Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen.

Von

Wilhelm Killing in Braunsberg, Ostpr.

Vierter Theil (Schluss). *)

Die Transformationsgruppen zerfallen nach ihrer Zusammensetzung in zwei grosse Abtheilungen, jenachdem sie Kegelschnittsgruppen zu Untergruppen haben oder nicht. Die Gruppen der letzteren Art haben eine sehr hervortretende Eigenschaft, welche schon längst von den Herren Lie und Engel erkannt worden ist. Zu denselben gehören diejenigen, welche ich als Gruppen vom Range null bezeichnet und in § 9 (Bd. 31. S. 285—290) genauer untersucht habe. Diese bilden die eine Classe von hierhergehörigen Gruppen. Wie sich im Folgenden zeigt, bestimmen alle weiteren Gruppen dieser Abtheilung eine zweite Classe, da sie eine Gruppe vom Range null zur Hauptuntergruppe haben. Die Gruppen der ersten Classe haben nur solche zweigliedrige Untergruppen, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind; dagegen kommen in den Gruppen der zweiten Classe auch zweigliedrige Untergruppen mit einer Haupttransformation vor; alsdann gehören aber alle Haupttransformationen bereits einer Gruppe vom Range null an.

In der zweiten Abtheilung, welche die Gruppen mit Kegelschnitts-Untergruppen umfasst, unterscheiden wir wieder zwei Classen. Zu der ersten Classe rechnen wir diejenigen Gruppen, welche ihre eigenen Hauptuntergruppen sind; die Gruppen der zweiten Classe haben die Eigenschaft, dass sie zwar nicht selbst ihre eigenen Hauptuntergruppen sind, dass aber die wiederholte Aufsuchung der Hauptuntergruppe zu einer Gruppe von dieser Eigenschaft führt. Wenn wir die Gruppen der letzteren Art sämmtlich derselben Classe einreihen, ohne zu be-

*) Der erste Theil ist veröffentlicht in den Annalen Bd. 31, S. 252—290, der zweite Bd. 33, S. 1—48, der dritte Bd. 34, S. 57—122.

rücksichtigen, wie oft wir die angegebene Operation wiederholen müssen, so nöthigt hierzu die grosse Aehnlichkeit in der Zusammensetzung; in diesem Falle ist nämlich, wie § 30 lehrt, die Hauptuntergruppe entweder einfach oder halbeinfach oder durch Zusammensetzung einer einfachen (resp. halbeinfachen) mit einer solchen vom Range null gebildet. Die erste Classe theilen wir endlich noch in drei Schaaren: a) einfache, b) halbeinfache, c) solche, welche aus einer einfachen oder halbeinfachen mit einer invarianten Untergruppe vom Range null gebildet sind.

Die Unterschiede der beiden Abtheilungen werden in § 28 genauer dargelegt. Hier möge es gestattet sein, auf einen mehr äusserlichen Punkt aufmerksam zu machen. Sucht man alle Gruppen der zweiten Art von gegebener Gliederzahl, so erhält man eine endliche Zahl von verschiedenen Zusammensetzungen; man kann aber eine endliche Zahl von Typen aufstellen und weiss, dass jede Gruppe der bezeichneten Art und der angegebenen Gliederzahl einem dieser Typen holoedrisch isomorph sein muss. So sind für $r = 4$ alle zur zweiten Abtheilung gehörigen Gruppen von gleicher Zusammensetzung. Diese Eigenschaft besteht nicht für die Gruppen der ersten Abtheilung, wofern die Gliederzahl grösser als zwei ist; vielmehr giebt es dann bei gegebener Gliederzahl immer unendlich viele Arten der Zusammensetzung. Lassen wir z. B. durch die drei Gleichungen $(X_1 X_2) = 0$, $(X_3 X_1) = X_1$, $(X_3 X_2) = \alpha X_2$ die Zusammensetzung einer dreigliedrigen Gruppe bestimmt sein, so darf hier α jeden reellen oder imaginären Werth annehmen. Zwar lässt die Umwandlung von α in seinen reciproken Werth die Zusammensetzung ungeändert; aber im allgemeinen entspricht verschiedenen Werthen von α auch eine verschiedene Zusammensetzung.

Hiermit dürfte ein Unterschied zusammenhängen, welcher in meiner Arbeit hervortritt. Für die Gruppen der zweiten Art können in sehr vielen Fällen alle Coefficienten c, durch welche die Zusammensetzung bestimmt ist, vollständig angegeben werden; jedenfalls aber lehren die gefundenen Resultate, die grössere Zahl dieser Coefficienten unmittelbar niederzuschreiben und die fehlenden mit Leichtigkeit zu berechnen. Das ist mir für die erste Classe nicht möglich geworden; hier bietet vielmehr die explicite Darstellung einige Schwierigkeit, wofern die Gliederzahl irgend beträchtlich gross ist. Ich beabsichtige jedoch nicht, die Zusammensetzung der Gruppen der ersten Abtheilung näher zu untersuchen, vielmehr gedenke ich, mit der vorliegenden Arbeit meine Veröffentlichungen über die Zusammensetzung der Gruppen vorläufig zu schliessen. Ich glaube, dass die vorliegenden vier Theile als ein einheitliches Ganze betrachtet werden können, wenngleich ich nicht leugnen will, dass ich an einzelnen Stellen kleine Aenderungen vornehmen würde, wenn ich die ersten Theile jetzt in ihre definitive Form zu bringen hätte.

Auch auf die Lehre von den Untergruppen gehe ich nicht näher ein, als es bereits im Verlauf der Arbeit selbst nöthig war. Diese Lehre ist, wie Herr Lie längst erkannt hat, mit der Lehre von der Zusammensetzung auf's engste verknüpft, und diese Verbindung tritt in meinen Untersuchungen sehr deutlich hervor, da mein Ausgangspunkt durch das Problem gebildet wird, alle zweigliedrigen Untergruppen zu finden, denen eine gegebene eingliedrige Untergruppe angehört. Dieselben Principien, welche ich in meinen Arbeiten anwenden musste, führen mit besonderer Leichtigkeit zur Lösung des Problems, alle Untergruppen einer gegebenen Gruppe zu bestimmen, denen eine gegebene Transformation angehört. Die Lösung dieser Aufgabe bietet nach den mitgetheilten Resultaten keinerlei Schwierigkeit, wenn die gegebene eingliedrige Untergruppe ganz allgemeiner Natur ist. Aber auch die Wahl einer speciellen eingliedrigen Untergruppe ändert die Untersuchungsmethode nicht wesentlich. Ich glaube jedoch, es bei diesem Hinweis bewenden lassen zu sollen.

Dagegen möchte ich einige weitere Bemerkungen hier beifügen.

Mit Herrn Lie bezeichne ich mehrere Gruppen als gleich zusammengesetzt (holoedrisch isomorph), wenn alle Coefficienten $c_{\iota\varkappa\lambda}$ durch passende Wahl der bestimmenden eingliedrigen Untergruppen gleich gemacht werden können; in diesem Sinne wird die Zusammensetzung durch die Coefficienten c bestimmt. Ich habe mir nie verhehlt, dass dieser Name Nachtheile mit sich bringt, welche darauf beruhen, dass die Gruppen in einfache und zusammengesetzte eingetheilt, und doch von der Zusammensetzung der einfachen Gruppen gesprochen wird. Dennoch glaube ich nicht, dass der eingeführte Name beseitigt werden kann. Aber es dürfte sich empfehlen, einen zweiten Ausdruck für diesen Begriff zu haben. Desshalb spreche ich zuweilen von der „Gestaltung“ der Gruppen und gebrauche „gleich gestaltet“ und „gleich zusammengesetzt“ als Synonyma.

Vier Zahlen sind es, welche in den jetzt abschliessenden Arbeiten stets in derselben Weise gebraucht werden. Einmal die Zahl r als die Gliederzahl der Gruppe; dann die Zahl p, welche die Gliederzahl für die Hauptuntergruppe angiebt. Hieran schliessen sich zwei weitere Zahlen l und k, welche etwas näher besprochen werden sollen. Die Zahl l ist (Bd. 31, S. 266) definirt als die kleinste Zahl derjenigen Functionen, durch welche sich alle Functionen $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_{r-1}$ ausdrücken lassen. (Wenn es nachher heisst, dass sich für ein beliebiges l stets l Functionen $P_1 \dots P_l$ so wählen lassen, dass sich die $\psi_1 \dots \psi_{r-1}$ rational durch $P_1 \dots P_l$ ausdrücken lassen, so ist das falsch. Herr Engel machte mich darauf aufmerksam, dass diese Behauptung wahrscheinlich unrichtig sei, wenigstens eines Beweises bedürfe. Schon vorher hatte ich Beispiele gefunden, wo eine solche Darstellung nicht möglich ist). Bezeichnet man

$$C_{\iota\varrho} = \sum^{\alpha} \eta_\alpha \, c_{\alpha\iota\varrho},$$

so lassen sich, wie man leicht sieht und worauf ich an einer andern Stelle (Programm 1889) aufmerksam gemacht habe, alle ψ_ι durch Functionen

$$(1) \qquad \sum C_{\varkappa\varkappa}, \quad \sum_{\varkappa\lambda} C_{\varkappa\lambda} C_{\lambda\varkappa}, \ldots \sum_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_s} C_{\varkappa_1\varkappa_2} C_{\varkappa_2\varkappa_3} \ldots C_{\varkappa_s\varkappa_1}$$

und umgekehrt ausdrücken. Man kann daher die Zahl l auch definiren als die kleinste Zahl von Functionen, durch welche alle Functionen (1) sich darstellen lassen. Dass diese Zahl namentlich für diejenigen Gruppen, welche ihre eigenen Hauptuntergruppen sind, von hervorragender Bedeutung ist, hat sich durch die früheren Untersuchungen ergeben. Indessen hat in den drei ersten Theilen (abgesehen von den §§ 10 und 19, deren Zweck darin bestand, eine Classe von Gruppen auszuschliessen) den Ausgangspunkt für die Untersuchung immer die Zahl k gegeben, welche definirt wird als die grösste Zahl, für welche alle Unterdeterminanten $(r - k + 1)^{\text{ten}}$ Grades in der charakteristischen Determinante identisch verschwinden. Diese Zahl giebt die Gliederzahl für eine Untergruppe an, deren Transformationen sämmtlich mit einander vertauschbar sind und der eine ganz allgemein gewählte Transformation angehört. Dieser Zahl kommt noch eine zweite Eigenschaft zu. Man weiss, dass alle Functionen (1) Invarianten der adjungirten Gruppe sind, und dass sich deren Zahl auf l wesentliche Invarianten zurückführen lässt. Wenn aber $k > l$ ist, so hat diese Gruppe $k - l$ weitere Invarianten oder es giebt ausser den l angeführten noch weitere Lösungen der r Differentialgleichungen:

$$(2) \qquad \sum^{\varrho} C_{\alpha\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_\varrho} = 0 \qquad (\alpha = 1 \ldots r).$$

Wenn die Gruppe in der speciellen Form gegeben ist, welche durch die charakteristische Gleichung gewonnen wird, so ist es nicht schwer, auch diese weiteren Invarianten anzugeben; indessen ist es mir bisher nicht gelungen, eine allgemeine Form für diese Functionen aufzustellen.

Der Unterschied dieser beiden Arten von Invarianten tritt in § 4 (Bd. 31, S. 268) nicht so deutlich hervor, als ich wünschen möchte; vielmehr können Angaben, welche dort gemacht sind, leicht Missverständnisse hervorrufen. Um dieselben zu beseitigen, spreche ich folgende Sätze aus, für deren Beweis ich auf § 4 verweise:

„Wenn $P(\eta)$ eine lineare Invariante der adjungirten Gruppe, also eine lineare Lösung der r Differentialgleichungen (2) ist, so stellt $P(\eta)=0$ eine invariante Untergruppe der gegebenen Gruppe dar.“

„Wenn die einer Gruppe adjungirte Gruppe gerade i von einander unabhängige lineare Invarianten besitzt, so ist die Hauptuntergruppe $(r-i)$-gliedrig und wird durch das Verschwinden der i linearen Invarianten dargestellt.“

Wir bezeichnen noch die l Invarianten, welche durch die Functionen (1) gegeben sind, als solche der ersten Classe, und die übrigen $k-l$ als solche zweiter Classe; dann können wir folgenden Satz beifügen:

„Für eine invariante Untergruppe $r-1^{\text{ten}}$ Grades, welche durch das Verschwinden einer linearen Invariante der ersten Classe erhalten wird, ist der Rang um eins kleiner als der der gegebenen Gruppe; verschwindet aber eine Invariante der zweiten Classe, so ist der Rang der Untergruppe ebenso gross wie für die gegebene Gruppe selbst.“

Nachdem mehrere Resultate meiner Arbeit: Zur Theorie der Lie'schen Transformationsgruppen, (Programm 1886), in der vorliegenden Abhandlung erweitert worden sind, halte ich es für angebracht, die weiteren darin enthaltenen Sätze, soweit sie sich auf die Zusammensetzung, also auf die Coefficienten c beziehen, im folgenden zu wiederholen. Ich führe r unbeschränkt veränderliche und von einander unabhängige Grössen $u_1 \dots u_r$ ein und setze der Kürze wegen:

$$(\iota\varkappa)=\sum^{\varrho} c_{\iota\varkappa\varrho}u_\varrho;$$

ebenso soll $(0\varkappa)=u_\varkappa$, $(\varkappa 0)=-u_\varkappa$ sein. Jetzt sei aus der Reihe $1\dots r$ irgend eine gerade Zahl $2e$ von Nummern $\alpha\beta\gamma\dots\varepsilon\zeta$ ausgewählt; dann ist bekanntlich die Determinante

$$\begin{vmatrix} (\alpha\alpha) & (\alpha\beta) & \dots & (\alpha\zeta) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\zeta\alpha) & (\zeta\beta) & \dots & (\zeta\zeta) \end{vmatrix}$$

das Quadrat eines Ausdrucks $(\alpha\beta\gamma\dots\varepsilon\zeta)$, der auch selbständig definirt werden kann. Zugleich besteht die Gleichung:

$$(3)\quad e\cdot(\alpha\beta\gamma\cdots\zeta)=\sum^{\varrho}\{c_{\alpha\beta\varrho}(0\gamma\cdots\zeta\varrho)+c_{\alpha\gamma\varrho}(0\delta\cdots\zeta\beta\varrho)+\cdots\},$$

wo in der Klammer auf der rechten Seite $e(2e-1)$ Producte stehen, deren jedes erhalten wird, indem man aus den Nummern $\alpha\beta\dots\zeta$ zunächst zwei Marken $\alpha'\beta'$ beliebig auswählt und dann die übrigen $2e-2$ Marken $\gamma'\dots\zeta'$ so hinzufügt, dass $\alpha'\beta'\gamma'\dots\zeta'$ aus $\alpha\beta\gamma\dots\zeta$ durch eine gerade Zahl von Permutationen erhalten wird.

Wählt man aus der Reihe $1 \ldots r$ eine ungerade Zahl $2e+1$ von Nummern $\alpha\beta\gamma \ldots \varepsilon\zeta\eta$, so erhalten wir die Formel:

$$(4) \qquad \sum^{\varrho} \{c_{\alpha\beta\varrho}(\gamma \ldots \zeta\eta\varrho) + c_{\alpha\gamma\varrho}(\delta \ldots \zeta\eta\beta\varrho) + \cdots\} = 0,$$

wo in der Klammer $e(2e+1)$ Producte stehen, welche ganz ähnlich wie oben bestimmt werden.

Die Bedingung, dass der Coefficient $\psi_1(\eta)$ von ω^{r-1} in der charakteristischen Gleichung identisch verschwindet, kann auch in der Form der r Gleichungen geschrieben werden:

$$(5) \qquad \sum^{\varrho} \frac{\partial(\alpha\varrho)}{\partial u_\varrho} = 0 \quad (\alpha = 1 \ldots r).$$

Dann folgen aber auch, wenn α, β, γ drei, $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ fünf und $\alpha\beta \ldots \eta$ irgend $2e+1$ verschiedene Marken der Reihe $1 \ldots r$ sind, die Gleichungen:

$$\sum^{\varrho} \frac{\partial(\alpha\beta\gamma\varrho)}{\partial u_\varrho} = 0, \quad \sum^{\varrho} \frac{\partial(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varrho)}{\partial u_\varrho} = 0 \cdots \sum^{\varrho} \frac{\partial(\alpha\beta \ldots \zeta\eta\varrho)}{\partial u_\varrho} = 0.$$

Bildet man die Ausdrücke $(\alpha\beta \ldots \eta)$ für die grösste Zahl $r-s$ von Nummern, für welche dieselben nicht identisch verschwinden, so werden, wenigstens im allgemeinen, s Functionen $\varphi_1 \ldots \varphi_s$ gefunden werden können, so dass, wenn $\alpha\beta \ldots \eta$, $\varkappa \ldots \nu$ eine gerade Permutation von $1 \ldots \varrho$ darstellt, die Functionaldeterminante

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_s \\ \varkappa & \lambda & \ldots & \nu \end{pmatrix} = (\alpha\beta \ldots \zeta\eta)$$

ist. Zugleich sind $\varphi_1 \ldots \varphi_s$ Invarianten der zweiten adjungirten Gruppe

$$\sum_{\nu\varrho} \frac{\partial f}{\partial u_\iota} c_{\iota\varkappa\varrho} u_\varrho.$$

In der bezeichneten Arbeit hatte ich behauptet, dass die Functionen $\varphi_1 \ldots \varphi_s$ unter der Bedingung $\psi_1 = 0$ stets existiren. Ich erkannte aber schon im Frühjahr 1886, dass der Satz Ausnahmen erleidet und stellte damals die Bedingungen für seine Gültigkeit vollständig auf. Da ich jedoch den angegebenen Satz jetzt vollständig entbehren kann, habe ich diese Bedingungen nicht veröffentlicht.

§ 27.

Ein allgemeiner Satz über invariante Untergruppen.

Eine Reihe von Sätzen lässt sich leicht aus dem folgenden Theorem herleiten:

Die Hauptuntergruppe einer invarianten Untergruppe einer gegebenen Gruppe ist selbst wieder eine invariante Untergruppe derselben.

Zum Beweise nehmen wir an, die *gegebene* Gruppe G_r habe eine invariante Untergruppe G_i; letztere sei weder ihre eigene Hauptuntergruppe, noch seien alle ihre Transformationen mit einander vertauschbar, sie habe vielmehr eine unter G_i enthaltene Hauptuntergruppe G_h. Dann behaupte ich, dass auch G_h eine invariante Untergruppe von G_r ist. Die Herleitung ist ausserordentlich einfach und stützt sich fast nur auf die hier benutzten Begriffe. Die infinitesimalen Transformationen, durch welche G_h bestimmt wird, mögen mit X_α, X_β, X_γ . . . bezeichnet werden; für G_i mögen zu den Marken $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ die Marken $\iota, \varkappa, \lambda \ldots$ hinzukommen, und ebenso für G_r zu den $\alpha, \beta, \gamma \ldots \iota, \varkappa, \lambda \ldots$ noch die Marken $\varrho, \sigma, \tau \ldots$. Wir deuten eine lineare Function der inf. Transformationen wieder dadurch an, dass wir die entsprechenden Marken in eine eckige Klammer einschliessen. Dann sind durch die gestellten Bedingungen die Gleichungen gegeben:

$$(1)\quad \begin{array}{l} (X_\alpha X_\beta) = [\alpha,\beta,\gamma\ldots], \quad (X_\alpha X_\iota) = [\alpha,\beta,\gamma\ldots], \quad (X_\iota X_\varkappa) = [\alpha,\beta,\gamma\ldots], \\ (X_\alpha X_\varrho) = [\alpha,\beta,\gamma \ldots \iota,\varkappa,\lambda \ldots], \quad (X_\iota X_\varrho) = [\alpha,\beta,\gamma \ldots \iota,\varkappa,\lambda \ldots]. \end{array}$$

Hier ist zu beweisen, dass $(X_\alpha X_\varrho) = [\alpha, \beta, \gamma \ldots]$ ist. Zu dem Ende bilde man die Jacobi'schen Identitäten (α, β, ϱ), (α, ι, ϱ), $(\iota, \varkappa, \varrho)$, welche die Gleichungen nach sich ziehen:

$$(2)\quad \big(X_\varrho(X_\alpha X_\beta)\big) = [\alpha, \beta, \gamma \ldots], \quad \big(X_\varrho(X_\alpha X_\iota)\big) = [\alpha, \beta, \gamma \ldots],$$
$$\big(X_\varrho(X_\iota X_\varkappa)\big) = [\alpha, \beta, \gamma \ldots].$$

Diese Gleichungen sagen aus, dass die Combinirung von irgend einer inf. Transformation mit jedem Ausdruck, zu dem man durch die Operationen $(X_\alpha X_\beta)$, $(X_\alpha X_\iota)$ und $(X_\iota X_\varkappa)$ gelangt, zu Transformationen führt, welche allein durch X_α, X_β, $X_\gamma \ldots$ dargestellt werden können, also der G_h angehören. Da aber G_h die Hauptuntergruppe von G_i ist, so müssen die sämmtlichen Ausdrücke $(X_\alpha X_\beta)$, $(X_\alpha X_\iota)$, $(X_\iota X_\varkappa)$ ebensoviele von einander unabhängige Transformationen liefern, als G_h Glieder hat; es lässt sich also jede inf. Transformation von G_h durch die $(X_\alpha X_\beta)$, $(X_\alpha X_\iota)$, $(X_\iota X_\varkappa)$ darstellen. Wenn man also irgend eine inf. Transformation von G_h mit X_ϱ combinirt, so erhält man einen Ausdruck, welcher durch die inf. Transformationen dieser Untergruppe darstellbar ist; im Ausdruck von $(X_\alpha X_\varrho)$ sind also die X_ι, $X_\varkappa \ldots$ nicht enthalten, oder G_h ist bereits eine invariante Untergruppe der gegebenen Gruppe G_r.

Wenn G_i eine invariante Untergruppe von G_r ist, so sind drei Fälle möglich: entweder ist G_i ihre eigene Hauptuntergruppe, oder alle Transformationen von G_i sind mit einander vertauschbar, oder drittens G_i enthält eine Hauptuntergruppe, welche von G_i verschieden ist. Im letzten Falle ist die so erhaltene Hauptuntergruppe für die gegebene Gruppe eine invariante Untergruppe; für diese können wir wiederum dieselbe Unterscheidung machen und damit fortfahren, bis wir entweder zu einer invarianten Untergruppe gelangen, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist, oder zu einer, deren Transformationen sämmtlich mit einander vertauschbar sind. In den letzteren Fall ist natürlich eine eingliedrige invariante Untergruppe einzuschliessen. Speciell können wir also die Sätze aufstellen:

Jede Gruppe, mit Ausnahme der einfachen Gruppen, hat entweder mindestens eine invariante Untergruppe, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind, oder mindestens eine, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist.

Jede Gruppe, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist, mit Ausnahme der einfachen und halbeinfachen Gruppen, besitzt eine invariante Untergruppe, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind.

Für den Beweis des letzteren Satzes haben wir zu berücksichtigen, dass jede solche Gruppe eine invariante Untergruppe vom Range null hat; bildet man deren Hauptuntergruppe und fährt damit fort, so gelangt man zu einer Untergruppe, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind.

Der Umkehrung des an die Spitze des Paragraphen gestellten Satzes geben wir folgende Form:

Wenn G_i eine invariante Untergruppe einer gegebenen Gruppe ist, aber keine Untergruppe unter sich enthält, welche für die gegebene Gruppe invarianten Charakter besitzt, so müssen entweder alle Transformationen von G_i mit einander vertauschbar sein oder G_i muss ihre eigene Hauptuntergruppe sein.

Einen Theil des hier bewiesenen Satzes habe ich bereits in § 6 meiner Abhandlung: Zur Theorie der Lie'schen Transformationsgruppen (Programm unseres Lyceums für den Sommer 1886) gegeben. Nur habe ich dort beim Beweise, aber nicht in der Fassung des Satzes darauf Rücksicht genommen, dass eine invariante Untergruppe eine solche unter sich enthalten kann. Der dort angegebene Satz muss also folgende Fassung erhalten:

Wenn unter einer invarianten Untergruppe G_i keine invariante Untergruppe einer gegebenen Gruppe enthalten ist, so muss der Coefficient $\psi_1(\eta)$ von ω^{i-1} in der für G_i gebildeten charakteristischen Gleichung identisch verschwinden.

Dort ist das Verschwinden allgemein behauptet, und nur beim Beweise darauf hingedeutet, dass der Satz nur für die niedrigste invariante Untergruppe gilt.

Es sei gestattet, einige specielle Fälle des im vorstehenden bewiesenen allgemeinen Satzes anzuführen. Wenn eine Gruppe G_r eine zweigliedrige invariante Untergruppe besitzt, so sind deren Transformationen entweder mit einander vertauschbar, oder das Hauptelement der Untergruppe ist eine invariante eingliedrige Untergruppe für G_r. Besitzt eine Gruppe eine invariante Untergruppe von drei, aber nicht von weniger Parametern, so ist letztere entweder eine Kegelschnittsgruppe oder ihre Transformationen sind sämmtlich mit einander vertauschbar. Die Transformationen einer viergliedrigen invarianten Untergruppe einer Gruppe, welche keine in der viergliedrigen enthaltene Untergruppe zur invarianten Untergruppe hat, sind mit einander vertauschbar.

§ 28.

Kegelschnittsgruppen als Untergruppen.

Aus den Entwicklungen des dritten Theiles (Annalen Bd. 34, S. 107) folgt, dass jede Gruppe, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist, einfache Gruppen zu Untergruppen hat; der zweite Theil lehrt aber, dass jede einfache Gruppe von beliebigem Range wiederum einfache Gruppen des Ranges eins enthält; somit folgt:

Jede Gruppe, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist, enthält Kegelschnittsgruppen.

Dabei darf man jedoch im allgemeinen eine Transformation der gegebenen Gruppe nicht ganz beliebig wählen, wenn sie einer in ihr enthaltenen Kegelschnittsgruppe angehören soll. Das ist vielmehr nur bei einer ganz bestimmten Classe von solchen Gruppen der Fall, nämlich den in den §§ 7 u. 8 (Bd. 31, S. 278 u. S. 282) angegebenen Gruppen vom Range eins für welche die charakteristische Gleichung im Allgemeinen nur eine einzige verschwindende Wurzel besitzt. Welche weiteren Bedingungen bei den übrigen Gruppen erfüllt sein müssen, soll uns hier nicht beschäftigen. Wir wollen vielmehr jetzt zu denjenigen Gruppen übergehen, welche nicht ihre eigenen Hauptuntergruppen sind, und annehmen, eine solche enthalte Kegelschnittsgruppen unter sich. Soll jetzt eine Transformation einer Kegelschnittsgruppe angehören, welche Untergruppe zu der gegebenen ist, so darf sie wiederum nicht beliebig gewählt werden, sondern sie muss zunächst der Hauptuntergruppe der gegebenen Gruppe angehören. Es gilt nämlich der Satz:

Jede Kegelschnittsgruppe, welche eine Untergruppe einer gegebenen Gruppe ist, gehört ihrer Hauptuntergruppe an.

Die gegebene Gruppe werde durch $X_1 \dots X_r$, die Kegelschnittsgruppe durch $\sum \eta_\iota' X_\iota$, $\sum \eta_\iota'' X_\iota$, $\sum \eta_\iota''' X_\iota$ bestimmt. Wenn dann $\varkappa, \lambda, \mu$ irgend eine gerade Permutation der Zahlen $1, 2, 3$ ist, so muss sein:

$$(1) \quad \left(\sum \eta_\iota^{(\lambda)} X_\iota, \ \sum \eta_\iota^{(\mu)} X_\iota\right) = \sum (a_\varkappa \eta_\iota' + b_\varkappa \eta_\iota'' + c_\varkappa \eta_\iota''') X_\iota$$

und die aus den 9 Coefficienten $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$ gebildete Determinante muss von null verschieden sein. Nach der Definition der Hauptuntergruppe gehört die rechte Seite von (1) derselben für $\varkappa = 1, 2, 3$ an und da die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, so muss auch jede in der Kegelschnittsgruppe enthaltene eingliedrige Untergruppe der Hauptuntergruppe angehören.

Dieser Satz kann in folgender Weise verallgemeinert werden:

Wenn eine in einer Gruppe G enthaltene Transformation einer Untergruppe U angehört, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist, so muss sie zugleich der Hauptuntergruppe H von G angehören.

Wieder sei G durch $X_1 \dots X_r$, U durch $Y_1 \dots Y_m$ bestimmt, und es seien $Y_1 \dots Y_m$ linear durch $X_1 \dots X_r$ darstellbar. Zugleich muss jedes $(Y_\iota Y_\varkappa)$ durch $Y_1 \dots Y_m$ ausgedrückt werden können und umgekehrt müssen alle $Y_1 \dots Y_m$ sich durch eine passend gewählte Anzahl verschiedener Ausdrücke $(Y_\iota Y_\varkappa)$ darstellen lassen. Da H die Hauptuntergruppe von G ist, müssen alle Transformationen $(Y_\iota Y_\varkappa)$ der Gruppe H angehören, folglich auch $Y_1 \dots Y_m$, was bewiesen werden sollte.

Die Gruppen können in zwei Classen eingetheilt werden: die der ersten Classe besitzen solche Untergruppen, welche ihre eigenen Hauptuntergruppen sind, die der zweiten besitzen solche nicht. Speciell können wir auch sagen, die Gruppen der ersten Classe enthielten Kegelschnittsgruppen, die der zweiten Classe nicht. Es handelt sich jetzt darum, zu entscheiden, wann der eine und wann der andere Fall eintritt, und im ersten Falle alle Untergruppen der bezeichneten Art zu bestimmen. Diese beiden Aufgaben werden in folgender Weise gelöst: Man suche zu der gegebenen Gruppe G die Hauptuntergruppe, d. h. diejenige Gruppe, welche durch die Transformationen $(X_\iota X_\varkappa)$ bestimmt wird. Wenn diese Gruppe mit der gegebenen identisch ist, so gehört die Gruppe der ersten Classe an. Im andern Falle möge H_1 die Hauptuntergruppe sein; deren Hauptuntergruppe sei H_2, deren H_3 u. s. w. Nun ist, wenn nicht H_2 mit H_1 resp. H_3 mit H_2 identisch ist, die Gliederzahl von H_2 kleiner als die von H_1 und die von H_3 wieder mindestens um eins kleiner als die von H_2. Somit führt dieser Process nach einer endlichen Zahl von Wiederholungen entweder auf eine Gruppe H_m, die ihre eigene Hauptuntergruppe ist, oder auf eine solche, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind. Im ersten Falle ist H_m selbst eine Untergruppe der betrachteten Art, im zweiten Falle können solche überhaupt nicht vorkommen.

Sobald man die Darstellung der Ausdrücke $(X_\iota X_\varkappa)$ *durch die* $X_1 \dots X_r$ *kennt, erfordert die Entscheidung der Frage, ob die Gruppe Kegelschnittsgruppen enthält oder nicht, nur ganz einfache Eliminationen.*

Wenn der eben angegebene Process auf eine Gruppe H_m führt, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist, so muss nach den vorangegangenen Entwicklungen jede derartige Untergruppe ganz in H_m enthalten sein. Die Aufgabe, alle derartigen Untergruppen von G zu finden, führt also auf das Problem:

In einer vorgelegten Gruppe, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist, alle Untergruppen zu bestimmen, denen dieselbe Eigenschaft zukommt.

Die Lösung dieses Problems gehört nicht hierher, es genüge deshalb, folgendes Ergebniss anzugeben:

Wenn eine Gruppe Kegelschnittsgruppen enthält, ohne ihre eigene Hauptuntergruppe zu sein, so sind alle ihre Untergruppen, welche ihre eigenen Hauptuntergruppen sind, in einer ganz bestimmten Untergruppe enthalten, der dieselbe Eigenschaft zukommt.

Da wir uns im folgenden noch besonders mit den hier charakterisirten Gruppen beschäftigen werden, so wird es nicht nothwendig sein, auf diejenige Darstellung dieser Gruppen einzugehen, welche sich aus den vorstehenden Entwicklungen ergiebt. Wir wollen jetzt zu der zweiten Classe von Gruppen übergehen; für dieselben liefert die vorangehende Untersuchung folgenden Satz:

Wenn eine Gruppe keine Kegelschnittsgruppe enthält, so muss ihre Hauptuntergruppe weniger Glieder enthalten als die gegebene Gruppe, und deren Hauptuntergruppe wieder weniger Glieder u. s. f.,

oder in andern Worten:

Zu einer Gruppe G*, welche keine Kegelschnittsgruppe enthält, suche man die Hauptuntergruppe* H_1*, zu dieser die Hauptuntergruppe* H_2 *u. s. w. Dann wird die Gliederzahl jedesmal mindestens um eins vermindert, und man gelangt schliesslich zu einer Untergruppe* H_m*, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind.*

Nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen ist jede der so gefundenen Untergruppen $H_1, H_2 \dots H_m$ eine invariante Untergruppe der gegebenen Gruppe G. Um daher die Gestaltung der Gruppe G darzustellen, kann man, wenn H_m r_1-gliedrig ist, r_1 inf. Transformationen $X_{\iota_1}, X_{\varkappa_1} \dots$ zur Darstellung von H_m benutzen. Zur Darstellung der r_2-gliedrigen Gruppe H_{m-1} füge man $r_2 - r_1$ Transformationen $X_{\iota_2}, X_{\varkappa_2} \dots$ hinzu u. s. w. Endlich mögen zur Bestimmung von H_1 noch die inf. Transformationen $X_{\iota_m}, X_{\varkappa_m} \dots$ hinzutreten. Eine ganz beliebige inf. Transformation von G möge mit X_ϱ bezeichnet werden, und dabei möge es gleichgültig sein, ob dieselbe einer der Untergruppen $H_1 \dots H_m$ angehört oder nicht. Wird diese Bezeichnung zu grunde gelegt, so gelten folgende Relationen, in denen die eckigen Klammern wieder lineare homogene Gleichungen bezeichnen:

$$(X_{\iota_1}\, X_{\varkappa_1}) = 0, \quad (X_{\iota_1}\, X_\varrho) = [\iota_1, \varkappa_1 \ldots], \quad (X_{\iota_2}\, X_{\varkappa_2}) = [\iota_1, \varkappa_1, \ldots],$$
$$(X_{\iota_2}\, X_\varrho) = [\iota_1, \varkappa_1 \ldots \iota_2, \varkappa_2 \ldots], \quad (X_{\iota_3}\, X_{\varkappa_3}) = [\iota_1, \varkappa_1 \ldots \iota_2, \varkappa_2 \ldots],$$
$$(X_{\iota_3}\, X_\varrho) = [\iota_1, \varkappa_1 \ldots \iota_2, \varkappa_2 \ldots \iota_3, \varkappa_3 \ldots], \ldots$$
$$(X_{\iota_m} X_{\varkappa_m}) = [\iota_1, \varkappa_1 \ldots \iota_{m-1}, \varkappa_{m-1} \ldots],$$
$$(X_{\iota_m} X_\varrho) = [\iota_1, \varkappa_1 \ldots \iota_2, \varkappa_2 \ldots \iota_m, \varkappa_m \ldots].$$

Wenn man statt der Hauptuntergruppen lieber invariante Untergruppen einführen will, so kann man folgenden Satz aussprechen, den bereits Herr Engel bewiesen hat:

Jede r-gliedrige Gruppe, welche keine Kegelschnittsgruppe enthält, besitzt mindestens eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe G_{r-1}, diese wieder mindestens eine $(r-2)$-gliedrige invariante Untergruppe G_{r-2} u. s. w.

Wenn nämlich die Hauptuntergruppe H_1 von G gerade $r-1$ Glieder hat, so ist sie selbst die einzige $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe. Hat aber H_1 nur $r-\alpha$ Glieder, so füge man zu H_1 noch $\alpha - 1$ von einander und von H_1 unabhängige inf. Transformationen aus G hinzu; dann ist die so gebildete Untergruppe sicherlich invariant. Diese ist aber von derselben Eigenschaft; daher gelangt man zu G_{r-2}, G_{r-3} ....

Gruppen der zuletzt betrachteten Art sind zuerst von Herrn Lie (Archiv for Math. B. 3, S. 112—116, 1878) und dann von Herrn Engel (Leipziger Berichte 1886 S. 83—94) untersucht worden. Die neuen Resultate, welche ich in diesem Paragraphen hinzufügen konnte, brauche ich wohl nicht besonders hervorzuheben, da sie bei Vergleichung der angegebenen Arbeiten mit den vorstehenden Entwicklungen sofort zu tage treten.

§ 29.

Welche Gruppen können Hauptuntergruppen sein?

Um die Hauptuntergruppe einer gegebenen r-gliedrigen Gruppe zu untersuchen, nehmen wir zuvörderst an, die charakteristische Gleichung habe für jedes beliebige System in der r-gliedrigen Gruppe mindestens k verschwindende Wurzeln und zugleich seien alle Unterdeterminanten $(r-k+1)^{\text{ten}}$ Grades in der charakteristischen Determinante identisch gleich null. Dann kann man den $r-k$ nicht verschwindenden Wurzeln, welche die Gleichung für eine ganz allgemeine inf. Transformation hat, ebensoviele von einander unabhängige inf.

Transformationen zuordnen. Es ist selbstverständlich, dass diese der Hauptuntergruppe angehören; aber es fragt sich, unter welchen Bedingungen die Hauptuntergruppe nur $(r-k)$-gliedrig ist, also durch diese $r-k$ Transformationen vollständig bestimmt wird. Das ist nur möglich, wenn die Hauptuntergruppe vom Range null ist; es gilt nämlich der Satz:

Sucht man für irgend eine Transformation die Wurzeln der charakteristischen Gleichung und ordnet jeder nicht verschwindenden Wurzel so viele infinitesimale Transformationen zu, als der Grad der Wurzel beträgt, so genügen die so erhaltenen Transformationen nur dann zur Bestimmung der Hauptuntergruppe, wenn letztere vom Range null ist.

Die inf. Transformation allgemeiner Beschaffenheit, für welche die charakteristische Gleichung gebildet ist, möge mit X_r und die den nichtverschwindenden Wurzeln zugeordneten Transformationen mit $X_1 \ldots X_{r-k}$ bezeichnet werden; zugleich seien $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ Marken der Reihe $1 \ldots r-k$. Dann wird jedes $c_{\iota\varkappa\lambda}$ bestimmt verschwinden, wenn die letzte Marke λ nicht gleich einer Nummer $1 \ldots r-k$ ist.

Aus den Entwicklungen der §§ 7 und 12 ergiebt sich sofort, dass unter den gemachten Voraussetzungen $c_{\alpha\lambda\lambda} = 0$ und ebenso

$$\sum\nolimits^{\lambda} c_{\alpha\mu\lambda}\, c_{\beta\lambda\mu} = 0$$

ist. Auf dem dort angegebenen Wege kann man weiter gehen und die beiden hingeschriebenen Formeln erweitern. Daraus folgt dann der angegebene Lehrsatz. Ich ziehe es aber vor, einen andern Beweis zu liefern und nur dasjenige Gleichungssystem zwischen den Coefficienten $c_{\iota\varkappa\lambda}$ zu benutzen, welches in § 1 (Bd. 31, S. 257) aufgestellt und zur Grundlage für die Untersuchung der charakteristischen Gleichung gemacht worden ist. Um die allgemeine Gleichung dieser Art aufzustellen, wähle man aus den Nummern $1 \ldots r$ einmal $s+1$ feste Marken $\alpha, \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_s$ aus und lasse dann weitere $s+1$ Marken $\iota, \varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_s$ alle beliebigen Werthe von $1 \ldots r$ annehmen, und bilde die Summe:

$$(1) \qquad \sum \big(c_{\alpha\beta_1\iota}\, c_{\beta_2\varkappa_2\varkappa_3}\, c_{\beta_3\varkappa_3\varkappa_4} \ldots c_{\beta_s\varkappa_s\varkappa_1} + c_{\alpha\beta_2\iota}\, c_{\beta_3\varkappa_2\varkappa_3}\, c_{\beta_4\varkappa_3\varkappa_4} \ldots c_{\beta_1\varkappa_s\varkappa_1}$$
$$+ \cdots + c_{\alpha\beta_s\iota}\, c_{\beta_1\varkappa_2\varkappa_3}\, c_{\beta_2\varkappa_3\varkappa_4} \ldots c_{\beta_{s-1}\varkappa_s\varkappa_1}\big)\, c_{\iota\varkappa_1\varkappa_2} = 0,$$

wo von den s Producten, welche in der Klammer stehen, jedes folgende aus dem vorangehenden durch cyklische Vertauschung der Marken $\beta_1 \ldots \beta_s$ erhalten wird.

Zunächst führen wir den Beweis nur unter der Voraussetzung durch, dass alle Elementartheiler der charakteristischen Gleichung vom ersten Grade sind. Wenn dann α eine der Marken $1 \ldots r-k$ ist, so ist $c_{r\alpha\beta}$ für $\alpha \gtrless \beta$ gleich null, dagegen für $\alpha = \beta$ gleich ω_α. Da der Voraussetzung nach durch die Marken $1 \ldots r-k$ eine Untergruppe bestimmt wird und die Gleichung (1) für jede Gruppe gültig ist, so können wir Besonderheiten der vorliegenden Untergruppe nur dadurch erhalten, dass wir einige der festen Marken einen Werth annehmen lassen, welcher zu einer mit X_r vertauschbaren Transformation gehört. Nun wissen wir aber im allgemeinen nicht, wie viele solcher von einander unabhängigen Transformationen vorhanden sind, und unser Resultat soll auch für $k = 1$ gelten. Demnach haben wir einige der Marken $\alpha, \beta_1 \dots \beta_s$ gleich r zu setzen. Für $\alpha = r$ folgt aus (1):

$$(\omega_{\beta_1} + \cdots + \omega_{\beta_s}) \sum_{\varkappa_1 \dots \varkappa_s} c_{\beta_1 \varkappa_1 \varkappa_2} c_{\beta_2 \varkappa_2 \varkappa_3} \dots c_{\beta_s \varkappa_s \varkappa_1} = 0,$$

so dass entweder der erste oder der zweite Factor verschwinden muss. Da es uns aber darauf ankommt, das allgemeine Verschwinden des zweiten Factors zu beweisen, so müssen wir einen ziemlich weitläufigen Weg einschlagen. Wir setzen daher in (1) zunächst $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_s = r$ und erhalten:

$$\sum^{\varkappa} c_{\alpha \varkappa \varkappa} \omega_{\varkappa}^{s-1} = 0.$$

Da diese Gleichung für jedes s gilt, so folgt:

$$c_{\alpha \varkappa \varkappa} + c_{\alpha \varkappa_1 \varkappa_1} + c_{\varkappa \varkappa_2 \varkappa_2} + \cdots = 0,$$

wofern $\omega_{\varkappa} = \omega_{\varkappa_1} = \omega_{\varkappa_2} = \cdots$ ist.

Ebenso wähle man jetzt für $\beta_2, \beta_3 \dots \beta_s$ den Werth r, lasse aber α und β_1 $(= \beta)$ zwei beliebige Nummern der Reihe $1 \dots r - k$ sein. Dann muss im ersten Producte $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \cdots = \varkappa_s$ $(= \varkappa)$ gesetzt werden, und wir erhalten jedes $c_{\alpha\beta\iota}$ multiplicirt mit

$$\sum^{\varkappa} c_{\iota \varkappa \varkappa} \omega_{\varkappa}^{s-1},$$

was nach dem Vorstehenden verschwindet. Die weiteren Producte liefern:

$$\sum_{\varkappa_1 \varkappa_2} c_{\alpha \varkappa_1 \varkappa_2} c_{\beta \varkappa_2 \varkappa_1} (\omega_{\varkappa_2}^{s-2} + \omega_{\varkappa_2}^{s-3} \omega_{\varkappa_1} + \cdots + \omega_{\varkappa_1}^{s-2}) = 0,$$

und da diese Gleichung wieder für jedes s gilt, folgt

$$\sum^{\lambda} (c_{\alpha \varkappa \lambda} c_{\beta \lambda \varkappa} + c_{\gamma \varkappa_1 \lambda} c_{\beta \lambda \varkappa_1} + \cdots) = 0$$

wenn ist:

$$\omega_{\varkappa} = \omega_{\varkappa_1} = \cdots.$$

Lässt man α, β_1, β_2 Marken der Reihe $1 \dots r - k$, dagegen $\beta_3 = \cdots = \beta_s = r$ sein, so wird im ersten Product in (1) das $c_{\alpha\beta_1\iota}$ multiplicirt mit

$$\sum_{\varkappa_1 \varkappa_2} c_{\iota \varkappa_1 \varkappa_2} c_{\beta_2 \varkappa_2 \varkappa_1} \omega_{\varkappa_1}^{s-2},$$

im zweiten das $c_{\alpha\beta_2\iota}$ mit

$$\sum_{\varkappa_1\varkappa_2} c_{\iota\varkappa_1\varkappa_2}\, c_{\beta_1\varkappa_2\varkappa_1}\, \omega_{\varkappa_2}^{s-2},$$

welche beiden Producte bereits als verschwindend nachgewiesen sind. Wir erhalten somit die neue Gleichung:

$$\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\varkappa_3} c_{\alpha\varkappa_1\varkappa_2}\, c_{\beta_1\varkappa_2\varkappa_3}\, c_{\beta_2\varkappa_3\varkappa_1} \left(\omega_{\varkappa_2}^{s-3} + \omega_{\varkappa_2}^{s-4}\omega_{\varkappa_1} + \cdots + \omega_{\varkappa_2}\,\omega_{\varkappa_1}^{s-4} + \omega_{\varkappa_1}^{s-3}\right) = 0.$$

Wenn man will, kann man hier andere Marken, etwa α, β_1, β_3 der Reihe $1 \ldots r-k$ angehören lassen und erhält eine andere Gleichung. Jedenfalls gilt aber die hingeschriebene Gleichung für jedes s, und man schliesst wieder, dass die Summe

$$\sum c_{\alpha\varkappa_1\varkappa_2}\, c_{\beta_1\varkappa_2\varkappa_3}\, c_{\beta_2\varkappa_3\varkappa_1}$$

verschwindet, wofern die Summation nach $\varkappa_1$ nur über alle Marken erstreckt ist, zu denen die einer festen ω_γ gleichen Wurzeln gehören, während die Summation nach $\varkappa_2, \varkappa_3$ sich über $1 \ldots r-k$ erstreckt.

In gleicher Weise kann man beliebig fortfahren; dann beweist man auf dem mehrfach durchgeführten Wege, dass die Gleichung

$$\sum_{\varkappa_1\cdots\varkappa_i} c_{\alpha\varkappa_1\varkappa_2}\, c_{\beta_1\varkappa_2\varkappa_3}\, c_{\beta_2\varkappa_3\varkappa_4} \ldots c_{\beta_{i-1}\varkappa_i\varkappa_1} = 0 \tag{2}$$

nicht nur richtig ist, wenn man die Summation von allen $\varkappa_1 \ldots \varkappa_i$ über die Marken $1 \ldots r-k$ erstreckt, sondern auch, wenn man für $\varkappa_1$ nur diejenigen Marken nimmt, für welche die zugehörige Wurzel denselben Werth hat.

Wir bezeichnen die Summe

$$\sum_1^n{}_\varrho\, \eta_\varrho\, c_{\varrho\alpha\beta} \quad \text{mit} \quad C_{\alpha\beta},$$

wenn die Summation über alle Marken $1 \ldots r$ erstreckt wird; dagegen soll die Summe

$$\sum_1^{r-k}{}_\varrho\, \eta_\varrho\, c_{\varrho\alpha\beta} \quad \text{mit} \quad C'_{\alpha\beta}$$

bezeichnet werden, wenn die Summation nach ϱ auf die Marken $1 \ldots r-k$ beschränkt wird.

Multipliciren wir nun die linke Seite von (2) mit $\eta_\alpha\, \eta_{\beta_1} \ldots \eta_{\beta_{i-1}}$ und summiren auch nach α über die Marken $1 \ldots r-k$, so geht die Gleichung (2) über in

$$\sum C'_{\varkappa_1\varkappa_2}\, C'_{\varkappa_2\varkappa_3}\, C'_{\varkappa_3\varkappa_4} \ldots C'_{\varkappa_i\varkappa_1} = 0. \tag{3}$$

Wir stellen für die Hauptuntergruppe die charakteristische Gleichung auf, so lassen sich deren Coefficienten als ganze Functionen von

$$\sum C'_{\varkappa\varkappa}, \quad \sum C'_{\varkappa\lambda} C'_{\lambda\varkappa}, \quad \sum C'_{\varkappa\lambda} C'_{\lambda\mu} C'_{\mu\varkappa} \ldots$$

darstellen. Da die letzteren sämmtlich identisch verschwinden, müssen es auch die ersteren thun; in der vorausgesetzten Hauptuntergruppe sind also stets alle Wurzeln gleich null, was bewiesen werden sollte.

Wir haben jetzt den aufgestellten Satz noch für den Fall zu beweisen, dass nicht alle Elementartheiler vom ersten Grade sind. Wenn die Wurzel ω_α zu einem Elementartheiler $(\lambda + 1)^{\text{ten}}$ Grades gehört, so bilden wir die zugeordneten inf. Transformationen so, dass die Gleichungen bestehen:

$$(X_r X_{\alpha^{(\lambda)}}) = \omega_\alpha X_{\alpha^{(\lambda)}} + X_{\alpha^{(\lambda-1)}}, \ldots (X_r X_{\alpha'}) = \omega_\alpha X_{\alpha'} + X_\alpha, \quad (X_r X_\alpha) = \omega_\alpha X_\alpha.$$

Die Ordnungszahl, in welcher, diesen Gleichungen entsprechend, eine inf. Transformation zu ihrer Wurzel gehört, soll dadurch bezeichnet werden, dass man die Marke in $|\;|$ einschliesst, so dass unter Voraussetzung der vorigen Gleichung ist:

$$|\alpha| = 1, \; |\alpha'| = 2, \ldots |\alpha^{(\lambda)}| = \lambda + 1.$$

Ferner soll, wenn $\varkappa$ irgend eine Marke ist, die zu derselben Wurzel, aber zu der um eins höhern Ordnung gehörige Marke mit $\varkappa'$ bezeichnet werden, so dass die Gleichungen bestehen:

$$|\varkappa'| = |\varkappa| + 1, \quad \omega_{\varkappa'} = \omega_\varkappa, \quad (X_r X_{\varkappa'}) = \omega_\varkappa X_{\varkappa'} + X_\varkappa.$$

Wir benutzen einen in § 8 (Bd. 31, S. 281) bewiesenen Satz. Dort ist nämlich gezeigt worden, dass, wenn X_ι in dem angegebenen Sinne eine Transformation μ^{ter} und $X_\varkappa$ eine solche ν^{ter} Ordnung ist, dann im Ausdruck von $(X_\iota X_\varkappa)$ nur Transformationen vorkommen, deren Ordnungszahl höchstens $\mu + \nu - 1$ beträgt.

In (1) wählen wir $\alpha, \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{i-1}$ so, dass die zugehörigen Transformationen von der ersten Ordnung sind, und setzen

$$\beta_i = \beta_{i+1} = \cdots = \beta_s = r.$$

Dann ist in (1) das erste Glied:

$$\sum{}^{\iota} c_{\alpha\beta\,\iota} \sum_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_s} c_{\iota\varkappa_1\varkappa_2} c_{\beta_2\varkappa_2\varkappa_3} c_{\beta_3\varkappa_3\varkappa_4} \cdots c_{\beta_{i-1}\varkappa_i\varkappa_{i+1}} c_{r\varkappa_{i+1}\varkappa_{i+2}} \cdots c_{r\varkappa_s\varkappa_1},$$

Hier entsprechen $\varkappa_1, \varkappa_s, \ldots \varkappa_{i+2}, \varkappa_{i+1}$ demselben Elementartheiler; zugleich gehören $\alpha, \beta_1 \ldots \beta_{\iota-1}$ und demnach auch ι zu Transformationen erster Ordnung; es muss also sein:

$$|\varkappa_1| \leqq |\varkappa_s| \leqq \cdots \leqq |\varkappa_i| \cdots \leqq |\varkappa_1|,$$

so dass die Ordnungszahl überall dieselbe ist. Somit ist

$$\varkappa_1 = \varkappa_s = \cdots = \varkappa_{i+1},$$

und $c_{\alpha\beta_1\iota}$ wird multiplicirt mit:

$$\sum_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_i} c_{\iota\varkappa_1\varkappa_2}\, c_{\beta_2\varkappa_1\varkappa_2} \cdots c_{\beta_{i-1}\varkappa_i\varkappa_1}\, \omega_{\varkappa_1}^{s-i}.$$

Ebenso wird in (1) das $(i+1)^{\text{te}}$ Glied sein:

$$c_{\alpha r\alpha} \sum_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_s} c_{\alpha\varkappa_1\varkappa_2}\, c_{r\varkappa_2\varkappa_3} \cdots c_{r\,\varkappa_{s-i-1}\varkappa_{s-i}}\, c_{\beta_1\varkappa_{s-i}\varkappa_{s-i+1}} \cdots c_{\beta_{i-1}\varkappa_s\varkappa_1}.$$

Hier gehören wieder $\varkappa_2 \ldots \varkappa_{s-i+1}$ zu derselben Wurzel; zugleich sind die Ordnungszahlen dieselben. Deshalb erhalten wir $c_{\alpha r\alpha}$ multiplicirt mit der Summe:

$$\sum_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_i} c_{\alpha\varkappa_1\varkappa_2}\, c_{\beta_1\varkappa_2\varkappa_3} \cdots c_{\beta_{i-1}\varkappa_i\varkappa_1}\, \omega_{\varkappa_2}^{s-i}.$$

Dieselben beiden Summen würde man aber erhalten haben, wenn die charakteristische Gleichung nur Elementartheiler erster Ordnung enthielte. Demnach bleibt unter der gemachten Beschränkung die Gleichung (2) bestehen.

Wenn jetzt α zu einer Transformation zweiter Ordnung gehört, aber $\beta_1 \ldots \beta_{i-1}$ zu solchen erster Ordnung, so wird in (1) sowohl im ersten Product für $c_{\alpha\beta\iota}$ wie im $(i+1)^{\text{ten}}$ für $c_{\alpha r\iota}$ das ι entweder zu Transformationen erster oder zweiter Ordnung gehören. Für Transformationen erster Ordnung ist bereits das Verschwinden der erhaltenen Summe bewiesen; wir können also von diesen Summen ganz absehen. Von den weiter hinzutretenden Summen werden gewisse ebenfalls verschwinden, wenn wir annehmen, dass selbst für $|\alpha| = 2$ nicht nur die Gleichung (2), sondern auch die Gleichung

$$\sum c_{\alpha\varkappa_1\varkappa_2}\, \beta_{\beta_1\varkappa_2\varkappa_3} \cdots c_{\beta_{i-1}\varkappa_i\varkappa_1'} = 0 \tag{4}$$

besteht, wofern i kleiner als im vorliegenden Falle gewählt wird. Alsdann verwandelt sich (1) in folgende Gleichung:

$$\sum_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_i} c_{\alpha\varkappa_1\varkappa_2}\, c_{\beta_1\varkappa_2\varkappa_3} \cdots c_{\beta_{i-1}\varkappa_i\varkappa_1} \left(\omega_{\varkappa_2}^{s-i} + \omega_{\varkappa_2}^{s-i-1}\omega_{\varkappa_1} + \cdots + \omega_{\varkappa_1}^{s-i}\right)$$
$$+ (s-i) \sum c_{\alpha\varkappa_1\varkappa_2}\, c_{\beta_1\varkappa_2\varkappa_3} \cdots c_{\beta_{i-1}\varkappa_i\varkappa_1'} \left(\omega_{\varkappa_2}^{s-i-1} + \cdots + \omega_{\varkappa_1}^{s-i-1}\right) = 0.$$

Da aber diese Gleichung für jeden Werth von s gilt, so kann man wieder auf die allgemeine Gültigkeit der Gleichungen (2) und (4) schliessen.

Man sieht jetzt aber auch, wie man fortfahren muss, wenn entweder mehrere der Marken $\alpha, \beta_1, \beta_2 \ldots$ zu Transformationen zweiter Ordnung gehören oder solche von dritter und höherer Ordnung vorkommen. In allen Fällen zeigt sich, dass für die vorausgesetzte Hauptuntergruppe die Coefficienten der charakteristischen Gleichung

$$\psi_1(\eta),\ \psi_2(\eta)\ldots$$

identisch verschwinden. Damit ist der aufgestellte Satz ganz allgemein bewiesen, und es erübrigt nur noch, den Fall näher zu charakterisiren, wo zu den angegebenen $r-k$ inf. Transformationen noch weitere zur Bestimmung der Hauptuntergruppe hinzutreten.

Wir lassen die frühere Voraussetzung bestehen, dass mit dem identischen Verschwinden von k Wurzeln der charakteristischen Gleichung auch alle entsprechenden Unterdeterminanten $(r-k+1)^{\text{ten}}$ Grades identisch verschwinden. Die mit einer allgemeinen Transformation X_r vertauschbaren Transformationen sollen mit $X_{r-1}\ldots X_{r-k+1}$ und die durch die nicht verschwindenden Wurzeln erhaltenen mit $X_1\ldots X_{r-k}$ bezeichnet werden. Soll jetzt die Hauptuntergruppe mehr als $r-k$ Parameter besitzen, so müssen in ihr gewisse Transformationen enthalten sein, die sich als homogene lineare Functionen von $X_r,\ X_{r-1}\ldots X_{r-k+1}$ ausdrücken lassen. Dazu ist nothwendig, dass die Gleichung entgegengesetzt gleiche Wurzeln ω_ι und $-\omega_\iota$ besitzt. Wir bezeichnen wieder die zu $-\omega_\iota$ gehörige Marke mit ι'. Wenn jetzt die Gleichungen bestehen:

$$(X_r X_{\iota_\varrho}) = \omega_\iota X_{\iota_\varrho} + X_{\iota_{\varrho-1}},\quad (X_r X'_{\iota_\sigma}) = -\omega_\iota X'_{\iota_\sigma} + X'_{\iota_{\sigma-1}},$$

$$(X_{\iota_\varrho} X'_{\iota_\sigma}) = \sum_0^{k-1}{}_\nu\, p_\nu X_{r-\nu}$$

so haben wir die beiden Fälle zu unterscheiden, ob $\sum_\nu p_\nu \omega_\iota^{(\nu)} = 0$ oder $\neq 0$ ist, wo dem ω_ι für $X_{r-\nu}$ die Wurzel $\omega_\iota^{(\nu)}$ entspricht. Im ersten Fall muss auch für jede Reihe einander zugeordneter Wurzeln $\omega_\alpha^{(\nu)}$ sein: $\sum_\nu p_\nu \omega_\alpha^{(\nu)} = 0$, wie aus Gl. (7) § 12 (Bd. 33, S. 16) für Elementartheiler ersten Grades unmittelbar folgt und allgemein auf dem in § 23 (Bd. 34, S. 88, 89) vorgezeichneten Wege bewiesen wird.

Angenommen jetzt, alle zur Bestimmung der Hauptuntergruppe hinzutretenden von null verschiedenen $(X_{\iota_\varrho} X'_{\iota_\sigma})$ mögen solche Ausdrücke $\sum_\nu p_\nu X_{r-\nu}$ liefern, für welche $\sum_\nu p_\nu \omega_\iota^{(\nu)} = 0$ ist. Bezeichnen wir die von einander unabhängigen derartig hinzukommenden inf. Transformationen als $X_{r-k+1}\ldots X_{r-h}$, so muss für alle inf. Transformationen $X_1\ldots X_{r-h}$ die charakteristische Gleichung nur verschwindende Wurzeln besitzen. Jetzt kann man die Gleichung (1) derselben Betrachtung unterziehen, welche vorhin angestellt worden ist, und gelangt zu dem Ergebniss, dass auch die auf die neue Weise erhaltene Hauptuntergruppe vom Range null ist. Diese Betrachtung wird erleichtert, wenn man die beiden folgenden einfachen Bemerkungen berücksichtigt.

Wofern eine oder mehrere der Marken $\beta_1 \dots \beta_s$ sich als letzte Marke in nicht-verschwindenden Coefficienten $c_{(r-k+1)\iota\varrho} \dots c_{(r-h)\iota\varrho}$ finden, ersieht man unmittelbar, dass

$$\sum_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_s} c_{\beta_1 \varkappa_1 \varkappa_2} c_{\beta_2 \varkappa_2 \varkappa_3} \dots c_{\beta_s \varkappa_s \varkappa_1} = 0$$

ist. Denn wenn z. B. $(X_{r-h} X_{\bar{\beta}})$ durch X_{β_1} allein ausgedrückt werden kann, während $(X_{r-h} X_{\beta_2}) = \dots = (X_{r-h} X_{\beta_s}) = 0$ ist, so setze man in (1) $\alpha = r - h$, $\beta_1 = \bar{\beta}$, $\beta_2 = \beta_2 \dots$, $\beta_s = \beta_s$, und erhält die aufgestellte Gleichung. Nachdem dies bewiesen ist, kann man auf die Gültigkeit derselben Gleichung auch in den weiter möglichen Fällen schliessen, wenn $\beta_1 \dots \beta_s$ höhere Marken sind, welche an letzter Stelle in einem $c_{(r-h)\iota\varrho}$ vorkommen.

Offenbar ist jedes Product

$$c_{\beta_1 \varkappa_1 \varkappa_2} c_{\beta_2 \varkappa_2 \varkappa_3} \dots c_{\beta_s \varkappa_s \varkappa_1} = 0,$$

wenn alle $\beta_1 \dots \beta_s$ der Reihe $r - k + 1 \dots r - h$ angehören; denn wäre dies Product von null verschieden, so müsste

$$|\varkappa_1| > |\varkappa_2| > \dots > |\varkappa_s| > |\varkappa_1|$$

sein, was unmöglich ist.

Demnach setze man niemals α gleich einer Marke $r - k + 1 \dots r - h$, dagegen mögen einige der Marken $\beta_1 \dots \beta_s$ gleich r, andere gleich einer Marke $r - k + 1 \dots r - h$, und wieder andere gleich einer Marke der Reihe $1 \dots r - k$ gesetzt werden. Die oben angestellte Betrachtung ändert sich dann nur insofern, als für manche Marken β und $\varkappa$ zuweilen verschwindende Wurzeln hinzutreten und solche Producte in der Summe ausfallen. Dadurch ist aber kein wesentlicher Unterschied bedingt, weil nach beliebiger Wahl der oben benutzten Zahl i man eine Gleichung (für $s = i$) erhält, in welcher die Wurzeln ganz wegfallen, während in allen weiteren Gleichungen ($s > i$) nicht nur die Summationsbuchstaben auf die Marken $1 \dots r - k$ beschränkt werden, sondern auch einzelne Producte für jeden Summationsbuchstaben ausfallen. Demnach bleibt die Schlussfolgerung ungeändert, dass die Hauptuntergruppe vom Range null ist.

Wenn aber für ein $(X_{\iota_\varrho} X_{\iota'_\sigma}) = \sum p_\nu X_{r-\nu}$ zugleich $\sum^\nu p_\nu \omega_i^{(\nu)} \neq 0$ ist, so enthält die Gruppe nothwendig Kegelschnittsgruppen. Dies ist unmittelbar klar, wenn in der vorstehenden Gleichung ϱ und σ beide gleich Null sind, da alsdann X_ι, $X_{\iota'}$, $(X_\iota X_{\iota'})$ eine solche Untergruppe bestimmen. Wenn aber die angegebene Bedingung erst für grössere Werthe von ϱ und σ erfüllt ist, so kann man die Ergebnisse des § 24 (Bd. 34,

S. 98—106) anwenden. Dann giebt es eine positive Zahl α, so dass jedesmal $(X_{\iota_\varrho} X'_{\iota_\sigma}) = 0$ ist für $\varrho + \sigma < \alpha$, aber $(X_{\iota_\varrho} X'_{\iota_\sigma}) \neq 0$ für $\varrho + \sigma \geqq \alpha$; und für $(X_{\iota_\alpha} X'_{\iota_\alpha}) = \sum^{\nu} p_\nu X_{r-\nu}$ ist $\sum p_\nu \omega_\iota^{(\nu)} \neq 0$; ausserdem stellen die $(X_{\iota_\varrho} X'_{\iota_\sigma})$ für alle Werthe von ϱ und σ gerade $\alpha + 1$ von einander unabhängige inf. Transformationen dar. Deshalb kann man, wie dort näher gezeigt worden ist, die X_{ι_α} und X'_{ι_α} so wählen, dass sie mit $(X_{\iota_\alpha} X'_{\iota_\alpha})$ einer Kegelschnittsgruppe angehören, womit der aufgestellte Satz bewiesen ist.

Unter denjenigen Gruppen, welche nicht ihre eigenen Hauptuntergruppen sind, ist noch eine Classe zu erwähnen. Es sind das diejenigen, welche in den §§ 10 und 19 (Bd. 33, S. 4—10 und Bd. 34, S. 59—66) auf eine allerdings etwas lästige Art und Weise behandelt worden sind; indessen ist es dort gelungen, die hauptsächlichsten Eigenschaften dieser Classe aufzufinden. Die ihr angehörigen Gruppen sind durch die Eigenschaft bestimmt, dass in der charakteristischen Gleichung die letzten k Coefficienten ψ_r, $\psi_{r-1} \ldots \psi_{r-k+1}$ identisch verschwinden, während nicht alle Unterdeterminanten $(r-k+1)^{\text{ten}}$ Grades in der charakteristischen Determinante verschwinden. Indem wir dann X_r wieder als ganz allgemeine inf. Transformationen voraussetzen, können wir weitere $k-1$ inf. Transformationen $X_{r-1} \ldots X_{r-k+1}$ derartig hinzufügen, dass sie mit X_r eine Untergruppe vom Range null bestimmen. Fernere hiervon und unter einander unabhängige $r-h$ inf. Transformationen $X_1 \ldots X_{r-k}$ sollen den nicht verschwindenden Wurzeln der Gleichung für X_r zugeordnet werden. Dann möge die Hauptuntergruppe durch $X_1 \ldots X_{r-k}$, $X_{r-k+1} \ldots X_{r-h}$ bestimmt sein, wo h von null verschieden ist. Für jede dieser $r-h$ inf. Transformationen hat die charakteristische Gleichung lauter verschwindende Wurzeln, wie am angegebenen Orte (Bd. 33, S 61. Gleichungen (3) und S. 63, Gl. 11) bewiesen ist. Diese Eigenschaft genügt, um die Hauptuntergruppe zu charakterisiren. Wir können wiederum die Gleichung (1) zu grunde legen, darin einige der Marken $\beta_1 \ldots \beta_s$ gleich r und die Marke α nebst weiteren β_ν gleich solchen Marken setzen, deren Transformationen der Hauptuntergruppe angehören. Dann ändern sich die obigen Untersuchungen nicht und das Resultat bleibt dasselbe. Also ist auch in diesem Falle die Hauptuntergruppe vom Range null. Somit sind wir zu dem allgemeinen Resultate gelangt:

Wenn die Hauptuntergruppe einer gegebenen Gruppe keine Kegelschnittsgruppe enthält, so muss sie vom Range null sein.

Hiermit hängen einige weitere Sätze eng zusammen, deren Beweis bereits durch die vorangehenden Untersuchungen geliefert ist, nämlich unter andern folgende Sätze:

Wenn $P_1 \ldots P_l$ die einfachsten Functionen sind, durch welche sich die Coefficienten der charakteristischen Gleichung darstellen lassen, und wenn unter ihnen sich Functionen vom 2^{ten} und von einem höhern Grade befinden, so kann man es bei passender Wahl der bestimmenden inf. Transformationen erreichen, dass sich die Coefficienten der charakteristischen Gleichung für die Hauptuntergruppe durch dieselben Functionen 2^{ten} und höhern Grades ausdrücken lassen.

Eine Gruppe enthält nur dann keine Kegelschnittsgruppe, wenn sich alle Coefficienten der charakteristischen Gleichung durch lineare Functionen ausdrücken lassen.

Bestimmen $X_1 \ldots X_p$ die Hauptuntergruppe einer gegebenen Gruppe und bildet man für dieselbe die charakteristische Gleichung, so ist es nicht möglich, aus deren Coefficienten eine lineare Function von $\eta_1 \ldots \eta_p$ herzustellen.

Betreffs der Hauptuntergruppen haben wir zwei Fälle als möglich erkannt: entweder sind sie vom Range null oder sie enthalten Kegelschnittsgruppen. Nun tritt die weitere Frage an uns heran, ob jede Gruppe dieser beiden Arten eine Hauptuntergruppe sein könne. Wenngleich es mir noch nicht möglich ist, ganz erschöpfend die Bedingungen anzugeben, denen eine Hauptuntergruppe genügen muss, so ist es doch leicht zu sehen, dass die aufgestellte Frage verneint werden muss. Denn die Gleichung (1) für $s = 1$ lehrt, dass, wenn die Hauptuntergruppe p-gliedrig ist, der Coefficient von ω^{p-1} in der für sie aufgestellten charakteristischen Gleichung identisch verschwindet, oder mit andern Worten, dass, wenn durch $X_1 \ldots X_p$ die Hauptuntergruppe gegeben ist, $\sum_\varrho c_{\alpha\varrho\varrho} = 0$ ist für $\alpha = 1 \ldots p$.

Ausserdem tritt jetzt ein zweites Problem an uns heran: die Zusammensetzung aller Gruppen anzugeben, für welche die Gestaltung der Hauptuntergruppe bekannt ist. Die Lösung dieses Problems ist durch die vorangehende Entwicklung bereits wesentlich vorbereitet, aber noch nicht vollständig durchgeführt; für den Fall, dass die Gruppe Kegelschnittsgruppen besitzt, wird sich der folgende Paragraph mit dieser Aufgabe befassen.

§ 30.

Gestaltung einer gewissen Klasse von Gruppen, welche nicht ihre eigenen Hauptuntergruppen sind.

Wir wollen jetzt diejenigen Gruppen bestimmen, welche zwar nicht ihre eigenen Hauptuntergruppen sind, aber mit denselben am nächsten verwandt erscheinen, da ihre Hauptuntergruppen für sich betrachtet die Eigenschaft haben, die eigenen Hauptuntergruppen zu sein. Bezeichnen wir also r von einander unabhängige inf. Transformationen der gegebenen Gruppe mit $X_1 \ldots X_r$, so soll für $\iota, \varkappa, \lambda, \mu = 1 \ldots r$ zwar nicht die Gruppe $(X_\iota X_\varkappa)$ mit der Gruppe $X_1 \ldots X_r$, aber die Gruppe $\big((X_\iota X_\varkappa), (X_\lambda X_\mu)\big)$ mit der durch $(X_\iota X_\varkappa)$ bestimmten Gruppe identisch sein.

Im Anschluss an die früheren Entwicklungen sei X_r eine ganz allgemeine inf. Transformation. Man suche für dieselbe die Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Wenn in derselben k Wurzeln verschwinden, so erhält man $k-1$ Transformationen $X_{r-1} \ldots X_{r-k+1}$, welche unter einander und mit X_r vertauschbar sind; die übrigen $r-k$ inf. Transformationen $X_1 \ldots X_{r-k}$, welche zur Bestimmung der Gruppe dienen, können so gewählt werden, dass sie den nicht verschwindenden Wurzeln entsprechen. In der Hauptuntergruppe treten zu $X_1 \ldots X_r$ noch gewisse lineare Functionen von $X_r \ldots X_{r-k+1}$ hinzu. Auch zeigt der vorige Paragraph bereits, dass in der Hauptuntergruppe eine gewisse durch $X_r \ldots X_{r-k+1}$ dargestellte inf. Transformation ganz allgemeinen Character hat und demnach eine solche Transformation X_p in gleicher Weise zur Aufsuchung der Wurzeln der charakteristischen Gleichung geeignet ist, wie X_r in der gegebenen Gruppe. Um dies noch weiter zu erkennen, kann man entweder auf die Untersuchungen des § 11 (Bd. 33, S. 9—11) zurückgehen, oder man kann für beide Gruppen die charakteristische Gleichung bilden. Daraus ergiebt sich der Satz:

Um eine r-gliedrige Gruppe zu bestimmen, welche zwar nicht selbst ihre eigene Hauptuntergruppe ist, deren Hauptuntergruppe aber mit ihrer eigenen zusammenfällt, nehme man an, diese Hauptuntergruppe sei durch die inf. Transformationen $X_1 \ldots X_p$ bestimmt, und in derselben sei X_p eine allgemeine inf. Transformation und mit $X_{p-1} \ldots X_{p-h+1}$ vertauschbar. Dann ist es zur Bestimmung der r-gliedrigen Gruppe gestattet, zu den p genannten weitere $r-p$ inf. Transformationen hinzuzufügen, welche unter einander und mit den $X_p \ldots X_{p-h+1}$ vertauschbar sind. Dieser Weg genügt, um alle Gruppen von der bezeichneten Eigenschaft zu erhalten.

Hiermit ist aber der Inhalt des vorigen Paragraphen, soweit er sich auf die angegebene Klasse von Gruppen erstreckt, keineswegs erschöpft. Die Transformation X_p ist nur als allgemeine inf. Transformation in der Hauptuntergruppe, dagegen X_r als solche in der r-gliedrigen Gruppe vorausgesetzt. Wenn also bereits für X_p mehrere Wurzeln verschieden sind, so müssen sie ganz gewiss für X_r verschieden sein. Ist also ω_α für X_p in der Untergruppe eine einfache Wurzel, so entspricht ihr für X_r in der r-gliedrigen Gruppe eine einfache Wurzel ϖ_α; zugleich ist $(X_r X_\alpha) = \varpi_\alpha X_\alpha$, $(X_p X_\alpha) = \omega_\alpha X_\alpha$. Für die Hauptuntergruppe haben wir jetzt die allgemeinste Gestaltung zu grunde zu legen, welche wir in § 24 (Bd. 34, S. 101—105) angegeben haben. Danach gehört eine Hauptwurzel ω_ι einem einzigen Elementartheiler, etwa vom Grade $\alpha+1$ an; bezeichnet l den Rang dieser Untergruppe, so kann man bei passender Wahl von X_p, $X_{p-1} \ldots X_{p-l+1}$, $X_{p-l} \ldots X_{p-h+1}$ erreichen, dass ist $(X_p X_{\iota_a}) = \omega_\iota X_{\iota_a}, \ldots (X_{p-l+1} X_{\iota_a}) = \omega_\iota^{(l-1)} X_{\iota_a}$, dass dagegen sich $(X_{p-l} X_{\iota_a}) \ldots (X_{p-h+1} X_{\iota_a})$ durch $X_{\iota_{a-1}} \ldots X_{\iota_0}$ ausdrücken lassen.

Um zu dieser Darstellung zu gelangen, lösten wir ein gewisses Gleichungssystem (Gl. 10, auf S. 104), von dem wir nachwiesen, dass es durch eine $(l-1)$-fache Unendlichkeit von Werthen η befriedigt werde. Nun bleibt alles, was über die Abhängigkeit dieser Gleichungen von einander gesagt worden ist, auch jetzt bestehen, da der Beweis sich nur auf die Eigenschaft der betr. Wurzeln stützt, Hauptwurzeln zu sein. Folglich bilden in diesem Falle die Lösungen eine $(r-p+1)$-fache unendliche Mannigfaltigkeit. Somit können auch die inf. Transformationen X_r, $X_{r-1} \ldots X_{p+1}$ so gewählt werden, dass ist

$$(X_r X_{\iota_a}) = \varpi_\iota X_{\iota_a}, \; (X_{r-1} X_{\iota_a}) = \varpi_\iota' X_{\iota_a} \ldots$$

Unter den Hauptwurzeln der Hauptuntergruppe kann man immer l von einander unabhängige so auswählen, dass sich alle übrigen durch diese ausdrücken lassen. Wenn dieselben ω_ι, $\omega_\varkappa \ldots$ sind, so bestimme man l Coefficienten $n_0, n_1 \ldots n_{l-1}$ durch die l Gleichungen:

$$\begin{gathered}\varpi_\iota + n_0 \omega_\iota + n_1 \omega_\iota' + \cdots + n_{l-1} \omega_\iota^{(l-1)} = 0, \\ \varpi_\varkappa + n_0 \omega_\varkappa + n_1 \omega_\varkappa' + \cdots + n_{l-1} \omega_\varkappa^{(l-1)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{gathered}$$

Diese Gleichungen werden stets durch ein einziges System $n_0, n_1, \ldots n_{l-1}$ befriedigt. Ersetzt man jetzt das vorhin erhaltene X_r durch

$$X_r + n_0 X_p + n_1 X_{p-1} + \cdots + n_{l-1} X_{p-l+1},$$

so wird für das neue X_r sein:

$$(X_r X_{\iota_a}) = 0, \quad (X_r X_{\varkappa_a}) = 0.$$

Nun setzen sich alle Hauptwurzeln aus den l ausgewählten linear zusammen; folglich ist X_r mit allen Transformationen vertauschbar, welche als solche höchster Ordnung zu Hauptwurzeln gehören. Ebenso kann man jetzt Coefficienten $n_0', n_1' \ldots n_{l-1}'$ durch die Gleichungen:

$$\begin{gathered}\varpi_\iota' + n_0' \omega_\iota + n_1' \omega_\iota' + \cdots + n_{l-1}' \omega_\iota^{(l-1)} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{gathered}$$

bestimmen; hierdurch wird erreicht, dass das neue X_{r-1} mit den genannten Transformationen vertauschbar ist; u. s. w.

In der p-gliedrigen Hauptuntergruppe bilden die inf. Transformationen $X_p \ldots X_{p-l+1}$, welche in der angegebenen Weise gewählt sind, nebst den X_{ι_a}, $X_{\varkappa_a}$ . . . und den weiteren in gleicher Weise zu einer Hauptwurzel gehörigen Transformationen eine einfache oder halbeinfache Untergruppe, während bei der angegebenen Wahl alle übrigen inf. Transformationen eine invariante Untergruppe vom Range null bestimmen. Wir haben gesehen, dass wir in der r-gliedrigen Gruppe die $X_r \dots X_{p+1}$ so wählen können, dass sie mit allen Transformationen der einfachen Gruppe vertauschbar sind. Somit erhalten wir den Satz:

Soll eine Gruppe G_r zur Hauptuntergruppe eine Gruppe G_p haben und soll letztere ihre eigene Hauptuntergruppe sein, so kann man in G_r eine von G_p unabhängige Gruppe G_{r-p} bestimmen, deren Transformationen mit einander und mit einer in G_r enthaltenen einfachen oder halbeinfachen Gruppe gleichen Ranges vertauschbar sind. Wählt man umgekehrt in G_p eine einfache oder halbeinfache Gruppe beliebig, so giebt es stets in G_r eine $(r-p)$-gliedrige Gruppe von lauter mit einander vertauschbaren Transformationen, welche mit jener Gruppe vertauschbar ist.

Daraus ergiebt sich folgende praktische Regel zur Bildung solcher Gruppen:

„Es sei G_p eine Gruppe, welche ihre eigene Hauptuntergruppe ist, und G_l diejenige einfache oder halbeinfache Gruppe, aus welcher G_p durch Zusammensetzung mit einer Gruppe vom Range null gebildet ist. Um eine Gruppe G_r zu bilden, für welche G_p die Hauptuntergruppe ist, füge man eine $(r-p)$-gliedrige Gruppe hinzu, deren Transformationen mit einander vertauschbar sind, und setze fest, dass dieselbe auch mit G_l vertauschbar sein soll.“

Um die Voraussetzungen, auf denen der vorstehende Satz beruht, noch einmal vollständig zu übersehen, erinnern wir daran, dass in § 12 (Bd. 33, S. 14—16) die Gleichungen (2) und (3) ganz allgemein gelten, unabhängig von der Wahl der Transformation, für welche die charakteristische Gleichung aufgestellt ist, dass dagegen die Gleichung (6) und die darauf sich stützende Gleichung (7) nur solche Transformationen voraussetzen, welche in einem $(X_\iota X_{\iota'})$ vorkommen. Ist also $(X_\iota X_{\iota'}) \neq 0$, so gehören zu X_ι und $X_{\iota'}$ für jedes beliebige X_r entgegengesetzt gleiche Wurzeln; ebenso wenn $(X_\iota X_\varkappa)$ durch X_λ ausgedrückt wird, so wird stets die zu X_λ gehörige Wurzel die Summe der beiden zu X_ι und $X_\varkappa$ gehörigen sein. Dagegen wird die in § 12 gelehrte Bestimmung aller Wurzeln im vorliegenden Falle nicht mehr möglich sein.

Der vorhin angegebene Satz lehrt die vollständige Gestaltung einer Gruppe, wenn ihre Hauptuntergruppe selbst einfach oder halbeinfach ist; wir erhalten das Theorem:

Wenn eine r-gliedrige Gruppe eine p-gliedrige Hauptuntergruppe *besitzt und letztere einfach oder halbeinfach ist, so hat sie eine $(r-p)$-gliedrige ausgezeichnete (d. h. mit der ganzen Gruppe vertauschbare) Untergruppe.*

Dieser Satz, welchen ich für die Zusammensetzung mit der Kegelschnittsgruppe schon früher (Programm 1886) bewiesen habe, liefert folgende Regel zur Bildung solcher Gruppen:

Um in allgemeinster Weise aus einer p-gliedrigen einfachen oder halbeinfachen Gruppe eine r-gliedrige Gruppe zu bilden, welche jene zur Hauptuntergruppe hat, hat man eine $(r-p)$-gliedrige Gruppe hinzuzufügen, deren Transformationen mit einander und mit den Transformationen der p-gliedrigen Untergruppe vertauschbar sind.

Beiläufig folgt:

Alle r-gliedrigen Gruppen, welche dieselbe p-gliedrige einfache oder halbeinfache Gruppe zur Hauptuntergruppe haben, sind holoedrisch isomorph.

Ebenfalls ergiebt sich unmittelbar, dass der Rang der r-gliedrigen Gruppe gleich ist dem der (einfachen oder halbeinfachen) Hauptuntergruppe.

Wir nehmen jetzt an, die Hauptuntergruppe sei nach der in § 22 (Bd. 34, S. 81, 82) angegebenen Regel und unter der weiteren Voraussetzung gebildet, dass alle Nebenwurzeln durch eine einzige gefordert werden. Indem wir wieder durch $X_1 \dots X_p$ die Hauptuntergruppe bestimmt sein lassen, durch die Marken $\iota, \varkappa, \dots$ solche Transformationen bezeichnen, welche einer einfachen Gruppe angehören, dagegen den Nebenwurzeln und den zu ihnen gehörigen Transformationen die Marken $\alpha, \beta \dots$ geben, und die $X_{p+1} \dots X_\varrho \dots X_\sigma \dots X_r$ den obigen Bestimmungen gemäss wählen, erhalten wir

$$(X_\alpha X_\beta) = 0,\ (X_\alpha X_\iota) = c_{\alpha\iota(\alpha+\iota)} X_{\alpha+\iota},\ (X_\varrho X_\sigma) = 0,\ (X_\varrho X_\iota) = 0.$$

Eine einfache Anwendung der Jacobi'schen Identität lehrt, dass, wenn

$$(X_\varrho X_\alpha) = \varepsilon_\varrho X_\alpha \quad \text{ist, auch} \quad (X_\varrho X_{\iota+\alpha}) = \varepsilon_\varrho X_{\iota+\alpha}$$

sein muss. Indem wir also etwa zu $X_{r-1} \dots X_{p+1}$ je das mit einem passenden Factor multiplicirte X_r hinzufügen, können wir bewirken, dass die neuen $X_{r-1} \dots X_{p+1}$ mit allen Transformationen der Gruppe vertauschbar sind. Soll also die Gruppe keine ausgezeichnete Untergruppe besitzen, so muss $p = r - 1$ sein. Hieraus folgt:

Eine p-gliedrige Gruppe enthalte keine $(p-1)$-gliedrige invariante Untergruppe, aber eine solche von weniger Gliedern; die Transformationen derselben mögen mit einander vertauschbar und die zugehörigen Nebenwurzeln durch eine einzige gefordert sein. Wenn diese die Hauptuntergruppe einer r-gliedrigen Gruppe sein soll für $r > p$, so füge man eine inf. Transformation hinzu, welche mit den zu der einfachen oder halbeinfachen Gruppe gehörigen Transformationen vertauschbar ist, *dagegen mit den zu den Nebenwurzeln gehörigen Transformationen je eine zweigliedrige Untergruppe bildet. Die übrigen inf. Transformationen, welche für $r > p + 1$ hinzuzufügen sind, können so gewählt werden, dass sie mit allen Transformationen der Gruppe vertauschbar sind.*

In der p-gliedrigen Hauptuntergruppe mögen die X_ι, $X_\varkappa \dots$ eine einfache oder halbeinfache Gruppe bestimmen, X_α, $X_\beta \dots$ die invariante Untergruppe, so bestehen die Beziehungen:

$$(X_r X_\iota) = \cdots = (X_{p+1} X_\iota) = 0, \quad (X_r X_\alpha) = \varepsilon X_\alpha,$$
$$(X_{r-1} X_\alpha) = \cdots = (X_{p+1} X_\alpha) = 0,$$

wo ε noch gleich eins oder gleich null gewählt werden kann.
Beiläufig erinnern wir noch daran, dass der Rang der gegebenen Gruppe höchstens um eins grösser sein kann als der der gegebenen Gruppe. Ebenso lehrt der angegebene Lehrsatz, dass alle r-gliedrigen Gruppen, deren Hauptuntergruppe holoedrisch isomorph ist mit einer gegebenen p-gliedrigen Gruppe von der angegebenen Zusammensetzung, in zwei Klassen zerfallen, wo alle Gruppen derselben Klasse gleich zusammengesetzt sind.

Beispiele zu der hier angegebenen Gestaltung können in grosser Menge beigebracht werden. Ich erinnere nur an die allgemeine lineare Gruppe des $(l+1)$-dimensionalen Raumes: p_α, $x_\alpha p_\beta$, $x_\alpha p_\alpha$ für $\alpha, \beta = 1 \cdots l+1$. Hier geben die p_α, $x_\alpha p_\alpha - x_{l+1} p_{l+1}$, $x_\alpha p_\beta$ die Hauptuntergruppe an, und in dieser bestimmen $x_\alpha p_\alpha - x_{l+1} p_{l+1}$, $x_\alpha p_\beta$ eine einfache Gruppe vom Range l, dagegen die p_α die invariante Untergruppe. Als hinzutretende inf. Transformation betrachtet man $x_1 p_1 + \cdots + x_{l+1} p_{l+1} = Y$; dann ist $(Y p^\alpha) = -p_\alpha$, dagegen Y mit allen andern angegebenen Transformationen vertauschbar.

Um die vorangehenden Entwicklungen noch auf eine weitere Klasse von Gruppen anzuwenden, setzen wir solche Gruppen als Hauptuntergruppen voraus, deren Gestaltung in Band 34, S. 86 angegeben ist. Hier wird auch jeder Nebenwurzel ω_α eine inf. Transformation X_α zugeordnet; wenn dann durch ω_α nicht die entgegengesetzt gleiche $-\omega_\alpha$ mit gefordert ist, so nehmen wir auch diese als vorkommend an, setzen $(X_\alpha X_{\alpha'}) = Y$ und lassen Y mit jeder Transformation der Gruppe vertauschbar sein. Dann folgt aus $(X_r X_\alpha) = \varepsilon_r X_\alpha$ auch $(X_r X_{\iota+\alpha}) = \varepsilon_r X_{\iota+\alpha}$; demnach sind alle derartigen Coefficienten gleich, wenn alle Wurzeln durch eine einzige bedingt sind; andernfalls erhalten wir $(X_r X_{\alpha'}) = \varepsilon_\alpha' X_{\alpha'}$. Jedenfalls muss sein $(X_r Y) = (\varepsilon_r + \varepsilon_r') Y$.

Weitere specielle Gestaltungen anzugeben, wird nicht nöthig sein. Wir gehen deshalb dazu über, den Fall zu untersuchen, wo noch nicht die Hauptuntergruppe mit ihrer eigenen Hauptuntergruppe identisch ist, sondern wo man erst durch mehrfache Wiederholung dieser Operation zu einer solchen Gruppe gelangt. Dabei kann es nicht unsere Aufgabe sein, wiederum sämmtliche Fälle im einzelnen zu betrachten, vielmehr werden wir uns damit begnügen, einige allgemeine Gesetze hierüber aufzustellen. Wir wollen also zunächst die Frage erörtern, ob jede beliebige der in diesem Paragraphen angegebenen Gruppen Hauptuntergruppe sein kann. Dass diese Frage nicht allgemein bejaht werden kann, hat bereits eine Bemerkung am Schluss des vorigen Paragraphen gelehrt. Wir gehen von den speciellen Zusammensetzungen aus und betrachten zunächst die auf Seite 185, 186 angegebene. Dort waren $X_p \dots X_\iota$, $X_\varkappa \dots$ so vorausgesetzt, dass sie eine einfache oder halbeinfache Gruppe bestimmen; X_α, $X_\beta \dots$ sind mit einander vertauschbar und geben in der p-gliedrigen Gruppe eine invariante Untergruppe an. Dazu treten $X_{p+1} \dots X_r$, so dass ist:

$$(X_r X_\iota) = \cdots = (X_{p+1} X_\iota) = 0, \; (X_r X_\alpha) = \varepsilon X_\alpha,$$
$$(X_{r-1} X_\alpha) = \cdots = (X_{p+1} X_\alpha) = 0,$$

Soll eine Transformation X_{r+1} hinzutreten, so lässt sich dieselbe wiederum so wählen, dass sie mit $X_p \dots X_\iota$, $X_\varkappa \dots$ vertauschbar ist. Dann lehrt die Identität $(r+1, r, \alpha)$: $c_{(r+1)rr} c_{r\alpha\alpha} = 0$. Soll daher die gegebene r-gliedrige Gruppe wirklich Hauptuntergruppe sein (also $c_{(r+1)rr} \neq 0$), so muss wegen des Verschwindens von $c_{r\alpha\alpha}$ und der entsprechenden Coefficienten jede Transformation $X_r \dots X_{p+1}$ mit allen Transformationen derjenige Gruppe vertauschbar sein, welche ihre eigne Hauptuntergruppe ist. Dieselbe Ueberlegung machen wir für die weitere vorhin angegebene Klasse von Gruppen (S. 186); bilden wir wieder die Jacobi'sche Identität $(r+1, r, \alpha)$ unter der Voraussetzung, dass sich $(X_{r+1} X_\alpha)$ und $(X_r X_\alpha)$ nur durch X_α darstellen lassen, so gilt derselbe Schluss; es ist also $(X_r X_\alpha) = (X_r X_{\alpha'}) = 0$ und damit auch $(X_r Y) = 0$.

Nun können wir aber in jeder p-gliedrigen Gruppe, welche ihre eigene und zugleich die Hauptuntergruppe für eine r-gliedrige Gruppe ist, für gewisse inf. Transformationen die aufgestellte Bedingung erfüllen; wenn X_α eine solche ist, so müssen mit den vorausgesetzten Gleichungen $(X_r X_p) = \cdots = (X_r X_\iota) = 0$ auch die folgenden bestehen: $(X_r X_\alpha) = \cdots = (X_{p+1} X_\alpha) = 0$. Entsprechend lässt sich stets beweisen, dass $c_{r\gamma\gamma}$ regelmässig verschwindet, wenn X_γ eine Transformation der p-gliedrigen Hauptuntergruppe ist; dagegen können die Coefficienten $c_{r\gamma_1\gamma_0}$ von null verschieden sein. Stellen wir dies Ergebniss mit denjenigen Resultaten zusammen, welche wir früher (§ 23 u. 24) über die Zusammensetzung erhalten haben, so folgt der wichtige Satz:

Die Hauptuntergruppe muss entweder einfach resp. halbeinfach oder vom Range null sein oder durch Zusammensetzung einer einfachen (resp. halbeinfachen) Gruppe mit einer invarianten Untergruppe vom Range null sich bilden lassen.

Dass dieser Satz auch direct auf dem im vorigen Paragraphen angewandten Wege hergeleitet werden kann, soll nur angedeutet werden. Ebensowenig können wir näher darlegen, wie hohe Bedeutung dieser Satz für die Zusammensetzung der Gruppen hat. Es erübrigt aber noch, einige Sätze anzugeben, welche gelten, wenn eine Gruppe, die ihre eigene Hauptuntergruppe ist, zugleich invariante Untergruppe irgend einer Gruppe ist.

Zu einer solchen Untergruppe gelangt man stets, wenn die fortgesetzte Aufsuchung der Hauptuntergruppe zu einer Gruppe von der bezeichneten Art führt, wenn also die Gruppe überhaupt Kegelschnittsgruppen enthält. Ist nämlich H_1 die Hauptuntergruppe der gegebenen Gruppe, H_2 die von H_1 u. s. w. und schliesslich $G_i = H_a$ die von H_{a-1}, so ist auch G_i eine invariante Untergruppe der gegebenen Gruppe. Wir nehmen wieder an, die charakteristische Gleichung habe im allgemeinen k verschwindende und $r-k$ nicht verschwindende Wurzeln, und den ersteren seien die inf. Transformationen $X_r \dots X_{r-k+1}$ den letzteren die $X_1 \dots X_{r-k}$ zugeordnet. Dann können der G_i unmöglich unter der gemachten Voraussetzung lauter solche Transformationen angehören, welche mit X_r vertauschbar sind. Auf eine beliebige andere inf. Transformation wenden wir aber ein Beweisverfahren an, welches wir in § 21, (Bd. 34, S. 72) zu einem ähnlichen Zweck bereits benutzt haben. Wir combiniren nämlich irgend eine gegebene, der invarianten Untergruppe angehörige inf. Transformation so oft mit X_r, bis wir zu einer möglichst einfachen Transformation gelangen. Dann folgt zunächst, dass auch mindestens eine inf. Transformation vorkommt, welche die Form hat $\eta_1 X_1 + \eta_2 X_2 + \cdots + \eta_{r-k} X_{r-k}$. Indem man dasselbe Verfahren öfters wiederholt, gelangt man schliesslich zu einer Transformation $\eta_\alpha X_\alpha + \eta_\beta X_\beta + \eta_\gamma X_\gamma + \cdots$, wo erstens $X_\alpha, X_\beta, X_\gamma \dots$ je als erste Transformationen ihren entsprechenden Wurzeln zugeordnet sind, und wo zweitens diese Wurzeln $\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_\gamma \dots$ sämmtlich einander gleich sind. Alsdann ist aber auch

$$\eta_\alpha X_\alpha + \eta_\beta X_\beta + \eta_\gamma X_\gamma + \cdots$$

der Wurzel ω_α als erste Transformation zugeordnet, da die Gleichung besteht:

$$(X_r, \eta_\alpha X_\alpha + \eta_\beta X_\beta + \eta_\gamma X_\gamma + \cdots) = \omega_\alpha(\eta_\alpha X_\alpha + \eta_\beta X_\beta + \cdots).$$

In diesem Sinne gilt folgender Satz:

Wenn eine Gruppe G_r eine invariante Untergruppe G_i besitzt und diese ihre eigene Hauptuntergruppe ist, so muss G_i mindestens eine inf. Transformation enthalten, welche Haupttransformation zu einer ganz allgemeinen, der G_r angehörigen zweigliedrigen Untergruppe ist.

Hieraus schliesst man weiter, dass man zur Bestimmung der invarianten Untergruppe lauter solche inf. Transformationen benutzen kann, welche zu Wurzeln der charakteristischen Gleichung gehören. Dann finden aber auf diese invariante Untergruppe dieselben Entwicklungen Anwendung, welche im Anfange dieses Paragraphen für die Hauptuntergruppe angestellt sind. Somit bleiben auch die Resultate vollständig ungeändert. Speciell ergiebt sich also der Satz:

Wenn eine Gruppe G_i ihre eigene Hauptuntergruppe und zugleich die invariante Untergruppe einer Gruppe G_r ist, so möge G_i durch die inf. Transformationen $X_\iota, X_\varkappa \dots$ und $X_\alpha, X_\beta \dots$ bestimmt sein, wo die ersteren eine einfache oder halbeinfache Gruppe, die letzteren die invariante Untergruppe vom Range null ergeben; alle andern zur Bestimmung von G_r nothwendigen inf. Transformationen $X_\varrho, X_\sigma \dots$ können dann so gewählt werden, dass sie mit $X_\iota, X_\varkappa \dots$ vertauschbar sind.

In gleicher Weise bleiben auch die übrigen, oben für die Hauptuntergruppe angegebenen Sätze bestehen. Nimmt man dann noch das auf S. 171 gefundene Resultat hinzu, so sieht man, dass in den meisten Fällen sämmtliche Coefficienten c unmittelbar niedergeschrieben werden können.

Braunsberg im August 1889.