

## Die Definition des Mengenbegriffs.

Von

JOHANNES MOLLERUP in Kopenhagen.

Die klassische Definition des Mengenbegriffs, wie sie z. B. von Dedekind („Was sind und was sollen die Zahlen“), Cantor (Math. Annalen Bd. 46) und H. Weber („Encyclopädie der Elementarmathematik“) gegeben ist, läuft darauf hinaus, jeden Inbegriff als Menge aufzufassen; eine Menge ist dann wohldefiniert, wenn es von jedem Ding gegeben ist, ob es der Menge angehört oder nicht. Frege („Grundlagen der Arithmetik“ und „Grundgesetze der Arithmetik“) geht davon aus, daß ein Begriff seinen Umfang bestimmt; Peano („Arithmetices principia, nova methodo exposita“) und Russell („Principles of Mathematics“) meinen, daß ein Satz die Menge der Elemente, die dem Satz genügen, definiert.

Diesen Auffassungen gegenüber kann man einwenden, daß sie *erstens* nicht für die Begründungen der Arithmetik, die die genannten Werke uns liefern, ausreichen; bei genauem Durchlesen der Beweise wird man finden, daß es keineswegs genügt, solche Mengen zu betrachten, wo von jedem Ding gegeben ist, ob es der Menge angehört oder nicht. *Zweitens* hat diese Auffassung jedes Inbegriffs als Menge bekanntlich zu gewissen Widersprüchen in der Mengenlehre geführt, worüber schon eine ziemlich große Literatur existiert (Burali-Forti, Russell, Schoenflies, Bernstein etc.); hier möchte ich nur bemerken, daß die Definition des Begriffs der natürlichen Zahl, die H. Weber und Russell (l. c.) geben: „die Menge der Mengen, die einer gegebenen Menge ähnlich sind“ selbst widerspruchsvoll ist; hiernach sollte z. B. die Zahl 1 die Menge aller Dinge sein. (Neuerdings hat H. Weber auch eine andere Definition des Zahlbegriffs gegeben, Jahresb. d. D. Mathematiker-Vereinigung 1906.)

Eine ganz andere Mengendefinition hat in einem speziellen Falle D. Hilbert gegeben (Mathematische Probleme, Göttinger Nachrichten 1900, Problem 2); hier wird das Konstatieren der Widerspruchlosigkeit der arithmetischen Axiome mit dem Existenzbeweis der Menge aller

reellen Zahlen oder des Kontinuums identifiziert. Hieran wollen wir im folgenden anknüpfen, indem wir folgende allgemeine Frage stellen: *Welche Eigenschaften muß ein System von Axiomen haben, wenn es in dieser Weise eine Menge definieren soll, und zwar die Menge aller Elemente, die den Axiomen genügen?*

Die Beantwortung dieser Frage wird uns eine Mengendefinition geben, die jede widerspruchsvolle Menge ausschaltet.

2. Die Axiome der (reellen) Arithmetik sind nach D. Hilbert („Über den Zahlbegriff“, Jahresber. d. D. Mathematiker-Vereinigung, 1899) folgende 18.

### I. Axiome der Verknüpfung.

1. Aus der Zahl  $a$  und der Zahl  $b$  entsteht durch „Addition“ eine bestimmte Zahl  $c$ , in Zeichen

$$a + b = c \quad \text{oder} \quad c = a + b.$$

2. Wenn  $a$  und  $b$  gegebene Zahlen sind, so existiert stets eine und nur eine Zahl  $x$  und auch eine und nur eine Zahl  $y$ , so daß

$$a + x = b \quad \text{bez.} \quad y + a = b$$

wird.

3. Es gibt eine bestimmte Zahl — sie heiße 0 —, so daß für jedes  $a$  zugleich

$$a + 0 = a \quad \text{und} \quad 0 + a = a.$$

4. Aus der Zahl  $a$  und der Zahl  $b$  entsteht noch auf eine andere Art, durch „Multiplikation“, eine bestimmte Zahl, in Zeichen

$$ab = c \quad \text{oder} \quad c = ab.$$

5. Wenn  $a$  und  $b$  beliebig gegebene Zahlen sind und  $a$  nicht 0 ist, so existiert stets eine und nur eine Zahl  $x$ , und auch eine und nur eine Zahl  $y$ , so daß

$$ax = b \quad \text{bez.} \quad ya = b.$$

6. Es gibt eine bestimmte Zahl — sie heiße 1 —, so daß für jedes  $a$  zugleich

$$a \cdot 1 = a \quad \text{und} \quad 1 \cdot a = a$$

ist

### II. Axiome der Rechnung.

Wenn  $a, b, c$  beliebige Zahlen sind, so gelten stets folgende Formeln:

$$7 \quad (a + b) + c = a + (b + c),$$

$$8. \quad a + b = b + a,$$

$$9. \quad (ab)c = a(bc),$$

$$10. \quad a(b + c) = ab + ac,$$

$$11. \quad (a + b)c = ac + bc,$$

$$12. \quad ab = ba.$$

### III. Axiome der Anordnung.

13. Wenn  $a, b$  irgend zwei verschiedene Zahlen sind, so ist stets eine bestimmte (etwa  $a$ ) größer ( $>$ ) als die andere; die letzte heißt dann die kleinere, in Zeichen

$$a > b \quad \text{und} \quad b < a.$$

14. Wenn  $a > b$  und  $b > c$ , so ist auch  $a > c$ .

15. Wenn  $a > b$  ist, so ist auch stets

$$a + c > b + c \quad \text{und} \quad c + a > c + b.$$

16. Wenn  $a > b$  und  $c > 0$  ist, so ist auch stets

$$ac > bc \quad \text{und} \quad ca > cb.$$

### IV. Axiome der Stetigkeit.

17. (*Archimedisches Axiom.*) Wenn  $a > 0$  und  $b > 0$  zwei beliebige Zahlen sind, so ist es stets möglich,  $a$  zu sich selbst so oft zu addieren, daß die entstehende Summe die Eigenschaft hat

$$a + a + \dots + a > b.$$

18. (*Axiom der Vollständigkeit.*) Es ist nicht möglich, dem System der Zahlen ein anderes System von Dingen hinzuzufügen, so daß auch in dem durch Zusammensetzung entstehenden Systeme die Axiome 1—17 sämtlich erfüllt sind.

Ich bemerke, um des besseren Verständnisses willen, daß das Archimedische Axiom so zu verstehen ist, daß die darin auftretende Redeweise „so oft“ schon vorher erklärt sein muß, indem man etwa die Theorie der natürlichen Zahlen aufgebaut hat.

3. Ich kehre nun zu der Fragestellung zurück: Welche Eigenschaften muß ein System von Axiomen haben, wenn es die Menge aller Elemente, die den Axiomen genügen, definieren soll?

Zunächst sehen wir, daß, wenn wir von der trivialen Menge 0 absehen, die Forderung der Widerspruchslösigkeit der Axiome gestellt werden muß, d. h. es soll unmöglich sein, durch die Axiome zu beweisen, daß  $a = b$  und  $a \neq b$ . Ich nenne diese Forderung eine *arithmetische*.

Es ist aber sehr wichtig, daß das System der Axiome noch eine andere Eigenschaft haben muß, wenn es die gesuchte Menge definieren soll. Um diesen Umstand deutlich hervortreten zu lassen, werde ich einige Beispiele geben, wo die arithmetische Forderung erfüllt ist, wo aber die Menge nicht definiert ist und im allgemeinen gar nicht existiert.

4. Wir betrachten zuerst die Axiome 1—15, von denen wir an dieser Stelle annehmen können, daß sie keinen Widerspruch enthalten; wir nehmen an, daß sie „die Menge aller Elemente, die ihnen genügen“, bestimmen. Wir werden nun einen Widerspruch herleiten. Aus den Elementen werden Paare gebildet, so aus den Elementen  $a$  und  $b$  das Paar  $(ab)$ ; nicht jedes Paar soll neu sein, indem wir festsetzen, daß  $(ab) = a$ , wenn  $b = 0$ . Sonst sind die Paare neue Elemente, die der Menge nicht angehören. Hiernach setzen wir folgende Regeln der Rechnung fest:

$$(ab) + (cd) = (a + c, b + d),$$

$$(ab) \cdot (cd) = (ac - bd, ad + bc),$$

$$(ab) > (cd), \text{ wenn } a > c \text{ und wenn } a = c, b > d.$$

Durch diese Definitionen gelingt es bekanntlich zu beweisen, daß sämtliche Sätze 1—15 für die Zahlenpaare erfüllt sind. *Es gehört somit jedes Zahlenpaar zu der Menge der Elemente, die den Axiomen 1—15 genügen.* Die zwei hervorgehobenen Ergebnisse stehen miteinander in Widerspruch. Obwohl nun die 15 Axiome keinen Widerspruch erhalten, ist die Annahme der Existenz der Menge aller Elemente, die den Axiomen genügen, falsch.

Wir können das Resultat auch so ausdrücken: Wenden wir die Sätze 1—15 an, dann entstehen aus 0 und 1 neue Zahlen, die wir *Funktionen* von 0 und 1 nennen können, und zwar Funktionen, die durch die Sätze gegeben sind. Man kann dann fragen, ob ein Element, das mit den Funktionen von 0 und 1 zusammen den Sätzen genügt, selbst eine Funktion von 0 und 1 ist; hier braucht das nicht der Fall zu sein. Die Paare genügen den Sätzen, werden aber nicht durch die Sätze erzeugt.

5. Ein anderes Beispiel geben uns die Hilbertschen Nicht-Archimedischen Zahlen; wir betrachten die Axiome 1—16 und fragen wieder nach der Existenz der Menge aller Zahlen, die diesen Sätzen genügen. Nehmen wir an, daß diese Menge existiert und aus Zahlen  $a_0, a_1, a_2, \dots$  besteht. Wir bilden dann Ausdrücke von der Gestalt

$$\alpha = a_0 t^n + a_1 t^{n+1} + a_2 t^{n+2} + \dots;$$

hierin bedeuten  $a_0 (\neq 0)$ ,  $a_1, a_2, \dots$  beliebige Zahlen der Menge und  $n$  eine beliebige ganze Zahl. Bei geeigneten Festsetzungen über die Rechnungen mit solchen Zahlen und über das Größer- und Kleinersein sieht man, daß die Axiome 1—16 alle erfüllt sind. Es müßten also die Ausdrücke  $\alpha$  zu der Menge gehören. Wenn aber  $t$  ein unabhängiger Parameter ist, dann ist dieses doch nur der Fall, wenn  $n = a_1 = a_2 = \dots = 0$ . Wir haben also den Widerspruch wie früher, und die besprochene Menge existiert nicht.

In diesen Beispielen ist nur die mengentheoretische Auffassung neu;

der Inhalt findet sich schon in einer Bemerkung von D. Hilbert (*Grundlagen der Geometrie*, pag. 17): „Die Erfüllbarkeit des Vollständigkeitsaxioms ist wesentlich durch die Voranstellung des Archimedischen Axioms bedingt.“

6. Betrachten wir nun die Axiome 1—17; wir nehmen an, daß es eine Menge aller Zahlen, die den Axiomen genügen, gibt. Wir bilden dann aus den Elementen Fundamentalreihen  $(a_1 a_2 a_3 \dots a_\nu \dots)$  und definieren, daß  $(a_1 a_2 a_3 \dots a_\nu \dots)$  nur dann wieder einem Element  $b$  der Menge gleich ist, wenn  $|b - a_\nu|$  kleiner als eine willkürlich gegebene Zahl ( $\varepsilon > 0$ ) der Menge ist für ein gewisses  $\nu$  und jedes größere. Dann gelingt es nach G. Cantor (*Math. Ann.* Bd. 21) durch die bekannten Festsetzungen für Rechnung mit Fundamentalreihen zu beweisen, daß die Axiome 1—17 immer erfüllt sind. Die Fundamentalreihen gehören also der Menge an, und es ist somit bewiesen, daß jede Fundamentalreihe eine Grenze hat. Dieser Satz aber ist von den Axiomen 1—17 unabhängig, weil es eine Menge gibt, nämlich die Menge der Rationalzahlen, für welche die Axiome 1—17 gelten, der betreffende Satz aber nicht. Die Aussage, daß es eine Menge aller Zahlen, die den Axiomen 1—17 genügen, gibt, ist also keine Folge dieser Axiome, vielmehr ein selbständiges Axiom in der Tat das Hilbertsche Vollständigkeitsaxiom.

7. Wir haben also noch kein System von Sätzen betrachtet, das eine Menge definieren kann. Zu den Sätzen 1—17 fügen wir nun den Satz:

18<sub>r</sub>. Wenn  $a > 0$ , kann  $a$  so oft zu sich selbst addiert werden, daß eine Summe von Einsen entsteht.

In diesem Falle hat ein beliebiges Element, das den Sätzen genügt, die Eigenschaft aus 0 und 1 durch die Axiome 1—18 zu entstehen, unabhängig von den getroffenen Festsetzungen über  $\geq, +, \dots$ . Ist das Element  $\alpha$ , dann ist

$$\alpha + \alpha + \alpha + \dots + \alpha = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

oder

$$\alpha \cdot m = n,$$

$$\alpha = n : m.$$

Behaupten wir nun, daß es eine Menge aller Elemente gibt, die den Sätzen 1—18<sub>r</sub> genügen, dann finden wir hier keinen Widerspruch; nehmen wir nämlich ein Element, das nach Festsetzung nicht der Menge angehört, dann genügt dasselbe auch nicht dem Satz 18<sub>r</sub>. Wir können auch sagen: der Vollständigkeitssatz ist eine Folge der Sätze 1—18<sub>r</sub>. In diesem Falle existiert dann die Menge (vorausgesetzt, daß die arithmetische Forderung

der Widerspruchslösigkeit der Sätze 1—18<sub>r</sub> erfüllt ist) und heißt die Menge der Rationalzahlen.

8. Ergänzen wir noch auf eine andere Weise das Axiomsystem 1—17 durch das Axiom 18<sub>c</sub>: *Jede Fundamentalreihe hat eine Grenze.*

Ist  $\alpha$  dann wieder ein beliebiges Element, das den Sätzen 1—18<sub>c</sub> genügt, dann können wir nach 2 und 17 annehmen

$$a > \alpha > b \quad \text{wo} \quad a > 0, b > 0.$$

Wir bilden dann die Zahl  $\frac{a+b}{2}$ ; es ist dann (wenn  $\alpha \neq \frac{a+b}{2}$ ) entweder

$$\frac{a+b}{2} > \alpha > b$$

oder

$$a > \alpha > \frac{a+b}{2}.$$

Im ersten Falle setzen wir

$$\frac{a+b}{2} = a_1, \quad b = b_1;$$

dagegen im zweiten

$$a = a_1, \quad \frac{a+b}{2} = b_1$$

Nun ist

$$a_1 > \alpha > b_1$$

und

$$a_1 - b_1 = \frac{a-b}{2}.$$

Auf diese Weise fahren wir fort und bestimmen

$$a_2 > \alpha > b_2,$$

wo

$$a_2 - b_2 = \frac{a-b}{2^2} \text{ usw}$$

Es ist also immer

$$a_n > \alpha > b_n$$

und

$$a_n - b_n = \frac{a-b}{2^n}.$$

Die zwei Reihen  $(aa_1a_2a_3\cdots)$  und  $(bb_1b_2b_3\cdots)$  sind Fundamentalreihen und bestimmen dieselbe Grenze  $a_\infty = b_\infty$  (nach 18<sub>c</sub>).

Wir wollen beweisen, daß

$$\alpha = a_\infty = b_\infty.$$

Nehmen wir erstens an, daß

$$\alpha > a_\infty;$$

dann ist für jedes  $\nu$

$$a_\nu > \alpha > a_\infty$$

oder

$$|a_\nu - a_\infty| > |\alpha - a_\infty|.$$

Ist  $M$  (nach der früher eingeführten Redeweise) eine beliebig gewählte Funktion von 0 und 1, die größer als 0 ist, dann läßt sich nach 17 eine natürliche Zahl  $n$  bestimmen, so daß

$$n|\alpha - a_\infty| > M;$$

es ist auch

$$n|a_\nu - a_\infty| > n|\alpha - a_\infty|,$$

also

$$n|a_\nu - a_\infty| > M$$

oder

$$|a_\nu - a_\infty| > \frac{M}{n};$$

diese Relation ist aber mit der Definition der Grenze in Widerspruch. Ebenso wenig ist es möglich, daß

$$b_\nu < \alpha < b_\infty.$$

Also ist

$$\alpha = a_\infty = b_\infty.$$

Hier haben wir dann denselben Fall: ein Element, das den Axiomen 1—17, 18<sub>c</sub> genügt, wird durch die Axiome aus 0 und 1 erzeugt, oder, wie wir sagen, es ist eine Funktion von 0 und 1. Der Vollständigkeitssatz ist also auch hier eine Folge der Sätze; die Sätze definieren, ihre arithmetische Widerspruchslosigkeit vorausgesetzt, eine Menge, die Menge aller reellen Zahlen oder das Kontinuum.

9. Seien nun 1, 2, 3, ...,  $n$  gewisse Sätze (in endlicher Anzahl), die von gewissen Operationen zwischen den speziellen Elementen  $a, b, c, \dots, i$  (in endlicher Anzahl) handeln; wir beweisen dann zuerst, daß diese Sätze arithmetisch widerspruchsfrei sind. Durch Anwendung der Sätze entstehen aus den ursprünglichen Elementen  $a, b, c, \dots, i$  neue Elemente, die wir Funktionen von  $a, b, c, \dots, i$  nennen. Wenn nun der sofort zu zitierende Vollständigkeitssatz eine logische Folge der Sätze 1, 2, 3, ...,  $n$  ist, sagen wir, daß diese Sätze eine Menge aller Elemente, die ihnen genügen, definieren.

Der Vollständigkeitssatz lautet so:

Wenn die Elemente  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  zusammen mit den Funktionen von  $a, b, c, \dots, i$  den Sätzen 1, 2, 3, ...,  $n$  genügen, dann sind  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  selbst Funktionen von  $a, b, c, \dots, i$ .

Wir stellen also an ein Axiomsystem zwei Forderungen, nämlich erstens eine arithmetische Forderung der Widerspruchslosigkeit und zweitens die mengentheoretische Forderung der Vollständigkeit.

Ist nun die Menge auf diese Weise definiert, dann sind auch ihre Elemente nachher als die Funktionen der in den Axiomen auftretenden speziellen Elementen definiert.

Vielleicht ist es nicht unnütz hervorzuheben, daß jede besondere Definition der Elemente entfernt und in die Sätze  $1, 2, 3, \dots, n$  axiomatisch aufgenommen werden muß.

Es wird nun in der Tat gelingen, zu beweisen, daß in diesem Sinne die endliche Menge, die Menge der ganzen, der rationalen, der reellen Zahlen, endlich auch die Cantorschen Zahlenklassen existieren, indem man für jede dieser Mengen ein solches Axiomensystem bilden kann. Dagegen wird ein Axiomensystem von der Menge  $W$  aller Ordnungstypen die Vollständigkeitseigenschaft vermissen lassen, und diese Menge existiert im obengenannten Sinne nicht.

Göttingen, Juli 1906.

---