

Über einige Sätze der Potentialtheorie.

Von A. Tauber in Wien.

§. 1. Über die Berechnung von Raumpotentialen.

Für die Punkte eines einfach zusammenhängenden Raumes T sei eine Function F definiert, deren erste und zweite Differentialquotienten nach den Coordinaten für jeden Innenpunkt existieren und bei Annäherung desselben an die Begrenzung Convergenzwerte besitzen sollen. Dann kann man bekanntlich den Wert $F(P)$ dieser Function in einem beliebigen Innenpunkt P durch die Gleichung

$$(1) \quad 4\pi F(P) = - \int_T \frac{\Delta F}{E} d\tau + \int_{\Omega} \left(F \frac{\partial E}{\partial N_i} - \frac{1}{E} \frac{\partial F}{\partial N_i} \right) d\omega$$

darstellen, wo E die Entfernung des Punktes P vom Raumelement $d\tau$, beziehungsweise vom Flächenelement $d\omega$ bedeutet. Die erste Integration erstreckt sich über den Raum T , die zweite über die Begrenzung Ω .

Substituiert man in der Gleichung (1) für F die Potentialfunction V einer über den Raum T ausgebreiteten Masse, so folgt sofort für jeden Innenpunkt von T die Gleichung

$$(2) \quad \int_{\Omega} \left(V \frac{\partial E}{\partial N_i} - \frac{1}{E} \frac{\partial V}{\partial N_i} \right) d\omega = 0,$$

und man kann daher sagen: Damit eine innerhalb T definierte Function V die Potentialfunction einer über T ausgebreiteten Masse sein kann, ist erforderlich und hinreichend, dass die Gleichung (2) erfüllt sei.

Die Gleichung (1) lässt sich aber auch zur Berechnung von Raumpotentialen benutzen. Ist nämlich die Potentialfunction V einer über den Raum T mit der Dichte k ausgebreiteten Masse zu berechnen, so sucht man zuerst irgend eine Function, welche innerhalb T die Differentialgleichung

$$(3) \quad \Delta W = -4\pi k$$

erfüllt, dann ist nach (1)

$$4\pi W(P) = \int_T \frac{4\pi k}{E} d\tau + \int_{\Omega} \left(W \frac{\partial}{\partial N_i} \frac{1}{E} - \frac{\partial W}{\partial N_i} \right) d\omega,$$

andererseits ist

$$V(P) = \int \frac{k d\tau}{E}$$

also folgt

$$(4) \quad V(P) = W(P) - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left(W \frac{\partial}{\partial N_i} \frac{1}{E} - \frac{1}{E} \frac{\partial W}{\partial N_i} \right) d\omega.$$

Die Berechnung von V ist demnach auf die Ermittlung einer der Functionen W und auf Auswertung eines Oberflächenintegrals zurückgeführt. Auf diese Art entfällt die sonst bei Berechnung des Raumpotentials für einen Innenpunkt nothwendige Zerlegung des Raumes T .

Ist insbesondere die Dichte k eine ganze rationale Function der Coordinaten x, y, z , so lässt sich auch W , und zwar auf unendlich viele Arten, als ganze rationale Function von x, y, z darstellen, und V ist auf ein Flächenintegral zurückgeführt.

Als Beispiel soll die Berechnung des Raumpotentials für den Fall des (verlängerten) Rotationsellipsoides vorgenommen werden. Über diese Aufgabe finden sich auch in dem Handbuch von Heine¹⁾ einige Bemerkungen, jedoch nur insoweit, als es die Form des Resultats betrifft. Eine wirkliche Ausrechnung wäre bei der von Heine angewendeten directen Auswertung des Raumintegrals wohl kaum durchführbar.

Das vorgelegte Rotationsellipsoid habe die Oberfläche

$$(5) \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Führt man zunächst Polarcoordinaten durch die Gleichungen

$$x = \rho \cos \psi, \quad y = \rho \sin \psi$$

ein und setzt $h = \sqrt{c^2 - a^2}$, so wird die Gleichung (5)

$$\frac{\rho^2}{c^2 - h^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Anstatt ρ, z sind jetzt die elliptischen Coordinaten

$$(6) \quad \begin{cases} \sigma = \frac{\sqrt{\rho^2 + (z+h)^2} + \sqrt{\rho^2 + (z-h)^2}}{2h} \\ \mu = \frac{\sqrt{\rho^2 + (z+h)^2} - \sqrt{\rho^2 + (z-h)^2}}{2h} \end{cases}$$

¹⁾ Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, Bd. 2, S. 112.

zu benützen. Die Quadratwurzeln sollen hierbei positiv genommen werden. Dann ist die Größe σ positiv und ≥ 1 , während $|\mu| \leq 1$ ist.

Umgekehrt lassen sich ρ, z durch σ, μ mittelst der Formeln

$$(7) \quad \begin{cases} \rho = h \sqrt{\sigma^2 - 1} (1 - \mu^2) \\ z = h \sigma \mu \end{cases}$$

ausdrücken. Die Oberfläche des Rotationsellipsoides ist daher durch die Gleichung $\sigma = \sigma_1$ dargestellt, wenn

$$(8) \quad \sigma_1 = \frac{c}{h}, \quad c > 0$$

gesetzt wird.

Nun sei der Raum des Rotationsellipsoides von einer Masse mit der Dichte k erfüllt. Ist k eine ganze rationale Function von x, y, z , so wird sich W am einfachsten unter Beibehaltung der Variablen x, y, z als ganze rationale Functionen derselben bestimmen lassen.

Es erübrigt noch die Berechnung von

$$(9) \quad \int_{\Omega} \left(W \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial N_i} - \frac{1}{E} \frac{\partial W}{\partial N_i} \right) d\omega.$$

Die Coordinaten des Punktes P , in welchem V berechnet werden soll, bezeichnen wir mit σ, μ, ψ , diejenigen des Oberflächenelementes $d\omega$ mit σ_1, μ_1, ψ_1 .

Durch Einführung der Integrationsvariablen μ_1, ψ_1 geht das Integral (9) über in

$$(10) \quad h (1 - \sigma_1^2) \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \left(W \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial \sigma_1} - \frac{1}{E} \frac{\partial W}{\partial \sigma_1} \right) d\mu_1 d\psi_1.$$

Der reciproke Wert der Entfernung E , wird, weil $\sigma_1 > \sigma$ ist, durch die Gleichung¹⁾

$$(11) \quad \frac{1}{E} = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n (-1)^{\nu} a_{\nu}^n P_{\nu}^n(\mu) P_{\nu}^n(\mu_1) P_{\nu}^n(\sigma) \Theta_{\nu}^n(\sigma_1) \cos \nu (\psi - \psi_1)$$

geliefert, in welcher

$$a_{\nu}^n = 2 \frac{(1.3 \dots (2n-1))^2}{\Pi(n+\nu) \Pi(n-\nu)}$$

ist, und der Accent beim zweiten Summenzeichen darauf hinweist, dass a_0^n durch $\frac{1}{2} a_0^n$ zu ersetzen ist. Benützt man diese Entwicklung von E , so erhält man für den Ausdruck (10) die Reihe

¹⁾ Heine, 2. Bd., S. 100.

$$(1 - \sigma_1^2) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n b_{\nu}^n P_{\nu}^n(\mu) P_{\nu}^n(\sigma),$$

wo zur Abkürzung

$$(12) \quad b_{\nu}^n = (-1)^{\nu} a_{\nu}^n \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \left[W(\sigma_1, \mu_1, \psi_1) \Theta_{\nu}^n(\sigma_1) - \right. \\ \left. - \Theta_{\nu}^n(\sigma_1) \frac{\partial W(\sigma_1, \mu_1, \psi_1)}{\partial \sigma_1} P_{\nu}^n(\mu_1) \right] \cos \nu(\psi - \psi_1) d\mu_1 d\psi_1$$

gesetzt wurde. Die als ganze rationale Function von x, y, z bereits bekannte Function W stellen wir jetzt als Function von σ, μ, ψ dar und entwickeln sie in eine Reihe nach Kugelfunctionen

$$(13) \quad W = \sum \sum' [f_{\nu}^n(\sigma) \cos \nu \psi + \bar{f}_{\nu}^n(\sigma) \sin \nu \psi] P_{\nu}^n(\mu)$$

und die Einsetzung dieses Wertes von W in den Ausdruck (12) für b_{ν}^n ergibt infolge bekannter Eigenschaften der Kugelfunctionen

$$\frac{2n+1}{4\pi} b_{\nu}^n = \Theta_{\nu}^n(\sigma_1) [f_{\nu}^n(\sigma_1) \cos \nu \psi + \bar{f}_{\nu}^n(\sigma_1) \sin \nu \psi] - \\ - \Theta_{\nu}^n(\sigma_1) [f_{\nu}^n(\sigma_1) \cos \nu \psi + \bar{f}_{\nu}^n(\sigma_1) \sin \nu \psi],$$

wodurch das zu berechnende Oberflächenintegral

$$(14) \quad \int \left(W \frac{\partial}{\partial N_i} - \frac{1}{E} \frac{\partial W}{\partial N_i} \right) d\omega = \\ = (1 - \sigma_1^2) \sum \sum' \frac{4\pi}{2n+1} P_{\nu}^n(\mu) P_{\nu}^n(\sigma) \left\{ \begin{aligned} & [\Theta_{\nu}^n(\sigma_1) f_{\nu}^n(\sigma_1) - \Theta_{\nu}^n(\sigma_1) \bar{f}_{\nu}^n(\sigma_1)] \cos \nu \psi \\ & + [\Theta_{\nu}^n(\sigma_1) \bar{f}_{\nu}^n(\sigma_1) - \Theta_{\nu}^n(\sigma_1) f_{\nu}^n(\sigma_1)] \sin \nu \psi \end{aligned} \right\}$$

resultiert.

§ 2. Über das derivierte Dirichlet'sche Problem.

Die Zurückführung des derivierten Dirichlet'schen Problems auf das (gewöhnliche) Dirichlet'sche Problem gelingt mit Hilfe eines Satzes, den ich in einer Arbeit¹⁾ „Über das Potential einer Doppel-

¹⁾ Diese Zeitschrift, Bd. 8, S. 80. (Erschienen Jänner 1897). Zwei dasselbe Thema behandelnden Noten des H. Liapunoff sind in den Comptes Rendus vom 8. und 22. November 1897 enthalten.

belegung“ besprochen habe. (Vgl. den § 2 der Abhandlung). Dieser Satz wird *a.a.O.* für die Ebene bewiesen, und ich möchte nun hier den Beweis für den Raum von drei Dimensionen führen und einige Bemerkungen über die erhaltene Lösung des Problems hinzufügen.

Auf einer Fläche σ sei eine Doppelbelegung f ausgebreitet, und $W(x, y, z)$ das von derselben in irgend einem nicht auf σ liegenden Punkte x, y, z erzeugte Potential.

Wenn wir nun irgend eine Stelle s der Fläche σ ins Auge fassen, die innere Normale in s zur z Axe wählen, und die Werte, welche W in den Punkten der z Axe besitzt, mit $U(z)$ bezeichnen, so lautet die zu beweisende Formel

$$(1) \quad \lim_{z=0} [U'(z) - U'(-z)] = 0.$$

Seiner Definition nach ist W dargestellt durch das über σ erstreckte Integral

$$(2) \quad \int \frac{\cos \mu}{E^2} f d\sigma,$$

wo E die Entfernung des Flächenelementes $d\sigma$ vom Punkte x, y, z und μ den Winkel zwischen der innern Normale in $d\sigma$ und der Richtung von $d\sigma$ nach x, y, z bedeutet. Von der Function f darf beim Beweis des in Rede stehenden Satzes vorausgesetzt werden, dass der Wert f_s von f in dem gerade betrachteten Punkte s gleich Null ist, da man sonst f in die beiden Functionen $f - f_s$ und f_s zerlegen kann, deren erste im Punkte s verschwindet, während für die zweite, die Constante f_s , der zu beweisende Satz offenbar Geltung hat.

Innerhalb einer genügend kleinen Umgebung von s wird sich die Fläche σ , wenn die Coordinaten ihrer Punkte mit ξ, η, ζ bezeichnet werden, durch eine Gleichung von der Form $\zeta = \chi(\xi, \eta)$ darstellen lassen, wo χ eine eindeutig definierte Function von ξ, η ist, deren erste und zweite Differentialquotienten zufolge unserer Annahme, dass s eine Stelle stetiger Krümmung sein soll, existieren.

Für $\xi = \eta = 0$ verschwinden $\frac{\partial \chi}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial \chi}{\partial \eta}$.

Wenn also für ξ, η Polarcoordinaten durch die Gleichungen

$$\xi = \rho \cos \psi, \quad \eta = \rho \sin \psi$$

eingeführt werden, und auf diese Art ζ als Function von ρ, ψ dargestellt wird, so können wir sagen, dass eine gewisse Umgebung $0 \leq \rho \leq \rho_1$ der Stelle s existiert, für welche

$$\frac{1}{\rho^2} \zeta, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}$$

an Betrag kleiner als eine gewisse endliche positive GröÙe M sind.

Nunmehr zerlegen wir die Fläche σ in zwei Theile σ' und σ'' , deren erster σ' gänzlich in die Umgebung $0 \leq \rho \leq \rho_1$ hineinfällt, und zwar sei σ' durch $0 \leq \rho \leq \rho_0$ charakterisiert, wo $\rho_0 < \rho_1$ angenommen, die nähere Fixierung ρ_0 aber erst später vorgenommen werden soll.

Diese Zerlegung gibt für W die Zerlegung $W = W_1 + W_2$

$$W_1 = \int_{\sigma'} \frac{\cos \mu}{E^2} f d\sigma, \quad W_2 = \int_{\sigma''} \frac{\cos \mu}{E^2} f d\sigma.$$

Die Werte $W_1(0, 0, z)$ und $W_2(0, 0, z)$ sollen mit $U_1(z), U_2(z)$ bezeichnet werden.

Durch Einführung der Winkel α, β, γ , welche die innere Normale in $d\sigma$ mit den Coordinatenachsen einschließt, ergibt sich

$$W_1(x, y, z) = \int_{\sigma'} \frac{(x - \xi) \cos \alpha + (y - \eta) \cos \beta + (z - \zeta) \cos \gamma}{E^3} f d\sigma,$$

wenn die Coordinaten von $d\sigma$ mit ξ, η, ζ bezeichnet werden. Setzt man für $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ ihre Werte ein, so wird

$$(3) \quad W_1(x, y, z) = \iint \frac{(\xi - x) \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + (\eta - y) \frac{\partial \chi}{\partial \eta} - (\zeta - z)}{E^3} f d\xi d\eta,$$

die Integration ausgedehnt über die Projection der Fläche σ' auf die xy Ebene. Hieraus folgt

$$U_1(z) = \iint \frac{\xi \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \chi}{\partial \eta} - (\zeta - z)}{[\xi^2 + \eta^2 + (z - \zeta)^2]^{\frac{3}{2}}} f d\xi d\eta,$$

oder bei Einführung der Polarcordinaten ρ, ψ

$$U_1(z) = \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{\rho \frac{\partial \chi}{\partial \rho} + z - \zeta}{[\rho^2 + (z - \zeta)^2]^{\frac{3}{2}}} f \rho d\rho d\psi.$$

Der Abkürzung halber setzen wir jetzt wieder

$$(4) \quad \begin{aligned} E &= \sqrt{\rho^2 + (z - \zeta)^2} \\ \varphi &= \frac{\rho \frac{\partial \chi}{\partial \rho} + z - \zeta}{E^3} \end{aligned}$$

dann ist

$$(5) \quad U_1(z) = \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \varphi f \rho \, d\rho \, d\psi.$$

Die Differentiation nach z ergibt

$$U_1'(z) = \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} f \rho \, d\rho \, d\psi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\rho^2 - 2(z - \zeta)^2 - 3\rho(z - \zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}}{E^5}.$$

Ferner führen wir noch die Größen

$$(6) \quad E_0 = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

$$\lambda = \frac{E^2}{E_0^2} - 1$$

ein, und setzen

$$(7) \quad \frac{E_0^5}{E^5} = 1 - N\lambda.$$

Dann ist

$$\lambda = \frac{\zeta^2 - 2z\zeta}{\rho^2 + z^2}$$

und

$$|\lambda| \leq \frac{\zeta^2 + 2|z\zeta|}{\rho^2 + z^2} < \frac{\zeta^2 + |\zeta|\rho}{\rho^2} < M^2 \rho^2 + M\rho,$$

weil $|\zeta| < M\rho^2$ war. Wird $M\rho_0 < 1$ angenommen, so ist

$$|\lambda| < 2M\rho.$$

Es soll jedoch $M\rho_0$ nicht nur < 1 sondern $< \frac{1}{40}$ angenommen werden, wodurch $|\lambda| < \frac{1}{20}$ resultiert.

Die Größe N ist offenbar positiv und kann durch Wahl eines genügend kleinen ρ_0 dem Wert $\frac{5}{2}$ beliebig nahe gebracht werden. Bei der oben gemachten Annahme, wonach $|\lambda| < \frac{1}{20}$ ist, wird $N < 3$.

Zunächst soll jetzt die Ungleichung

$$(8) \quad \left| \rho \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \rho \frac{\rho^2 - 2z^2}{E_0^5} \right| < 12M^2 + 24M \frac{|z|}{E_0^3}$$

bewiesen werden. Zu diesem Zweck betrachten wir zuerst den Ausdruck

$$(9) \quad \rho \frac{\rho^2 - 2(z - \zeta)^2}{E^5} - \rho \frac{\rho^2 - 2z^2}{E_0^5},$$

welcher sich in der Form

$$- \frac{\rho \lambda}{E_0^5} [2E_0^2 + N\{\rho^2 - 2(z - \zeta)^2\}]$$

bringen lässt. Die in der eckigen Klammer stehende Größe ist an Betrag kleiner als

$$2E_0^2 + 2NE^2 < 2E_0^2 + 6E^2 < 9E_0^2,$$

deshalb ist der Ausdruck (9) an Betrag kleiner als

$$\frac{\rho |\lambda|}{E_0^5} 9E_0^2 < 9 \frac{|\lambda|}{E_0^2}.$$

Nun ist

$$|\lambda| < \frac{\zeta^2 + 2|z\zeta|}{\rho^2} < M^2 \rho^2 + 2M|z|,$$

und hieraus folgt

$$\frac{\lambda}{E_0^2} < M^2 + 2M \frac{|z|}{E_0^2},$$

somit ist gezeigt, dass

$$(10) \quad \left| \rho \frac{\rho^2 - 2(z - \zeta)^2}{E^5} - \rho \frac{\rho^2 - 2z^2}{E_0^5} \right| < 9 \left(M^2 + 2M \frac{|z|}{E_0^2} \right)$$

ist. Ferner hat man

$$(11) \quad \left| \frac{\rho^2 \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}}{E^5} \right| < \left| \frac{\rho^2 \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}}{\rho^5} \right| < M^2$$

und

$$(12) \quad \left| \frac{\rho^2 z \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}}{E^5} \right| < \frac{\rho^2 |z| M \rho}{E_0^5} (1 - N\lambda) < \frac{4}{3} M \frac{|z|}{E_0^2}.$$

Fasst man die Resultate (10), (11), (12) zusammen, so sieht man, dass das

$$\rho \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\rho^2 - 2z^2}{E_0^5} \right] = \rho \left[\frac{\rho^2 - 2(z - \zeta)^2}{E^5} - \frac{\rho^2 - 2z^2}{E_0^5} \right] - 3 \frac{\rho^2 (z - \zeta)}{E^5} \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

an Betrag kleiner ist

$$9 \left[M^2 + 2 M \frac{|z|}{E_0^2} \right] + 3 M^2 + 4 M \frac{|z|}{E_0^2},$$

d. h. die Ungleichung (8) besteht. Dieselbe besagt aber, dass

$$(13) \left| U'_1(z) - \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - 2z^2}{E_0^5} f \, d\rho \, d\psi \right| < \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \left[12 M^2 + 24 M \frac{|z|}{E_0^2} \right] |f| \, d\rho \, d\psi$$

ist, und der Ausdruck rechts ist jedenfalls kleiner als

$$(14) \quad f_0 \left[12 M^2 \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} d\rho \, d\psi + 24 M \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{|z|}{\rho^2 + z^2} d\rho \, d\psi \right],$$

wenn f_0 das Maximum von $|f|$ für alle $0 \leq \rho \leq \rho_0$ bezeichnet. Infolge der leicht beweisbaren Ungleichung

$$\int_0^{\rho_0} \frac{|z| \, d\rho}{\rho^2 + z^2} < \frac{1}{2} \pi$$

ist die Größe (14) kleiner als

$$(15) \quad f_0 [12 M^2 \cdot 2\pi \rho_0 + 24 M \cdot \pi^2] = \frac{1}{2} a \pi f_0$$

$$a = 48 M (\pi + \rho_0 M).$$

Ersetzt man in der so enthaltenen Ungleichung

$$(16) \quad \left| U'_1(z) - \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - 2z^2}{E_0^5} f \, d\rho \, d\psi \right| < \frac{1}{2} a \pi f_0$$

z durch $-z$ und subtrahiert, so kommt

$$|U'_1(z) - U'_1(-z)| < a \pi f_0.$$

Sei irgend eine positive Größe δ vorgegeben. Dann wählt man erst ρ_0 so, dass $|f_0| < \frac{1}{2} \delta \pi a$ ist, wodurch für $z \geq 0$

$$|U'_1(z) - U'_1(-z)| < \frac{\delta}{2}$$

folgt. Nachdem einmal ρ_0 so fixiert ist, kann man leicht eine Größe ϵ angeben, so dass

$$|U'_2(z) - U'_2(-z)| < \frac{\delta}{2}$$

für alle $0 \leq |z| \leq \varepsilon$ ist. Und endlich ist

$$|U'(z) - U'(-z)| < \delta$$

für $0 < |z| \leq \varepsilon$, w. z. b. w.

Seien nun längs σ die Werte φ beliebig (dabei jedoch die Gleichung $\int \varphi d\sigma = 0$ erfüllend) in stetiger Weise vorgeschrieben, und es soll eine innerhalb σ harmonische Function V^i bestimmt werden, deren Differentialquotient nach der innern Normale $\frac{\partial V^i}{\partial N_i}$ gleich φ ist, so bestimmt man jene Doppelschicht, deren Potential W für die Punkte außerhalb σ mit

$$(17) \quad V_0 = \frac{1}{4\pi} \int \varphi \frac{d\sigma}{E}$$

übereinstimmt, und setzt

$$(18) \quad V^i = W_i - V_0^i.$$

Nennt man Φ jene Doppelbelegung, deren Potential W ist,

$$(19) \quad W = \int \Phi \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial N_i} d\sigma,$$

so ist $\overline{W_i} - \overline{W}_\alpha = 4\pi \Phi$. Daher folgt aus

$$\overline{V^i} = \overline{W_i} - \overline{V_0^i} = \overline{W_i} - \overline{W}_\alpha$$

die Gleichung $\overline{V^i} = 4\pi \Phi$ oder

$$W = \frac{1}{4\pi} \int V^i \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial N_i} d\sigma,$$

und die Giltigkeit des Green'schen Satzes für V^i

$$V^i = \frac{1}{4\pi} \int \left(V^i \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial N_i} - \frac{\varphi}{E} \right) d\sigma$$

ist bewiesen. Eine weitere Bemerkung betrifft das Maximum von $|V^i|$. Bezeichnet φ_0 das Maximum von $|\varphi|$ längs σ , so ist

$$(20) \quad |V^i| < \mathfrak{C} \varphi_0,$$

wo \mathfrak{C} bloß von der geometrischen Gestalt der Fläche σ , nicht aber von der gerade vorgegebenen Function φ abhängt. Es wird nämlich

$$|V_0| < \frac{\varphi_0}{4\pi} \int \frac{d\sigma}{E} < \varphi_0 \mathfrak{B},$$

wenn \mathfrak{B} das Maximum von $\frac{1}{4\pi} \int \frac{d\sigma}{E}$ vorstellt.

Beschränken wir uns jetzt auf den Fall einer convexen Fläche σ , so folgt aus $\overline{W}_a = \overline{V}_0$, dass die Function Φ in (19) die Ungleichung

$$|\Phi| < \frac{\varphi_0 \mathfrak{B}}{\pi(1-\lambda)}$$

erfüllt.¹⁾ λ ist die „Configurationsconstante“.

Endlich folgt aus $\overline{V}^i = 4\pi \Phi$

$$|\overline{V}^i| < 4 \frac{\varphi_0 \mathfrak{B}}{1-\lambda}.$$

Von dem Satz (20) kann man in folgender Hinsicht Gebrauch machen. Angenommen man habe φ in eine Reihe $\sum_1^\infty \varphi_r$ entwickelt, welche gleichmäßig für die Punkte von σ convergiert und nach der obigen Vorschrift Functionen U_1, U_2, \dots, U_n construiert, welche den Relationen

$$\frac{\partial U_1}{\partial N_i} = \varphi_1, \quad \frac{\partial U_2}{\partial N_i} = \varphi_2, \dots, \frac{\partial U_n}{\partial N_i} = \varphi_n$$

entsprechen, dann ist offenbar

$$|V^i - U_1 + U_2 + \dots + U_n| < \left| \varphi - \sum_1^n \varphi_r \right| \mathfrak{C},$$

es convergiert also $U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots$ gleichmäßig gegen V^i .

Die Frage, ob V^i die einzige Lösung der oben gestellten Aufgabe ist, scheint ohne weitere Voraussetzungen über φ und V^i schwierig zu entscheiden sein.

Nimmt man dagegen an, dass φ erste Differentialquotienten nach den beiden Parametern, durch welche die Fläche σ dargestellt wird, besitzt, und dass die ersten Differentialquotienten von V^i

¹⁾ C. Neumann, Über die Methode des arithmetischen Mittels, I. S. 83.

nach x, y, z bei Annäherung eines Innenpunktes an die Oberfläche σ Convergenzwerte besitzen sollen, so ist im allgemeinen V^i als einzige Lösung nachweisbar. Ohne auf diesen Beweis näher einzugehen, bemerke ich bloß, dass hiebei der folgende Satz zur Anwendung gelangt:

Sei die Function f in (2) nach den beiden die Fläche σ darstellenden Parametern differentiierbar und besitzen $\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}$ Grenzwerte, wenn der Punkt, für welchen sie berechnet werden, auf der einen Seite der Normale sich s nähert, so besitzen $\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}$ auch Grenzwerte, wenn der Punkt, für welchen sie berechnet werden, auf der andern Seite der Normale sich s nähert.

Dieser Satz wird für $\frac{\partial W}{\partial x}$ derart bewiesen, das bei

$$F(z) = \left[\frac{\partial W(x, y, z)}{\partial x} \right]_{x=y=0}$$

die Existenz von

$$\lim_{z=0} [F(z) - F(-z)]$$

gezeigt wird, und analog für $\frac{\partial W}{\partial y}$.

§. 3.

Die Differentialquotienten des Potentials einer Doppelschicht können durch die Differentialquotienten von Potentialen einfacher Belegung dargestellt werden, und zwar mit Hilfe der Formeln

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{cases}$$

Hiebei ist

$$(2) \quad W = \int f \frac{\partial 1}{\partial N_i} d\sigma$$

das Potential der Doppelschicht, und sind

$$(3) \quad L = \int \frac{\lambda d\sigma}{E}, \quad M = \int \frac{\mu d\sigma}{E}, \quad N = \int \frac{\nu d\sigma}{E}$$

Potentiale einfacher Belegungen. Functionen λ, μ, ν erhält man auf folgende Art.

Man stellt ξ, η, ζ durch zwei Parameter u, v dar:

$$\xi = \varphi(u, v), \quad \eta = \psi(u, v), \quad \zeta = \chi(u, v)$$

und wählt u, v derart, dass $u = \text{Const.}, v = \text{Const.}$ die Krümmungscurven von σ sind.¹⁾ Alsdann kann man

$$(4) \quad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial u} \right) \\ \mu = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial \eta}{\partial u} \right) \\ \nu = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right) \end{cases}$$

wählen. H ist für die Quadratwurzel aus

$$\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial u} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial v} \right)^2 \right],$$

gesetzt. Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt man sich leicht, wenn man in (1) die Differentialquotienten der Potentiale W, L, M, N nach den Sätzen (13) und (14) der genannten Neumann'schen Abhandlung auswertet.

§. 4. Über das Verhalten der harmonischen Functionen im Unendlichen.

Eine außerhalb einer Fläche harmonische Function wird gewöhnlich durch die folgenden Eigenschaften definiert.

1. V besitzt in jedem im Endlichen gelegenen Außenpunkt der Fläche stetige erste und zweite Differentialquotienten nach den Coordinaten x, y, z und erfüllt daselbst die Gleichung $\Delta V = 0$.

2. Wie groß auch $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ wird, bleiben die Größen

$$r V(x, y, z), \quad r^2 \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}, \quad r^2 \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y}, \quad r^2 \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z}$$

unter einer endlichen Schranke.

Es ist leicht zu zeigen, dass dieses in (2) geschilderte Verhalten von V und seinen ersten Differentialquotienten eine Consequenz der Annahme (1) und der weiteren Annahme ist, dass V im Unendlichen verschwindet.

Wir nehmen also an, es besitze eine Function V außerhalb einer gewissen Fläche die Eigenschaft (1), und es sei $\lim_{r=\infty} V = 0$.

¹⁾ Vgl. C. Neumann, Neue Sätze über das Newton'sche Potential, Math. Annalen, Bd. 16.

Betrachten wir statt der gegebenen Fläche eine sie gänzlich umschließende Kugelfläche Ω . Um den Wert von V in einem außerhalb Ω liegenden Punkt P zu bestimmen, legen wir um P als Centrum eine zweite Kugelfläche Ω_1 , deren Radius R jedenfalls so groß sei, dass Ω_1 die Fläche Ω vollständig einschließt. Da in dem von den beiden Flächen Ω und Ω_1 eingeschlossenen endlichen Raum T_1 die Function V harmonisch ist, so folgt nach dem Green'schen Satz

$$(1) \quad 4\pi V(P) = \int_{\Omega + \Omega_1} \left(V \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{E} - \frac{1}{E} \frac{\partial V}{\partial N} \right) d\omega,$$

wo N die ins Innere des Raumes T_1 hineinlaufende Normale des Oberflächenelementes $d\omega$ vorstellt. E ist die Entfernung des Punktes P von $d\omega$, und die Integration erstreckt sich über die Begrenzung $\Omega + \Omega_1$. Nun ist

$$\int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{E} - \frac{1}{E} \frac{\partial V}{\partial N} \right) d\omega = \int_{\Omega_1} V \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{E} d\omega - \frac{1}{R} \int_{\Omega_1} \frac{\partial V}{\partial N} d\omega.$$

Benützt man hier die Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \frac{\partial V}{\partial N} d\omega &= - \int_{\Omega} \frac{\partial V}{\partial N} d\omega \\ \int_{\Omega_1} V \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{E} d\omega &= \frac{1}{R^2} \int_{\Omega_1} V d\omega, \end{aligned}$$

von denen die erste aus

$$\int_{\Omega + \Omega_1} \frac{\partial V}{\partial N} d\omega = 0$$

folgt, so erhält man

$$(2) \quad \int_{\Omega_1} \left(V \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{E} - \frac{1}{E} \frac{\partial V}{\partial N} \right) d\omega = \frac{1}{R^2} \int_{\Omega_1} V d\omega + \frac{1}{R} \int_{\Omega} \frac{\partial V}{\partial N} d\omega.$$

Für wachsende R wird $\frac{1}{R} \int_{\Omega} \frac{\partial V}{\partial N} d\omega$ beliebig klein, und wenn ε das Maximum von $|V|$ längs Ω_1 vorstellt, ist

$$\left| \frac{1}{R^2} \int_{\Omega_1} V d\omega \right| < \varepsilon \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\varepsilon\pi,$$

es wird somit die linke Seite von (2) mit wachsendem R beliebig klein, oder der Greensche Satz

$$(3) \quad 4\pi V(P) = \int_{\Omega} \left(V \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{E} - \frac{1}{E} \frac{\partial V}{\partial N} \right) d\omega$$

gilt auch für den unendlichen Raum außerhalb Ω . Die Gleichung (3) lässt sich auch schreiben

$$4\pi V(x, y, z) = \int_{\Omega} \frac{V \cos \mu}{E^2} d\omega - \int_{\Omega} \frac{1}{E} \frac{\partial V}{\partial N} d\omega,$$

wo μ den Winkel zwischen der Richtung N und der Richtung $d\omega$ nach P ist. Daraus folgt

$$4\pi r V(x, y, z) = \int_{\Omega} \frac{r}{E^2} V \cos \mu d\omega - \int_{\Omega} \frac{r}{E} \frac{\partial V}{\partial N} d\omega;$$

wegen $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{E} = 1$ wird das erste Integral auf der rechten Seite mit wachsendem r beliebig klein, und es bleibt

$$(4) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r V = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial V}{\partial N} d\omega.$$

Ferner ist, wenn $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ die Richtungscosinus von N , und ξ, η, ζ die Coordinaten von $d\omega$ vorstellen,

$$\begin{aligned} 4\pi V &= \int V \frac{\alpha(x-\xi) + \beta(y-\eta) + \gamma(z-\zeta)}{E^3} d\omega - \int \frac{1}{E} \frac{\partial V}{\partial N} d\omega \\ 4\pi \frac{\partial V}{\partial x} &= \int V \left[\frac{\alpha}{E^3} - 3(x-\xi) \frac{\alpha(x-\xi) + \beta(y-\eta) + \gamma(z-\zeta)}{E^5} \right] d\omega + \\ &\quad + \int \frac{x-\xi}{E^3} \frac{\partial V}{\partial N} d\omega, \end{aligned}$$

und da im ersten Integral rechts in der letzten Gleichung die zu integrierende Function mit $\frac{1}{E^3}$ oder $\frac{1}{r^3}$ vergleichbar ist, so wird

$$4\pi r^2 \frac{\partial V}{\partial x} - \int \frac{x-\xi}{E} \frac{r^2}{E^2} \frac{\partial V}{\partial N} d\omega$$

mit wachsendem r beliebig klein, und $r^2 \frac{\partial V}{\partial x}$ bleibt stets endlich.