins Unendliche.

Ist $0<\gamma<\pi$, so zeigt Formel (29), daß

$$\lim_{n=\infty} s'_n(\gamma)=0;$$

d. h. die Reihe (5) ist im Innern des Intervalles $(0, \pi)$ überall einfach summierbar und ihre Summe ist gleich 0. Diese Eigenschaft hört aber an der Stelle $\gamma=\pi$ auf. Dort geht die Reihe (5) in

$$1-3+5-7+\cdots$$

über, die nicht einfach summierbar ist. In der Tat ist eine notwendige Bedingung für die einfache Summierbarkeit einer unendlichen Reihe

$$\sum_{n=\infty}^{\infty} u_n,$$

daß

$$\lim_{n=\infty}\frac{|u_n|}{n}=0.$$

Hier ist aber

$$\lim_{n=\infty}\frac{|u_n|}{n}=\lim_{n=\infty}\frac{2n+1}{n}=2.$$

Es ist interessant, mittels der Darbouxschen Methode einen asymptotischen Ausdruck für $\sigma''_n(\gamma)$ zu suchen. Die erzeugende Funktion dieser Folge ist

$$v(z)=\frac{1}{(1-z)^3}\cdot\frac{1-z^2}{(1-2z\cos\gamma+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1+z}{(1-z)^2(1-e^{i\gamma}z)^{\frac{3}{2}}(1-e^{-i\gamma}z)^{\frac{3}{2}}}.$$

Diese hat am Einheitskreise die singulären Stellen

$$z_1=e^{-i\gamma},\quad z_2=e^{i\gamma},\quad z_3=1.$$

Jetzt fallen aber die Stellen $z_1$, $z_2$ als Unendlichkeitsstellen niedrigerer Ordnung neben $z_3 = 1$ weg. Die zu entwickelnde Funktion ist jetzt einfach

$$\bar{v}(z) = \frac{2}{(1-e^{i\gamma})^{\frac{3}{2}}(1-e^{-i\gamma})^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{4\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^3} \cdot \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Da nun

$$\bar{v}(z) = \frac{1}{4\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^3}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,z^n,$$

so ist

$$\frac{\sigma_n''(\gamma)}{\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}} = \frac{2}{n+2}\left(\frac{1}{4\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^3} + \delta_n''(\gamma)\right), \tag{30}$$

wo

$$\lim_{n=\infty} \delta_n''(\gamma) = 0$$

für

$$(\varepsilon \leqq \gamma \leqq \pi - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0).$$

*Die asymptotische Formel* (30) *zeigt, daß die* $\sigma_n''(\gamma)$ *schon wesentlich anderen Charakter haben als die* $\sigma_n(\gamma)$ *und* $\sigma_n'(\gamma)$.

Leider kann man aber durch diese asymptotische Formel die $\sigma_n''(\gamma)$ nur für ein Intervall $(\varepsilon, \pi-\varepsilon)$ beherrschen.*) Deswegen war ich gegenötigt, bei Ableitung der Theoreme I und II des § 2 für $\sigma_n''(\gamma)$ denjenigen Weg einzuschlagen, den ich eben in § 2 gezeigt habe.

*Jedenfalls aber kommt durch die Anwendung der Darbouxschen Methode die Tatsache zum Vorschein, daß bei der Laplaceschen Reihe die Hölderschen Mittel zweiter Ordnung eine ausgezeichnete Rolle spielen müssen.*

## § 8.

## Schlußbemerkungen. Probleme.

Die Hölderschen Mittel erster Ordnung der Fourierschen Reihe habe ich, in einigen Arbeiten, zur Lösung verschiedener Fragen angewendet. Mit Hilfe der Hölderschen Mittel zweiter Ordnung der Laplaceschen Reihe lassen sich nun gewisse analoge Fragen behandeln, die ich aber bei einer anderen Gelegenheit auseinandersetzen möchte.

Weiter habe ich in dieser Arbeit die Konvergenz der $s_n''(\theta, \varphi)$ nur an einer solchen Stelle $(\theta, \varphi)$ bewiesen, wo die Funktion $f(\theta, \varphi)$ stetig ist. Die Folge $s_n''(\theta, \varphi)$ ist aber auch an solchen Stellen $(\theta, \varphi)$ der Einheitskugel konvergent, wo die Funktion eine Diskontinuität aufweist, welche

*) Hier ist zwar $\varepsilon$ eine beliebig kleine positive Größe. Aber mit abnehmendem $\varepsilon$ muß $n$ vergrößert werden.

der Diskontinuität des „gewöhnlichen Sprunges“ bei einer Funktion einer Variabeln entspricht. Dies ist leicht zu beweisen.

Zum Schlusse möchte ich noch einige Fragen formulieren, die sich dem Leser dieser Arbeit gewiß von selbst aufdrängen. Diese lauten folgendermaßen:

a) Existiert eine Funktion $f(\theta, \varphi)$, die auf der ganzen Einheitskugel stetig ist, und für welche die Hölderschen Mittel *nullter* Ordnung ihrer Laplaceschen Reihe

$$s_0(\theta, \varphi), \quad s_1(\theta, \varphi), \cdots, s_n(\theta, \varphi), \cdots$$

an einzelnen Stellen der Einheitskugel eine divergente Folge bilden? *)

b) Existiert eine Funktion $f(\theta, \varphi)$, die auf der ganzen Einheitskugel stetig ist und für welche die Hölderschen Mittel *erster* Ordnung ihrer Laplaceschen Reihe

$$s_0'(\theta, \varphi), \quad s_1'(\theta, \varphi), \cdots, s_n'(\theta, \varphi), \cdots$$

an einzelnen Stellen der Einheitskugel eine divergente Folge bilden? **) Überhaupt sollte neben der Konvergenztheorie der Hölderschen Summen nullter Ordnung der Laplaceschen Reihe auch diejenige der ersten Ordnung entwickelt werden. [Diejenige der zweiten Ordnung gibt vorliegende Arbeit.]

c) Existiert eine Funktion $f(\theta, \varphi)$, die an einer Stelle $(\theta_0, \varphi_0)$ der Einheitskugel absolut integrabel unendlich wird und sonst überall regulär analytisch ist, für welche die Folge $s_n'(\theta, \varphi)$ überall divergiert?

d) Existiert eine Funktion, die an einer Stelle $(\theta_0, \varphi_0)$ der Kugel integrabel (aber *nicht absolut* integrabel) unendlich wird und für welche selbst die Folge $s_n''(\theta, \varphi)$ überall divergiert? ***)

Um diese Fragen zu lösen, wird es gewiß zweckmäßig sein zu versuchen, Legendresche Reihen (d. h. spezielle Laplacesche Reihen) der verlangten Eigenschaft zu bilden.

Klausenburg, den 17. September 1908.

---

*) Die analoge Frage für die Fouriersche Reihe wurde bekanntlich zuerst von Du Bois Reymond gelöst.

**) Für diese Frage gibt es bei der Fourierschen Reihe *kein* Analogon, weil für sie schon die $s_n'(x)$ gleichmäßig zu $f(x)$ konvergieren. (Math. Annalen, Bd. 58.)

***) Bei der Fourierschen Reihe sind die Verhältnisse im Falle einer unendlich werdenden Funktion geklärt. Ist $f(x)$ an $x = x_0$ unendlich (sonst regulär analytisch), dann ist die Folge $s_n(x)$ konvergent, wenn $f(x)$ absolut integrabel ist. Die Folge $s_n(x)$ kann divergieren, wenn $f(x)$ bedingt integrabel ist [Riemann]. Die Folge $s_n'(x)$ konvergiert aber immer, es sei $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ absolut integrabel oder nur bedingt integrabel. (Math. Annalen, Bd. 58.)