Neuer Beweis des Satzes, dass eine geschlossene convexe Fläche sich nicht verbiegen lässt.

Von

HEINRICH LIEBMANN in Leipzig.

§ 1.

Einleitung.

1. Gedankengang des früheren Beweises.

In meiner Habilitationsschrift*) habe ich einen Beweis gegeben für den zuerst von Minding ausgesprochenen Satz, dass es unmöglich ist, eine geschlosse convexe Fläche zu verbiegen. Der Beweis, welcher sich auf infinitesimale Verbiegungen**) beschränkte, und bei dem auch über die Natur der Fläche noch verschiedene Voraussetzungen gemacht wurden***),

*) Ueber die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung. Leipzig 1899 und Math. Annalen LIII. (Im Folgenden citirt mit V.)

**) Eine klare Auseinandersetzung über den Begriff „infinitesimale Verbiegung" findet man bei Darboux, Theorie des surfaces IV, Paris 1896 p. 3:

***) V. § 1, Nr. 2—3.

die wir auch im Folgenden beibehalten werden, beruhte auf einer indirecten Schlussweise. Es wurde nämlich eine gewisse Hülfsfläche, die Verbiegungsfläche*) eingeführt und gezeigt, dass wenn die Verbiegung keine Bewegung war, die Verbiegungsfläche die beiden Eigenschaften in sich vereinigen musste, im allgemeinen negative Krümmung zu besitzen und dabei ganz im Endlichen zu bleiben.**) Hierin lag ein Widerspruch***), aus dem sich dann ergab, dass die Verbiegung nur eine Bewegung sein konnte.

Die als Hülfsmittel benützte Verbiegungsfläche bot indessen durch die auf ihr gelegenen Punkte „seminegativer Krümmung"†) besondere Schwierigkeiten und der Beweis, dass nur die Bewegung als infinitesimale Verbiegung übrig bleiben konnte, erforderte daher sehr complicirte Hülfsmittel.††)

2. Neue Beweismethode.

Im Folgenden wird nun ein Beweis erbracht, welcher die früheren Schwierigkeiten vermeidet, indem es jetzt gelingt, statt der früheren Verbiegungsfläche eine andere Hülfsfläche zu benützen, welche wir sogleich kennen lernen werden. Diese Fläche, die wir mit dem Namen „Polfläche der inf. Verbiegung" oder kurzweg „Polfläche" bezeichnen wollen, hat, wie wir sehen werden, die Eigenschaft, sich im Fall der Bewegung auf einen einzigen Punkt zu reduciren. Wenn dagegen die Verbiegung eine wirkliche Verbiegung, nicht nur eine Bewegung ist, so wird sich zeigen, dass die Polfläche in allen Punkten *ausnahmslos* den Charakter der negativen Krümmung besitzt, was sich mit ihrer anderen Eigenschaft, ganz im Endlichen zu bleiben, nicht vereinigen lässt. Wir werden also hier auf denselben Widerspruch geführt, wie bei dem früheren Beweis — nur mit der Vereinfachung, dass die lästigen Punkte seminegativer Krümmung ganz wegfallen.

§ 2.

Die Polfläche.

1. Verbiegung einer Fläche und eines damit starr verbundenen Strahlensystems.

Um die Entstehung der Polfläche zu beschreiben, müssen wir erst uns den dabei vorkommenden Begriff der *Verbiegung eines Strahlensystems* klar machen, welches an eine Fläche geheftet ist.

---

*) V. § 4 Nr. 1.
**) V. § 4, Nr. 2—3.
***) V. § 2, Nr. 3.
†) V. § 4, Nr. 5.
††) V. § 2, Nr. 4.

Erinnern wir uns zunächst an die charakteristischen Eigenthümlichkeiten einer Flächenverbiegung. Dabei ändern sich die geodätischen Entfernungen auf der Fläche nicht, wie überhaupt die Länge eines auf der Fläche gelegenen Curvenstückes ungeändert bleibt. Ein einzelner Flächenpunkt wird bewegt und die von ihm ausgehenden, in der Fläche gelegenen Richtungen ebenfalls, jedoch so dass ihre relative Lage ungeändert bleibt: Zieht man in einem Punkt der Fläche das Büschel der Tangenten, führt man sodann die Verbiegung aus und zieht nachher in den entsprechenden Richtungen die Tangenten, so geht das Tangentenbüschel aus dem ersten hervor durch einfache Bewegung*). — Wenn nun ein System von Strahlen vorliegt, welche von der Fläche ausgehen, so kann man die Fläche verbiegen und dabei dem einzelnen Strahl eine solche Bewegung vorschreiben, dass die Neigungen, welche er gegen die in der Tangentialebene seines Anfangspunktes auf der Fläche gelegenen Richtungen hat, *alle* ungeändert bleiben. Das ist möglich, weil eben die relativen Lagen d. h. die Winkel, welche diese verschiedenen Richtungen mit einander bilden, ungeändert bleiben. Es genügt zu fordern, dass seine Richtung gegen zwei Tangentenrichtungen ungeändert bleibt, dann ändern sich die übrigen von selbst nicht.

*Unter der Verbiegung eines von einer Fläche ausgehenden Strahlensystems wollen wir also eine Transformation verstehen, bei der der einzelne Strahl so bewegt wird, dass er seine Richtung gegen die der Fläche in seinem Ausgangspunkt zugehörigen durch die Verbiegung geänderten Tangentenrichtungen beibehält.***)

Wir wollen diese Bewegung auch bezeichnen als eine solche, wo *der einzelne Strahl mit der Fläche starr verbunden bleibt in seinem Ausgangspunkt.*

Als Beispiel einer solchen Verbiegung sei folgendes genannt: Die Normalen einer Fläche welche verbogen wird, bilden ein Strahlensystem, welches aus dem System der Normalen, welche die Fläche vorher besass, durch Verbiegung hervorgegangen ist.

2. Die Polfläche einer infinitesimalen Verbiegung.

Die Polfläche nun wird durch Verbiegung eines gewissen mit der zu verbiegenden Fläche zusammenhängenden Strahlensystems gewonnen. Wir betrachten die Fläche in der Anfangslage und verbinden die Punkte derselben durch gerade Linien mit einem im *Innern* der Fläche, aber sonst

---

*) Man kann sich dies anschaulich klar machen: Versehen wir das Tangentenbüschel vor und nach der Verbiegung mit den Farben des Spectrums, so lassen sich die beiden Spectra durch Bewegung zur Deckung bringen.

**) Von dieser Verbiegung eines Strahlensystems macht z. B. Bianchi Gebrauch in seiner Arbeit: Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura constanta. (Annali di Mat. Ser. III, T. 3, p. 199.)

beliebig angenommenen Pol P,[1] dessen Coordinaten mit a, b, c bezeichnet werden mögen. Sodann denken wir uns die Verbindung der verschiedenen Strahlen in P aufgehoben und verbiegen die Fläche. Die einzelnen Strahlen mögen dabei mit der Fläche starr verbunden bleiben; es werden daher die Endpunkte der Strahlen, die vorher alle in P zusammenfielen, jetzt im allgemeinen nicht mehr zusammenfallen. Bei einer infinitesimalen Verbiegung speciell, welche durch die Formeln

$$x_1 = x + \varepsilon\xi,$$
$$y_1 = y + \varepsilon\eta,$$
$$z_1 = z + \varepsilon\zeta$$

gegeben ist, wird der Endpunkt $a\,b\,c$ des vom Punkt $x\,y\,z$ ausgehenden Strahles übergehen in

$$a_1 = a + \varepsilon\alpha,$$
$$b_1 = b + \varepsilon\beta,$$
$$c_1 = c + \varepsilon\gamma$$

wo $\alpha\beta\gamma$ ebenso wie $\xi\eta\zeta$ analytische Functionen von x und y sind, welche sich mit Hülfe von $\xi\eta\zeta$ berechnen lassen (vgl. die nächste Nummer). Diese $\alpha\beta\gamma$ nun tragen wir als rechtwinklige Coordinaten in irgend einem rechtwinkligen Coordinatensystem auf und erhalten auf diese Weise die *Polfläche.* (Eigentlich dürfte man hier das Wort „Fläche" noch nicht gebrauchen, da ja erst die Rechnung zeigen wird, dass das Gebilde eine Fläche und nicht etwa eine Curve ist).

Die Polfläche giebt also die Werthe der infinitesimalen Verschiebungen $\alpha\beta\gamma$ an, welche die verschiedenen, vor der Verbiegung im Pol vereinigten Endpunkte der Strahlen des mit den Flächenpunkten starr verbundenen Systems erleiden.

3. Formeln für die Coordinaten der Polfläche.

Wenn wir jetzt die Formeln für die Polfläche aufstellen, so haben wir in diesen Formeln zweierlei Forderungen auszudrücken: *erstens,* dass die Länge eines jeden Strahles ungeändert bleibt und *zweitens,* dass er mit der Fläche starr verbunden bleibt, und dazu genügt es nach § 2, Nr. 1, dass seine Neigung gegen zwei in der Fläche gelegene Curvenrichtungen ungeändert bleibt. Wir nehmen hierfür am besten diejenigen Curven, welche durch die Ebenen $x =$ constans und $y =$ constans aus der Fläche vor der Verbiegung herausgeschnitten werden.

Die Forderung nun, dass die Entfernung

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

ungeändert bleibt, dass also

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=(x-a+\varepsilon(\xi-\alpha))^2+(y-b+\varepsilon(\eta-\beta))^2 \\ +(z-c+\varepsilon(\zeta-\gamma))^2$$

sein soll, führt auf die Gleichung

$$\text{(A)} \qquad (x-a)(\xi-\alpha)+(y-b)(\eta-\beta)+(z-c)(\zeta-\gamma)=0.$$

Um die beiden anderen Forderungen auszudrücken, berechnen wir uns die Cosinus der beiden Winkel, welche der Strahl vor und nach der Verbiegung mit dem oben genannten beiden Richtungen einschliesst.

Der Strahl selbst hat vor der Verbiegung folgende drei Neigungscosinus:

$$\frac{x-a}{r}, \quad \frac{y-b}{r}, \quad \frac{z-c}{r}$$

und nach der Verbiegung:

$$\frac{x-a+\varepsilon(\xi-\alpha)}{r}, \quad \frac{y-b+\varepsilon(\eta-\beta)}{r}, \quad \frac{z-c+\varepsilon(\zeta-\gamma)}{r}.$$

In diesen letzteren Formeln ist schon davon Gebrauch gemacht, dass r ungeändert bleibt; sie würden ohne Benützung dieses Umstandes sich complicirter gestalten.

Die Neigungen der Curve $y=\text{const.}=y_0$, welche auf der Fläche liegt, sind gegeben durch die Cosinus:

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad 0, \quad \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

wo $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ ist.

Nach der Verbiegung verwandelt sich diese Curve in die Curve mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x &&+\varepsilon\xi(x,y_0), \\ \bar{y} &= y_0 &&+\varepsilon\eta(x,y_0), \\ \bar{z} &= z(x,y_0) &&+\varepsilon\zeta(x,y_0) \end{aligned}$$

deren Neigungscosinus die Werthe haben

$$\frac{1+\varepsilon\xi_x}{W}, \quad \frac{\varepsilon\eta_x}{W}$$

und

$$\frac{p+\varepsilon\zeta_x}{W},$$

wo

$$W^2=(1+\varepsilon\xi_x)^2+(\varepsilon\eta_x)^2+(p+\varepsilon\zeta_x)^2$$

ist.

Entwickelt man nun die Werthe weiter, indem man nur die Glieder erster Ordnung in ε beibehält, so kommt

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left(1+\frac{\varepsilon p(p\xi_x-\zeta_x)}{1+p^2}\right), \quad \frac{\varepsilon\eta_x}{\sqrt{1+p^2}}, \\ \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left(p+\frac{\varepsilon(\zeta_x-p\xi_x)}{1+p^2}\right).$$

Ebenso sind die Neigungen der auf der Fläche gelegenen Curve $x = x_0$ (= constans) vor der Verbiegung gegeben durch:

$$0, \quad \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{1+q^2}},$$

und sie ändern sich durch die Verbiegung um in

$$\frac{\varepsilon \xi_y}{\sqrt{1+q^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}\left(1 + \frac{\varepsilon q (q\eta_y - \zeta_y)}{1+q^2}\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}\left(q + \frac{\varepsilon(\zeta_y - \cancel{\zeta_y})}{1+q^2}\right). \quad q\eta_y$$

Mit Hülfe dieser Formeln berechnet man leicht die Cosinus der beiden Winkel, welche der Strahl mit den beiden Curven auf der Fläche bildet.

Sie ergeben sich zu

$$\frac{1}{r\sqrt{1+p^2}}((x-a) + p(z-c)),$$

und

$$\frac{1}{r\sqrt{1+q^2}}((y-b) + q(z-c)).$$

Berechnet man nun mit Hülfe der entwickelten Formeln die Aenderungen, welche diese Grössen durch die Verbiegung erleiden, indem man die Glieder von höheren als der ersten Ordnung in ε fortlässt, und verlangt, dass die Aenderungen verschwinden, so gelangt man zu den Relationen:

(B)
$$\frac{p(x-a)(p\xi_x - \zeta_x)}{(1+p^2)} + \xi - \alpha + \eta_x(y-b)$$
$$+ p(\zeta - \gamma) + (z-c)\frac{(\zeta_x - p\xi_x)}{1+p^2} = 0$$

und

(C)
$$(x-a)\xi_y + (\eta - \beta) + \frac{q(y-b)(q\eta_y - \zeta_y)}{1+q^2}$$
$$+ q(\zeta - \gamma) + \frac{(z-c)(\zeta_y - q\eta_y)}{1+q^2} = 0.$$

Hierzu treten noch diejenigen Formeln, welche besagen, dass die $\xi\,\eta\,\zeta$ eine infinitesimale Verbiegung definiren. Sie lauten*)

(D)
$$\xi_x + p\zeta_x = 0,$$
$$\eta_y + q\zeta_y = 0,$$
$$\xi_y + \eta_x + p\zeta_y + q\zeta_x = 0.$$

Die Formeln (A) bis (D) definiren zusammen eine *Polfläche;* es sind dabei durchaus auch die Formeln (D) nothwendig, weil sie erst besagen, dass

*) V. § 1, Nr. 2.

die $\xi\eta\zeta$ wirklich eine Verbiegung und nicht etwa irgend eine andere Transformation ergeben. Nur dann aber, wenn dies der Fall ist, definiren (A), (B), (C) eine Polfläche, die zu einer Verbiegung gehört.

Die Gleichungen (A), (B), (C) bestimmen übrigens $\alpha\beta\gamma$ wirklich; denn sie sind linear und ihre Determinante hat gerade den Werth

$$(z-c)-p(x-a)-q(y-b),$$

verschwindet also nur dann, wenn abc auf der Tangentialebene der Fläche liegt, welche zum Punkte xyz gehört. Da nun aber der Pol abc der Voraussetzung nach im Inneren der convexen Fläche liegt und demnach auf keiner Tangentialebene, so kann dieser Ausdruck niemals verschwinden.

§ 3.

Infinitesimale Bewegungen.

1. Verhalten der Polfläche bei einer inf. Bewegung.

Wir wollen zeigen, dass, wenn man zu einer gegebenen infinitesimalen Verbiegung eine inf. Bewegung hinzufügt, die zu der zusammengesetzten inf. Verbiegung gehörige Polfläche aus der zur ersten gehörigen durch Verschiebung entsteht. Der Satz, welcher sich übrigens schon durch eine geometrische Ueberlegung ergiebt, ist auch analytisch leicht zu beweisen.

Es seien etwa

$$\begin{aligned}\xi_1 &= ny - mz,\\ \eta_1 &= lz - nx,\\ \zeta_1 &= mx - ly\end{aligned}$$

diejenigen Gleichungen, welche die hinzukommende infinitesimale Bewegung definiren, so lauten die Formeln der Polfläche für die zusammengesetzte inf. Transformation so

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= \alpha(x,y) + n\cdot b - m\cdot c = \alpha(x,y) + \alpha_0,\\ \bar{\beta} &= \beta(x,y) + l\cdot c - n\cdot a = \beta(x,y) + \beta_0,\\ \bar{\gamma} &= \gamma(x,y) + m\cdot a - l\cdot b = \gamma(x,y) + \gamma_0.\end{aligned}$$

Man erkennt die Richtigkeit dieser Formeln durch Substitution der berechneten Werthe in die Gleichungen (A), (B), (C), deren Lösungen ja eindeutig bestimmt sind. (Unter $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$, $\gamma(x,y)$ sind natürlich die zu der ursprünglichen inf. Verbiegung gehörigen Werthe der Coordinaten der Polfläche verstanden).

Hiermit ist also der Satz bewiesen:

Fügt man zu einer inf. Verbiegung eine inf. Bewegung hinzu, so erhält man die zugehörige Polfläche durch Verschiebung der ersten Polfläche.

Hieraus folgt beispielsweise, dass wenn man das Verhalten der Polfläche in einem Punkt untersuchen will, es gestattet ist, zu der gegebenen inf. Verbiegung irgend eine inf. Bewegung hinzuzufügen; dadurch wird die Polfläche nur verschoben, und es ändert sich weder die Krümmung noch sonst eine bei Bewegungen invariante Eigenschaft.

Eine weitere Folgerung ist der folgende Satz:

Die zu einer inf. Bewegung gehörige Polfläche ist ein Punkt.

Ist nämlich die Bewegung etwa dargestellt durch

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \varepsilon(ny - mz(x, y)), \\ y_1 &= y + \varepsilon(lz(x, y) - nx), \\ z_1 &= z + \varepsilon(mx - ly), \end{aligned}$$

so hat der betreffende Punkt die Coordinaten

$$\begin{aligned} \alpha &= nb - mc, \\ \beta &= lc - na, \\ \gamma &= ma - lb. \end{aligned}$$

2. Ist die Polfläche ein Punkt, so ist die Verbiegung eine Bewegung.

Es liegt nun sehr nahe zu vermuthen, dass auch die Umkehrung des soeben ausgesprochenen Satzes gilt: Man kann direct einen Fall angeben, wo ihre Gültigkeit evident ist. Wenn nämlich die zu verbiegende Fläche eine Kugel ist und als Pol der Mittelpunkt der Kugel gewählt wird; wenn ferner bei einer inf. Verbiegung dieser Pol wieder in einen Punkt übergeht, so ist klar, dass diese Verbiegung eine Bewegung sein muss.

Die Vermuthung bestätigt sich auch allgemein und es gilt der Satz:

Wenn die Polfläche eine inf. Verbiegung eines Ovaloïdes ein Punkt ist, so ist die Verbiegung eine Bewegung.

Der Beweis dieses Satzes selbst zerfällt wiederum in zwei Theile: wir weisen nämlich *erstens* nach, dass bei der gemachten Voraussetzung bei der inf. Verbiegung die Flächencalotte in jedem Punkte congruent bleibt, d. h. dass nicht nur (ausser dem Krümmungsmass) die mittlere Krümmung invariant bleibt, sondern auch der zu einem beliebigen Normalschnitt der Fläche gehörige Krümmungsradius. Benützt man den Begriff „Indicatrix" so kann man diese Beziehung so ausdrücken: Die Indicatrix bleibt nicht nur

---

*) Solche Verbiegungen, bei denen die mittlere Krümmung invariant ist, der zu einer bestimmten Richtung (zu einem Normalschnitt) gehörige Krümmungsradius sich aber doch ändert, sind sehr wohl bekannt (Bianchi, Flächentheorie. Deutsch von Lukat. Leipzig 1898, § 164, p. 309).

**) Bianchi, § 154, p, 103.

gleich (mit sich congruent), sondern sie dreht sich auch nicht auf der Fläche. Es ist dann *zweitens* nicht schwer hieraus zu schliessen, dass die Verbiegung nur eine Bewegung ist.

Beim Beweis des ersten Theiles unseres Satzes machen wir von einer Vereinfachung Gebrauch, welche ohne weiteres gestattet ist. Wir nehmen an, dass das Coordinatensystem zusammenfällt mit dem natürlichen Coordinatensystem*) in dem gerade betrachteten Punkt der Fläche, und wir denken uns ausserdem zu der betrachteten inf. Transformation eine solche Bewegung hinzugefügt, dass gerade der Coordinatenanfang, also der betrachtete Punkt fest bleibt. (Dies ist nach § 2, Nr. 3 erlaubt.)

Es sei nun etwa

$$z = \frac{\bar{a}x^2}{2} + \frac{\bar{b}y^2}{2} + \cdots$$

die Reihenentwickelung der Fläche in dem betrachteten Punkt, dann kann man zunächst bewirken, dass die Reihenentwickelung von ζ mit Gliedern zweiter Ordnung beginnt. (Würde ζ mit den Gliedern erster Ordnung beginnen $\zeta = \alpha x + \beta y + \cdots$, so würde man einfach die inf. Bewegung

$$x_1 = x - \varepsilon\alpha\left(\frac{\bar{a}x^2 + \bar{b}y^2}{2}\right) + \cdots,$$

$$y_1 = y - \varepsilon\beta\left(\frac{\bar{a}x^2 + \bar{b}y^2}{2}\right) + \cdots,$$

$$z_1 = z - \varepsilon(\alpha x + \beta y)$$

hinzufügen, wodurch die linearen Glieder fortfallen). Ebenso kann man bewirken, dass ξ und η mit Gliedern von nicht höherer als der zweiten Ordnung beginnen.**)

Die Gleichungen

$$\text{(D}'\text{)}\qquad \begin{aligned} &\xi_x + (\bar{a}x + \cdots)\zeta_x = 0, \\ &\eta_y + (\bar{b}y + \cdots)\zeta_y = 0, \\ &\xi_y + \eta_x + (\bar{a}x + \cdots)\zeta_y + (\bar{b}y + \cdots)\zeta_x = 0 \end{aligned}$$

lehren, dass dann ξ und η mit Gliedern dritter Ordnung beginnen.

Wenn also die Polfläche ein Punkt ist, so können wir — durch Hinzufügung einer geeigneten Bewegung, was nach § 3, Nr. 1 erlaubt ist — es erreichen, dass $\zeta = \zeta^{(2)} + \cdots$,

$$\xi = \xi^{(3)} + \cdots, \quad \eta = \eta^{(3)} + \cdots$$

wird, wo der obere Index die Glieder niedrigster Ordnung der betreffenden Reihenentwickelung bedeutet.

---

*) V. § 2, Nr. 1.

**) Vgl. die Anfänge der Reihenentwickelungen von ξ, η und ζ. (V. § 4, Nr. 3.)

Bei all diesen inf. Bewegungen, welche wir der gegebenen inf. Verbiegung hinzugefügt haben, hat sich der Punkt, welcher die Polfläche der Voraussetzung nach darstellt, nur verschoben (§ 3, Nr. 1) so dass $\alpha\beta\gamma$ neue *Constanten* werden, und wir wollen nun seine Lage berechnen, indem wir in (A), (B) und (C) für x und y die speciellen Werthe Null einsetzen. Dadurch bekommen wir

$$\begin{aligned} a\alpha + b\beta + c\gamma &= 0, \\ \alpha &= 0, \\ \beta &= 0. \end{aligned}$$

Also ist auch $\gamma = 0$; weil nämlich c von Null verschieden ist, es würde sonst gegen die Voraussetzung der Pol abc in der Tangentialebene des betrachteten Flächenpunktes liegen.

Daraus aber, dass $\alpha\beta\gamma$ alle drei verschwinden, folgt mit Hülfe von (B) und (C) wieder, dass

$$\zeta_x^{(2)} = 0 \quad \text{und} \quad \zeta_y^{(2)} = 0$$

ist. ζ beginnt also mit Gliedern von keiner niedrigeren als der dritten Ordnung, und demnach wegen (D′) ξ und η mit Gliedern von nicht niedrigerer als der vierten Ordnung.

Dieses Ergebniss nun, zu dem wir gelangt sind auf Grund der Annahme, dass die Polfläche ein Punkt ist, führt direct zum Ziel.

Wir können jetzt sofort zeigen, dass die einzelnen Krümmungsradien sich nicht geändert haben.

Es genügt, dies zu zeigen für zwei Normalschnitte, da wegen der Euler'schen Formel dann auch alle anderen Normalschnitte bei der Verbiegung ihre Krümmungsradien nicht ändern.

Dass nun in der That die Krümmungsradien sich nicht ändern, folgt eigentlich schon unmittelbar daraus, dass von den drei Functionen ξ, η und ζ keine mit Gliedern von niedrigerer als der dritten Ordnung beginnt. Immerhin wollen wir der Vollständigkeit halber den Werth des Krümmungsradius hinschreiben, welcher aus dem Krümmungsradius des Hauptschnittes $y = 0$ im Punkte $x = 0$ $y = 0$ bei der Verbiegung hervorgeht. Der Werth desselben ist

$$\frac{U^{\frac{3}{2}}}{V^{\frac{1}{2}}},$$

wo

$$U = (p + \varepsilon\zeta_x)^2 + (1 + \varepsilon\xi_x)^2 + \varepsilon^2\eta_x^2$$

und

$$\begin{aligned} V = & ((1 + \varepsilon\xi_x)\,\varepsilon\eta_{xx} - \varepsilon\eta_x\,\varepsilon\xi_{xx})^2 \\ & + (\varepsilon\eta_x(r + \varepsilon\zeta_{xx}) - \varepsilon\eta_{xx}(p + \varepsilon\zeta_x))^2 \\ & + ((p + \varepsilon\zeta_x)\,\varepsilon\xi_{xx} - (1 + \varepsilon\xi_x)(r + \varepsilon\zeta_{xx}))^2. \end{aligned}$$

Hier bedeuten $p\,q\,r\,s\,t$ in bekannter Weise die ersten und zweiten Differentialquotienten von z.

Für
$$x = y = 0$$
bleibt
$$U = 1,$$
$$V = \bar{a}^2$$
also
$$\frac{U^{\frac{3}{2}}}{V^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\bar{a}}.$$

Dies ist aber auch der Werth des Krümmungsradius vor der Verbiegung. Genau so kann man zeigen, dass auch der Werth des Krümmungsradius des anderen Hauptschnittes ungeändert bleibt, und damit alle andern.

Diese Betrachtung können wir mit demselben Ergebniss in jedem anderen Punkt der convexen Fläche anstellen, indem wir immer eine geeignete Bewegung zu der gegebenen Verbiegung hinzufügen, wodurch die Entscheidung, ob die gegebene Verbiegung eine Bewegung ist, ja nicht beeinflusst wird, sondern nur die Rechnung vereinfacht.

In der That also ist hiermit der Satz bewiesen:

Wenn die Polfläche sich auf einen Punkt reducirt, so bleiben die Krümmungsradien aller Normalschnitte ungeändert.

Hieraus folgt dann auch der zweite Theil des Satzes mit Leichtigkeit. Führen wir nämlich auf der Fläche ein bestimmtes krummliniges Coordinatensystem ein, wo das Quadrat des Bogenelementes bestimmt ist durch
$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \text{*)}$$
verstehen wir ferner unter $D\,D'\,D''$ in bekannter Weise**) die *Gauss*'schen Fundamentalgrössen zweiter Ordnung, so ist der Krümmungsradius desjenigen Normalschnittes, welcher die Fläche im Punkte uv in einer durch die Festsetzung $\frac{dv}{du} = v'$ bestimmten Richtung trifft, gegeben durch:
$$R = -\frac{E + 2Fv' + Gv'^2}{D + 2Dv' + D''v'^2}. \text{***)}$$

Da nun EFG bei der Verbiegung bekanntlich sich nicht ändern, da ferner R für dieselben Werthe von v' bei der verbogenen Fläche denselben Werth hat, so bleiben auch D, D', D'' ungeändert. Dann ist aber die Verbiegung nothwendig eine Bewegung†).

*) Bianchi § 33, p. 61.

**) Bianchi § 46, p. 87.

***) Bianchi § 53. p. 102.

†) Bianchi § 48, p. 92.

Also: Aus dem Umstand, dass die Polfläche ein Punkt ist, ergiebt sich mit Benützung des Satzes, dass man eine beliebige infinitesimale Bewegung hinzufügen darf, zunächst die Eigenschaft der Verbiegung, dass alle Normalschnitte ihre Krümmungsradien beibehalten und hieraus dann, dass die Verbiegung thatsächlich eine Bewegung ist.

Hiermit ist der zu Anfang ausgesprochene Satz bewiesen.

§ 4.

Die negative Krümmung der Polfläche. Folgerung.

1. Die negative Krümmung der Polfläche.

Wir wollen nun zeigen, dass die Polfläche, wenn sie sich nicht auf einen Punkt reducirt, überall negative Krümmung oder doch den Charakter der negativen Krümmung hat. Wir fügen nun wieder eine solche infinitesimale Bewegung hinzu (§ 3, 1), dass ζ mit Gliedern zweiter Ordnung, ξ und η mit Gliedern dritter Ordnung beginnen.

Dadurch erhalten wir für die Glieder niedrigster Ordnung von α, β und γ die Formeln

$$\alpha = c\zeta_x^{(m)} \text{ (aus } B),$$

$$\beta = c\zeta_y^{(m)} \text{ (aus } C),$$

$$\gamma = -\frac{1}{c}(a\alpha + b\beta).$$

Wenn also ζ mit Gliedern m^{ter} Ordnung beginnt, so wird die Polfläche dargestellt durch die obigen Reihenentwickelungen, von denen wir nur die Glieder niedrigster Ordnung hingeschrieben haben. Wenn $m = 2$ ist, so sehen wir, dass die Fläche eine bestimmte Tangentialebene hat

$$ax + by + cz = 0.$$

Diese Tangentialebene schneidet aber die Fläche, da die Form

$$a\alpha^{(2)} + b\beta^{(2)} + c\gamma^{(2)} = c\zeta^{(2)}$$

indefinit ist.*) Man erhält diese Relation für die Glieder zweiter Ordnung aus (A), wenn man berücksichtigt, dass $a\alpha^{(1)} + b\beta^{(1)} + c\gamma^{(1)} = 0$ angenommen ist. Aus dem Umstande, dass $\zeta^{(2)}$ bez. $a\alpha^{(2)} + b\beta^{(2)} + c\gamma^{(2)}$ indefinit ist, folgt aber eben, dass die Tangentialebene von der Polfläche geschnitten wird; d. h. dass dieselbe negative Krümmung hat.

Betrachten wir nun weiter die singulären Punkte, bei denen ζ mit Gliedern von dritter oder höherer Ordnung beginnt, so können wir in

*) V. § 4, Nr. 2.

diesen Punkten den Satz benützen, dass sowohl $\zeta_x^{(m)}$ wie $\zeta_y^{(m)}$ wie $\zeta^{(m)}$ immer eine indefinite Form ist.*)

Jede Form

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma = c\left(a_1\zeta_x^{(m)} + b_1\zeta_y^{(m)}\right) - \left(aa_1\zeta_x^{(m)} + bb_1\zeta_y^{(m)}\right)$$

ist daher ebenfalls indefinit,**) wenn nicht etwa $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ ist. Ist dies aber der Fall, so beginnt die Reihenentwickelung von

$$a\alpha + b\beta + c\gamma$$

mit dem Gliede

$$c\zeta^{(m)},$$

was indefinit ist.

Hieraus folgt, dass jede Ebene, welche durch den betrachteten Punkt der Polfläche hindurchgeht, die Polfläche schneidet.

Wir haben also, indem wir uns einer früher eingeführten***) Ausdrucksweise bedienen, den folgenden Satz erhalten:

Die Polfläche hat überall negative Krümmung oder doch den Charakter der negativen Krümmung.

2. Folgerung.

Der Voraussetzung nach sind $\xi\eta\zeta$ und daher auch $\alpha\beta\gamma$ analytische Functionen von x und y, die in dem betrachteten Bereich endlich bleiben. Die Polfläche ist also, wenn sie sich nicht auf einen Punkt reducirt, eine ganz im Endlichen gelegene Fläche negativer Krümmung. Eine solche Fläche giebt es aber nicht, die Polfläche muss sich also auf einen Punkt reduciren und demnach muss wegen § 3, Nr. 2 die Verbiegung eine Bewegung sein.

Damit ist der Beweis des aufgestellten Satzes vollendet:

Eine geschlossene convexe Fläche kann nicht verbogen werden. —

Der Beweis wurde hier unter denselben Voraussetzungen wie früher geführt, er ist indessen dadurch weit befriedigender, dass die Polfläche nur Punkte negativer Krümmung hat, und die Punkte seminegativer Krümmung überhaupt nicht auftreten.

Leipzig, im Januar 1900.

---

*) V. § 4, Nr. 3.

**) Da nämlich $\bar{a}\,\frac{\partial^2\zeta^{(m)}}{\partial x^2} + \bar{b}\,\frac{\partial^2\zeta^{(m)}}{\partial y^2} = 0$, so erfüllt auch $a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma$ diese Relation, ist also nach V. § 3, Nr. 4 indefinit.

***) V. § 2, Nr. 2.