Ueber eine Eigenschaft der partiellen Differentialgleichungen.

Von

LEO KÖNIGSBERGER in Wien.

Sei eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln gegeben

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \tag{1}$$

oder

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda} + f_1\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-1} + \cdots + f_{\lambda}\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0, \tag{2}$$

worin die Functionen $f_1, f_2, \cdots, f_\lambda$ rationale Functionen der Grössen $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}$ sind, und habe dieselbe ein particuläres Integral z_1 mit einer anderen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \tag{3}$$

oder

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\mu} + F_1\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\mu-1} + \cdots + F_{\mu}\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \tag{4}$$

gemein, so wird, wenn man mit den linken Seiten der Gleichungen (2) und (4), als Polynome in $\frac{\partial z}{\partial y}$ aufgefasst, nach der Methode der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers verfährt, die Operation entweder zu einem gemeinsamen Theiler führen, welcher ein ganzes Polynom in $\frac{\partial z}{\partial y}$ ist, dessen Coefficienten rational aus $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}$ zusammengesetzt sind, oder es wird sich ein Rest ergeben, der selbst eine rationale Function von $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}$ ist. Im ersten Falle würde, wenn $\lambda \leq \mu$ angenommen wird, der Grad des grössten gemeinschaftlichen Theilers in Bezug auf $\frac{\partial z}{\partial y}$ kleiner oder gleich λ sein, im zweiten Falle müsste, da z_1 ein den Gleichungen (2) und (4) gemeinsames Integral sein sollte, eben diese Function eine rationale Function von $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}$ verschwinden lassen d. h. das Integral einer Differentialgleichung von der Form sein

$$\varphi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0. \tag{5}$$

Nehmen wir somit an, dass die Gleichung (2) in Bezug auf $\frac{\partial z}{\partial y}$ mit Adjungirung der Grössen $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}$ algebraisch irreductibel ist, und dass ferner das den Gleichungen (2) und (4) gemeinsame Integral nicht schon einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in z und x genügt, in welcher y nur als Parameter in algebraischer Verbindung erscheint, so wird bei der oben vollzogenen Operation der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers das Polynom (2) ganz in dem Polynome (4) enthalten sein müssen, und somit jedes Integral der Differentialgleichung (1) auch der Differentialgleichung (3) genügen. Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Wenn zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln ein Integral gemein haben, und es ist einerseits die eine dieser beiden Differentialgleichungen in Bezug auf den Differentialquotienten nach der einen Variabeln in algebraischem Sinne irreductibel, andererseits das gemeinsame Integral so beschaffen, dass es nicht einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung nach der anderen unabhängigen Variabeln genügt, in welcher die erste unabhängige Variable algebraisch enthalten ist, so wird die eine Differentialgleichung alle Integrale mit der anderen gemein haben.

So hat z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z, \tag{6}$$

deren allgemeines Integral durch

$$z = e^x \varphi(y - x) \tag{7}$$

dargestellt wird, worin φ eine willkürliche Function bedeutet, das durch Specialisirung von

$$\varphi(y - x) = e^{-(y-x)}$$

hervorgehende particuläre Integral

$$z_1 = e^{2x-y} \tag{8}$$

mit der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = -2z^2 \tag{9}$$

gemein; da aber das Integral (8) auch schon der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = 2z$$

genügt, so wird nicht jedes Integral von (6) auch (9) genügen müssen, wie es z. B. in der That bei dem Integral $z = e^x(y - x)$ nicht der Fall ist. Andererseits erhält man durch passende Wahl der willkürlichen Function φ das particuläre Integral der Differentialgleichung (6)

$$(10) \qquad z e^{-y} = \log z - x,$$

welches wegen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{z e^{-y} - 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2 e^{-y}}{z e^{-y} - 1}$$

auch der partiellen Differentialgleichung genügt

$$(11) \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 2z\frac{\partial z}{\partial x} + z^2}{\frac{\partial z}{\partial x} - z}\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0;$$

da nun aber z, als Function von x in (10) aufgefasst, nicht einer in y algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung Genüge leistet, weil

$$z\frac{\partial z}{\partial x}e^{-y} = \frac{\partial z}{\partial x} - z$$

oder

$$z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3$$

ist, ausserdem die Gleichung (6) in $\frac{\partial z}{\partial y}$ algebraisch irreductibel ist, so wird jedes Integral der Differentialgleichung (6) auch der Gleichung (11) genügen, wie dies z. B. für das Integral (8) der Fall ist; in der That lässt sich die linke Seite von (11) als ein Product in der Form darstellen

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} - z\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial z}{\partial x} - z}\right).$$

Behalten wir nun die Differentialgleichung (1) bei, und habe dieselbe mit einer Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$(12) \qquad F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^m z}{\partial x^m}, \frac{\partial^m z}{\partial x^{m-1}\partial y}, \ldots, \frac{\partial^m z}{\partial y^m}\right) = 0$$

ein Integral z_1 gemein, so folgt aus (2) durch Differentiation nach x und y

$$(13) \qquad \left[\lambda\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-1} + (\lambda - 1)f_1\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-2} + \cdots + f_{\lambda-1}\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$
$$+ \varphi_1\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-1} + \cdots$$
$$+ \varphi_\lambda\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 0$$

und

$$(14)\qquad \left[\lambda\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-1} + (\lambda-1) f_1 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-2} + \cdots + {}_{\lambda-1}\right] \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$
$$+ \psi_1\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-1} + \cdots$$
$$+ \psi_\lambda\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = 0,$$

oder mit Hülfe von (13)

$$(15)\qquad \left[\lambda\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-1} + (\lambda-1) f_1 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-2} + \cdots + f_{\lambda-1}\right] \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$
$$+ \chi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

worin φ, ψ, χ rationale Functionen bedeuten. Differentiirt man ebenso (13) und (15) nach x und y, so erhält man

$$(16)\qquad \begin{cases} \left[\lambda\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-1} + (\lambda-1) f_1 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-2} + \cdots + f_{\lambda-1}\right] \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \\ \qquad + \omega_1\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \\ \left[\lambda\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-1} + (\lambda-1) f_1 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-2} + \cdots + f_{\lambda-1}\right] \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \\ \qquad + \omega_2\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \\ \left[\lambda\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-1} + (\lambda-1) f_1 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-2} + \cdots + f_{\lambda-1}\right] \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \\ \qquad + \omega_3\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \end{cases}$$

worin ω_1, ω_2, ω_3 wiederum rationale Functionen vorstellen u. s. w.

Setzt man nun die aus (13), (15), (16) u. s. w. entnommenen Werthe von

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}, \ldots$$

in die Gleichung (12) ein, so geht dieselbe nach Multiplication mit einer entsprechenden Potenz des Ausdruckes

$$(\alpha)\qquad \lambda\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-1} + (\lambda-1) f_1 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-2} + \cdots + f_{\lambda-1}$$

in eine Gleichung von der Form über

$$(17)\qquad F_0\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^m z}{\partial x^m}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\mu}$$
$$+ F_1\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^m z}{\partial x^m}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\mu-1} + \cdots$$
$$+ F_\mu\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^m z}{\partial x^m}\right) = 0,$$

und da die Gleichungen (2) und (12), also auch (2) und (17) ein Integral gemein haben, so werden wir wieder ähnliche Schlüsse wie oben auf die beiden letzteren Gleichungen anwenden können.

Verfährt man nämlich mit den linken Seiten derselben nach der Methode der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers, so wird sich entweder allgemein für jedes z ein Polynom von der Form

$$(\beta) \qquad \varphi_0\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^m z}{\partial x^m}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^\delta + \varphi_1\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^m z}{\partial x^m}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\delta-1} + \cdots + \varphi_\delta\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^m z}{\partial x^m}\right) = 0$$

ergeben, welches ein Theiler von (2) und (17) ist, oder es bleibt bei der Fortsetzung der Division ein Rest von der Form

$$(\gamma) \qquad \omega\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^m z}{\partial x^m}\right),$$

worin ω eine rationale Function bedeutet. Nun kann aber das Polynom in $\frac{\partial z}{\partial y}$ auf der linken Seite der Gleichung (2) im algebraischen Sinne keinen Theiler von der Form (β) haben, indem einerseits die Ableitungen von z nach x genommen in (2) nicht von einer höheren als der ersten Ordnung vorkommen, andererseits (2) als in Bezug auf $\frac{\partial z}{\partial y}$ algebraisch irreductibel vorausgesetzt wird; ergiebt sich aber bei der oben angewandten Operation ein Rest von der Form (γ), so wird, wenn z_1 ein den beiden Differentialgleichungen (2) und (12), also auch — von Functionen, welche den Ausdruck (α) zu Null machen, abgesehen — ein den beiden Differentialgleichungen (2) und (17) gemeinsames Integral bedeutet, der Rest der Division, also der Ausdruck (γ), wenn $z = z_1$ gesetzt wird, verschwinden, und nimmt man daher an, dass z_1 nicht ein Integral sei, welches einer gewöhnlichen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit der unabhängigen Variabeln x genügt, in welcher y algebraisch enthalten ist, so wird jene Operation einen der Null identischen Rest liefern müssen und somit jedes Integral von (2) auch (12) befriedigen. Wir erhalten daher die folgende Verallgemeinerung des oben aufgestellten Satzes:

Wenn eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln mit einer partiellen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung ein Integral gemein hat, und es ist jene Differentialgleichung erster Ordnung in Bezug auf den Differentialquotienten nach der einen Variabeln in algebraischem Sinne irreductibel, andererseits das gemeinsame Integral so beschaffen, dass es nicht schon einer gewöhnlichen Differential-

gleichung m^{ter} Ordnung nach der anderen unabhängigen Variabeln genügt, in welcher die erste unabhängige Variable algebraisch enthalten ist, so wird die partielle Differentialgleichung erster Ordnung alle Integrale mit derjenigen m^{ter} Ordnung gemein haben.

So wird z. B. die Differentialgleichung (6) mit der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(18) \qquad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x} + z\right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$$

das particuläre Integral

$$z_1 = e^x[y - x + \log(y-x) + \sin(y-x)]$$

gemein haben, welches, wie leicht zu sehen, nicht einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung, sondern erst einer solchen dritter Ordnung von der Form genügt

$$\omega\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \frac{d^3 z}{dx^3}\right) = 0;$$

es folgt somit aus dem eben bewiesenen Satze, dass jedes Integral der Gleichung (6) der Gleichung (18) genügt, also z. B. das aus (7) specialisirte

$$z_2 = e^x[(y-x)^2 + \operatorname{tang}(y-x)],$$

wie durch Einsetzen unmittelbar sich ergiebt.

Man kann aber den oben bewiesenen Satz auch auf zwei beliebige partielle Differentialgleichungen ausdehnen, und es führt eine einfache Ueberlegung, die der oben angestellten ganz analog ist, zu folgendem Theorem:

Wenn eine partielle Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln mit einer partiellen Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung, worin $\nu \geqq \mu$ ist, ein Integral gemein hat, und es enthält die erstere Differentialgleichung den Differentialquotienten μ^{ter} Ordnung nach der einen Variabeln und ist in Bezug auf diesen in algebraischem Sinne irreductibel, während das gemeinsame Integral der Bedingung unterliegt, nicht einer partiellen Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung zu genügen, in welcher die partiellen Differentialquotienten, nach jener einen Variabeln genommen, die μ^{te} Ordnung nicht erreichen, so wird die partielle Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung alle Integrale mit der partiellen Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung gemein haben.

Wendet man endlich Betrachtungen an, wie ich sie in meiner Schrift: „Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen" für gewöhnliche Differentialgleichungen eingehend erörtert habe, so kommt man zu dem folgenden noch allgemeineren Satze:

Besteht zwischen einem Integrale z_1 einer partiellen Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung und einem Integrale z_2 einer partiellen Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung, worin $\nu \geqq \mu$ ist, eine algebraische Be-

ziehung, in welche auch die unabhängigen Variabeln eintreten dürfen, und enthält die erstere Differentialgleichung den Differentialquotienten μ^{ter} *Ordnung nach der einen Variabeln und ist in Bezug auf diesen in algebraischem Sinne irreductibel, während das Integral* z_1 *derselben der Bedingung unterliegt, nicht einer partiellen Differentialgleichung* ν^{ter} *Ordnung zu genügen, in welcher die partiellen Differentialquotienten, nach jener einen Variabeln genommen, die* μ^{te} *Ordnung nicht erreichen, so bleibt jene algebraische Relation erhalten, wenn man für* z_1 *ein willkürliches Integral der Differentialgleichung* μ^{ter} *Ordnung setzt, vorausgesetzt dass für* z_2 *ein passendes Integral der Differentialgleichung* ν^{ter} *Ordnung substituirt wird,*

und dieser Satz bleibt gültig, wenn in jene algebraische Beziehung auch noch die partiellen Differentialquotienten der Integrale z_1 und z_2 eintreten, und gestattet die gleichlautende Verallgemeinerung auf Systeme partieller Differentialgleichungen mit beliebig vielen unabhängigen Variabeln, zwischen deren Integralen algebraische Beziehungen stattfinden.

Ischl im August 1882.