

## DETERMINAZIONE DELLA FUNZIONE $m^{\text{ma}}$ DI GREEN PER UN CAMPO SFERICO DI $p$ DIMENSIONI.

Memoria di **Pierina Quintili** (Roma).

Adunanza del 12 agosto 1906.

Non è privo di importanza il problema di integrare l'equazione

$$\Delta^{2m} u = F$$

(dove  $F$  rappresenta una funzione nota) in un campo sferico di  $p$  dimensioni, se  $p$  indica un numero intero  $> 1$ , quando al contorno sia dato il valore della funzione e quello delle sue derivate normali fino all'ordine  $m - 1$ .

L'integrazione della (1) può essere eseguita coi metodi del Prof. ALMANZI \*), il quale la riduce a successive integrazioni della  $\Delta^2$ , indipendentemente dal metodo di GREEN. Nel caso di  $m = 2$  il Prof. LAURICELLA \*\*), facendo uso della funzione di GREEN, ha integrata l'equazione differenziale  $\Delta^4 u = 0$  in un campo di forma circolare ( $p = 2$ ), supposti noti al contorno i valori della funzione incognita e quelli della sua derivata normale e, per il primo, ha trovato una soluzione composta di soli integrali definiti, che si presta molto bene alla verifica delle condizioni che debbono essere soddisfatte nei punti del contorno.

Il Prof. MARCOLONGO in un suo notevole lavoro \*\*\*), ed in una successiva Nota †) ci dà l'espressione della funzione di GREEN di grado  $m$  per la sfera, problema che è anche risoluto, con un altro metodo assolutamente diverso, dal Prof. BOGGIO ††). Il Dr. ORLANDO in una sua Nota †††) ci dà un metodo, molto elegante, per mettere sotto

\*) *Sull'integrazione dell'equazione differenziale  $\Delta^{2n} = 0$*  [Annali di Matematica, serie III, tomo II (1899), pp. 1-51].

\*\*) *Integrazione dell'equazione  $\Delta^2 (\Delta^2 u) = 0$  in un campo di forma circolare* [Atti dell'Accad. di Torino, vol. XXXI (1895-96), pp. 1010-1018].

\*\*\*) *Determinazione della funzione di GREEN di grado  $n$ , nel caso di una sfera* [Rend. Acc. Lincei, vol. X, 2° semestre 1901, pp. 131-137].

†) *Sulla funzione di GREEN di grado  $n$  per la sfera* [questi Rendiconti, t. XVI (1902), pp. 230-235].

††) *Sulle funzioni di GREEN d'ordine  $m$*  [questi Rendiconti, t. XX (1905), pp. 97-135, 377].

†††) *Sulla funzione  $n^{\text{ma}}$  di GREEN per la sfera* [Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. XLII (1904), pp. 292-296].

forma breve e chiara le costanti che figurano nella funzione  $G_m$ , non interamente determinata dal Prof. MARCOLONGO nel suo primo lavoro.

Noi faremo qui vedere un metodo, per determinare la funzione  $m^{ma}$  di GREEN per una sfera di  $p$  dimensioni con un procedimento, che è un'estensione dei metodi del Prof. MARCOLONGO e del Dr. ORLANDO.

**1. Funzione  $m^{ma}$  di GREEN per una sfera di  $p$  dimensioni.** — *Espressione di questa funzione.* — Senza premettere i noti concetti relativi alle funzioni  $m^{me}$  di GREEN ed al loro ufficio nella risoluzione dell'equazione  $\Delta^{2m} = 0$ , vogliamo esporre il procedimento indicato, che ci condurrà a determinare una funzione  $G_{m,p}$  che, in una sfera  $S$  di  $p$  dimensioni, sodisfa, regolarmente, all'equazione:

$$(1) \quad \Delta^{2m} G_{m,p} = 0.$$

Per calcolare questa funzione è necessario distinguere due casi:

1°)  $p$  impari arbitrario, o  $p$  pari  $> 2m$ ,

2°)  $p$  pari e  $\leq 2m$ .

Nel 1° caso si hanno sul contorno  $\sigma$  del campo  $S$  le condizioni:

$$(2) \quad G_{m,p} = r^{2m-p}, \quad \frac{d^k G_{m,p}}{dn^k} = \frac{d^k r^{2m-p}}{dn^k}$$

e nel 2° le altre:

$$(3) \quad G_{m,p} = r^{2m-p} \log \frac{1}{r}, \quad \frac{d^k G_{m,p}}{dn^k} = \frac{d^k \left( r^{2m-p} \log \frac{1}{r} \right)}{dn^k}$$

$$(k = 1, 2, \dots, m-1),$$

dove, al solito,  $r$  è la distanza di un punto fisso arbitrario  $A$  del campo  $S$  da un punto mobile  $M$ , e  $\frac{d}{dn}$  rappresenta la derivata, secondo la normale, rivolta verso l'interno di  $S$ .

Diciamo  $R$  il raggio della sfera di  $p$  dimensioni, nel cui centro  $O$  è posta l'origine degli assi,  $\rho$  la distanza del punto  $M$  dal centro, ed  $r'$  la distanza del punto  $A$  dall'immagine  $M'$  di  $M$ . Poniamo allora:

$$r_i = \frac{\rho}{R} r',$$

essendo  $r_i$  funzione delle coordinate di  $A$  \*), e consideriamo le funzioni:

$$r^{2v} r_i^{2w-1} \quad (v=0, 1, 2, \dots, m-1),$$

dove è

$$2v + 2w - 1 = 2m - p.$$

Si dimostra facilmente, adoperando il procedimento d'induzione, che essa è  $m$ -armonica nell'interno della sfera di  $p$  dimensioni; allora, nel caso di  $p$  dispari arbitrario, o pari  $> 2m$ , poniamo, per risolvere il problema:

$$(4) \quad G_{m,p} = \sum_{i=1}^m a_i r_i^{2m-p-2i+2} r^{2i-2}$$

\*) MARCOLONGO, *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici* (Milano, 1904), cap. I, § 10, pag. 31.

e nel caso di  $p$  pari  $\leq 2m$ , posto  $p = 2\mu$ , consideriamo la funzione:

$$(5) \quad G_{m,2\mu} = r^{2m-2\mu} \log \frac{I}{r_1} + \sum_{i=1}^m a'_i r_1^{2m-2\mu-2i+2} r^{2i-2}$$

e calcoliamo i coefficienti costanti  $a_i$  ed  $a'_i$  che figurano in queste due espressioni, in modo da soddisfare, rispettivamente, alle condizioni (2) e (3).

Volendo calcolare i coefficienti  $a_i$  della funzione (4) notiamo che la condizione al contorno:

$$(2) \quad \frac{d^k G_{m,p}}{dn^k} = \frac{d^k r^{2m-p}}{dn^k}$$

si può mettere sotto la forma:

$$(2') \quad \frac{d^k (G_{m,p} - r^{2m-p})}{dn^k} = 0$$

e mostriamo come questa si converta facilmente nell'altra:

$$(2'') \quad \frac{\partial^k (G_{m,p} - r^{2m-p})}{\partial r_1^k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m-1),$$

dove il simbolo di derivazione  $\partial$  vale a denotare che qui deriviamo rispetto a  $r_1$ , solo in quanto figura esplicitamente (in  $G_{m,p}$ ).

Applichiamo perciò il noto procedimento d'induzione. Chiamiamo  $\Phi(r, r_1)$  la funzione  $G_{m,p} - r^{2m-p}$  omogenea in  $r, r_1$ ; vogliamo dimostrare che la condizione  $\frac{d\Phi}{dn} = 0$  equivale all'altra:  $\frac{\partial \Phi}{\partial r_1} = 0$ . Siano  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-1}$  gli archi di cerchi massimi, fra di loro ortogonali, che, passando per il punto nel quale consideriamo la normale  $n$ , compiono il sistema di coordinate curvilinee al quale ci riferiamo. Risulta chiara la relazione:

$$(6) \quad \frac{d\Phi}{dr_1} = \frac{d\Phi}{dn} \lambda + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_1} \lambda_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_2} \lambda_2 + \dots,$$

dove  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots$  sono costanti e  $\frac{d\Phi}{dr_1}$  denota la derivata totale di  $\Phi$  rispetto ad  $r_1$ , cioè vale la formula:

$$(7) \quad \frac{d\Phi}{dr_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{dr}{dr_1},$$

dove si deriva  $r$  rispetto a  $r_1$  in conformità della relazione stabilita in principio.

Poichè nel nostro caso è  $\Phi = 0$  sopra tutto il contorno, la (6) mostra che, se è nulla  $\frac{d\Phi}{dn}$  è anche nulla  $\frac{\partial \Phi}{\partial r_1}$ ; dunque, sul contorno, vale l'equazione ottenuta dalla (7):

$$(7') \quad 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{dr}{dr_1}.$$

Chiamando con  $q$  il grado di  $\Phi$ , l'omogeneità di  $\Phi(r, r_1)$  ci permette di scrivere la relazione

$$q\Phi = r_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} + r \frac{\partial \Phi}{\partial r},$$

che ci dà, sul contorno:

$$(7'') \quad 0 = r_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} + r \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Le equazioni (7') e (7''), delle quali il determinante  $r - r_1 \frac{dr}{dr_1}$  non è identicamente nullo, mostrano che sul contorno vale la  $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$  e la

$$(8) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} = 0.$$

Supponiamo allora di aver dimostrato che la condizione  $\frac{d^{k-1} \Phi}{dn^{k-1}} = 0$  si può sostituire, sul contorno, con l'altra  $\frac{\partial^{k-1} \Phi}{\partial r_1^{k-1}} = 0$  e che ciò avvenga anche per tutti i valori più bassi dell'indice di derivazione.

Ponendo nella (6) al posto di  $\Phi$  la funzione omogenea  $\frac{\partial^{k-1} \Phi}{\partial r_1^{k-1}}$  e supposte nulle, al contorno, la derivata normale di  $\Phi$  fino alla  $(k-1)^{\text{ma}}$ , otteniamo, nel 2° membro, insieme con termini che son nulli al contorno, la quantità  $\alpha \frac{d^k \Phi}{dn^k}$  (in cui  $\alpha$  è un coefficiente numerico) perchè le derivate fatte rispetto ad  $r_1$ , nel sistema di coordinate ortogonali considerato, danno derivate di indice uguale od inferiore rispetto alla normale  $n$ . Abbiamo allora nel 1° membro la quantità

$$\frac{d}{dr_1} \left( \frac{\partial^{k-1} \Phi}{\partial r_1^{k-1}} \right)$$

e quindi sarà:

$$\frac{d}{dr_1} \left( \frac{\partial^{k-1} \Phi}{\partial r_1^{k-1}} \right) = 0;$$

perciò dalla formula:

$$(9) \quad \frac{d}{dr_1} \left( \frac{\partial^{k-1} \Phi}{\partial r_1^{k-1}} \right) = \frac{\partial^k \Phi}{\partial r_1^k} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^{k-1} \Phi}{\partial r_1^{k-1}} \right) \frac{dr}{dr_1},$$

analoga alla (7), otteniamo:

$$(9') \quad 0 = \frac{\partial^k \Phi}{\partial r_1^k} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^{k-1} \Phi}{\partial r_1^{k-1}} \right) \frac{dr}{dr_1};$$

ma, per l'omogeneità di  $\frac{\partial^{k-1} \Phi}{\partial r_1^{k-1}}$  e per la condizione già ammessa precedentemente, si ha:

$$(9'') \quad 0 = r_1 \frac{\partial^k \Phi}{\partial r_1^k} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^{k-1} \Phi}{\partial r_1^{k-1}} \right) \frac{dr}{dr_1}.$$

Dalle equazioni (9') e (9'') segue che la condizione al contorno  $\frac{\partial^k \Phi}{\partial r_1^k} = 0$  vale insieme con l'altra  $\frac{d^k \Phi}{dn^k} = 0$  e con quelle già ammesse. Conchiudendo possiamo dire, che le



Poniamo per semplicità nella  $G_{m,2\mu}$ :

$$(12) \quad \Gamma_{m,2\mu} = \sum_{i=1}^m a'_i r_i^{2m-2\mu-2i+2} r_i^{2i-2};$$

avremo:

$$(5') \quad G_{m,2\mu} = r^{2m-2\mu} \log \frac{r}{r_i} + \Gamma_{m,2\mu}$$

e ricordiamo che al contorno deve essere verificata la relazione:

$$\frac{d^k G_{m,2\mu}}{dn^k} = \frac{d^k \left( r^{2m-2\mu} \log \frac{r}{r_i} \right)}{dn^k}$$

che, tenendo presente la (5') si muta facilmente nell'altra:

$$(3') \quad \frac{d^k \Gamma_{m,2\mu}}{dn^k} = \frac{d^k \left( r^{2m-2\mu} \log \frac{r_i}{r} \right)}{dn^k}$$

pure al contorno. Ma, ripetendo un ragionamento già fatto nel caso precedente, è chiaro come questa condizione si possa convertire, sempre su  $\sigma$ , nell'altra:

$$(3'') \quad \frac{\partial^k \Gamma_{m,2\mu}}{\partial r_i^k} = \frac{\partial^k \left( r^{2m-2\mu} \log \frac{r_i}{r} \right)}{\partial r_i^k} \quad (k = 2, \dots, m-1).$$

Se ora consideriamo l'espressione (12) e formiamo la  $\frac{\partial^k \Gamma_{m,2\mu}}{\partial r_i^k}$ , si ottiene:

$$\frac{\partial^k \Gamma_{m,2\mu}}{\partial r_i^k} = \sum_{i=1}^m a'_i (2m-2\mu-2i+2)(2m-2\mu-2i+1) \dots (2m-2\mu-2i-k+3) r_i^{2m-2\mu-2i+2-k} r_i^{2i-2};$$

e poichè è

$$\frac{\partial^k \left( r^{2m-2\mu} \log \frac{r_i}{r} \right)}{\partial r_i^k} = (-1)(-2) \dots (-k+1) r_i^{-k} r^{2m-2\mu},$$

ricordando che per la (3'') i primi membri di queste due ultime relazioni sono uguali su  $\sigma$ , avremo ancora l'equazione:

$$(13) \quad \left\{ \sum_{i=1}^m a'_i (2m-2\mu-2i+2)(2m-2\mu-2i+1) \dots (2m-2\mu-2i-k+3) \right. \\ \left. = (-1)(-2) \dots (-k+1), \right.$$

che ci rappresenta la  $(k+1)^{\text{ma}}$  equazione del sistema che dovrà determinare i coefficienti  $a'_i$  della funzione  $G_{m,2\mu}$ .

Ma questa equazione vale per  $k > 1$ , come è evidente; per  $k = 0$  dalla condizione al contorno:

$$\Gamma_{m,2\mu} = r^{2m-2\mu} \log \frac{r_i}{r}$$

ricaviamo la relazione:

$$a'_1 + a'_2 + \dots + a'_m = 0,$$

che ci fornisce la prima equazione tra i coefficienti  $a'_i$  della  $G_{m,2\mu}$ .



Questo determinante, come osserva il Dr. ORLANDO nella Nota citata \*), equivale all'altro :

$$D = \begin{vmatrix} \text{I} & & & \text{I} & & \dots & & \text{I} \\ (2m-p) & (2m-p-2) & \dots & (-p+2) \\ (2m-p)^2 & (2m-p-2)^2 & \dots & (-p+2)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (2m-p)^{m-1} & (2m-p-2)^{m-1} & \dots & (-p+2)^{m-1} \end{vmatrix},$$

che, come sappiamo, è uguale al prodotto di tutte le differenze che si formano, togliendo dagli elementi  $\alpha_i$  d'indice maggiore, quelli d'indice minore, ed avremo, con calcoli semplicissimi :

$$(1') \quad D = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} 2^{\frac{m(m-1)}{2}} 1! 2! \dots (m-2)! (m-1)!$$

Per l'osservazione fatta relativamente all'espressione  $D$ , data dalla (1), possiamo scrivere senz'altro il determinante  $D_i$ , che figura come numeratore della quantità costante  $a_i$ , sotto la forma :

$$D_i = (-1)^{i+1} (2m-p)(2m-p-2) \dots (2m-p-2i+4)(2m-p-2i) \dots (-p+2) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \text{I} & \dots & \text{I} & & \text{I} & \dots & \text{I} \\ (2m-p) & \dots (2m-p-2i+4) & (2m-p-2i) & \dots & (-p+2) \\ (2m-p)^2 & \dots (2m-p-2i+4)^2 & (2m-p-2i)^2 & \dots & (-p+2)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (2m-p)^{m-2} \dots (2m-p-2i+4)^{m-2} & (2m-p-2i)^{m-2} \dots & (-p+2)^{m-2} \end{vmatrix},$$

che si riduce facilmente all'altra :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} D_i &= (-1)^{i+1 + \frac{m(m-1)}{2}} 2^{\frac{m(m-1)}{2}} (2m-p)(2m-p-2) \dots (2m-p-2i+4) \times \\ &\times (2m-p-2i) \dots (-p+2) \frac{1! 2! \dots (m-1)!}{(i-1)!(m-i)!} \end{aligned} \right.$$

Quindi, per  $p$  impari arbitrario, o pari  $> 2m$ , la quantità  $a_i = \frac{D_i}{D}$  è espressa dalla relazione :

$$(3) \quad a_i = (-1)^{i+m} \frac{(2m-p)(2m-p-2) \dots (-p+2)}{2^{m-i} (m-i)!(i-1)!(2m-p-2i+2)}$$

ed abbiamo dunque per  $G_{m,p}$  la formula :

$$(4) \quad G_{m,p} = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+m} \frac{(2m-p)(2m-p-2) \dots (-p+2)}{2^{m-i} (m-i)!(i-1)!(2m-p-2i+2)} r_1^{2m-2i-p+2} r_2^{2i-2},$$

che ci rappresenta l' $m^{ma}$  funzione di GREEN per una sfera di  $p$  dimensioni, quando sia  $p$  impari arbitrario o pari  $> 2m$ .

Per  $p=3$  otteniamo la nota funzione di GREEN di grado  $m$ , per la sfera dello

\*) Sulla funzione  $n^{ma}$  di GREEN per la sfera.



spazio ordinario :

$$G_{m,3} = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+m+1} \frac{(2m-3)(2m-5) \dots 1}{2^{m-1}(m-i)!(i-1)!(2m-2i-1)} r_1^{2m-2i-1} r^{2i-2},$$

che può porsi facilmente sotto la forma:

$$(5) \quad G_{m,3} = \sum_{i=1}^m (-1)^{m+i+1} \frac{(2m-3)!}{2^{2m-3}(m-2)!(m-i)!(i-1)![2(m-i)-1]} r^{2(m-i)-1} \cdot r^{2(i-1)}$$

data dal Dr. ORLANDO nel citato lavoro.

Consideriamo ora il 2° caso e calcoliamo il determinante  $D'_i$ , numeratore della quantità costante  $a'_i$ , che figura nella funzione (5) del n° precedente; questo determinante avrà l'espressione:

$$(6) \quad D'_i = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 1 \\ (2m-2\mu) & \dots & (2m-2\mu-2i+4) & 1 & \dots & (-2\mu+2) \\ (2m-2\mu)(2m-2\mu-1) & \dots & (2m-2\mu-2i+4)(2m-2\mu-2i+3) & (-1) & \dots & (-2\mu+2)(-2\mu+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Per trovare il suo valore, considero l'altro:

$$D'_i(\xi) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_i & \dots & \alpha_{i-1} & 1 & \dots & \alpha_m \\ \alpha_i(\alpha_i-1) & \dots & \alpha_{i-1}(\alpha_{i-1}-1) & \xi & \dots & \alpha_m(\alpha_m-1) \\ \alpha_i(\alpha_i-1)(\alpha_i-2) & \dots & \alpha_{i-1}(\alpha_{i-1}-1)(\alpha_{i-1}-2) & \xi(\xi-1) & \dots & \alpha_m(\alpha_m-1)(\alpha_m-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

dove nel caso nostro è

$$\alpha_i = 2(m - \mu - i + 1).$$

Se moltiplico quest'ultimo determinante per 1 ottengo:

$$F(\xi) = (\xi + 1) D'_i(\xi) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_i & \dots & \alpha_{i-1} & \xi & \dots & \alpha_m \\ \alpha_i(\alpha_i-1) & \dots & \alpha_{i-1}(\alpha_{i-1}-1) & (\xi+1)\xi & \dots & \alpha_m(\alpha_m-1) \\ \alpha_i(\alpha_i-1)(\alpha_i-2) & \dots & \alpha_{i-1}(\alpha_{i-1}-1)(\alpha_{i-1}-2) & (\xi+1)\xi(\xi-1) & \dots & \alpha_m(\alpha_m-1)(\alpha_m-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

che posso anche scrivere sotto la forma:

$$F(\xi) = (\xi + 1) D'_i(\xi) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_i & \dots & \alpha_{i-1} & \xi + 1 & \dots & \alpha_m \\ \alpha_i^2 & \dots & \alpha_{i-1}^2 & (\xi + 1)^2 & \dots & \alpha_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_i^{m-1} & \dots & \alpha_{i-1}^{m-1} & (\xi + 1)^{m-1} & \dots & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix}.$$

Ma è nota la relazione:

$$D'_i(-1) = [D'_i(\xi)]_{\xi=-1} = \lim_{\xi \rightarrow -1} \frac{F(\xi)}{\xi + 1} = \left( \frac{dF}{d\xi} \right)_{\xi=-1}$$

e giacchè le derivate dei termini della colonna  $i^{\text{ma}}$  sono date da

$$0, 1, 2(\xi + 1), 3(\xi + 1)^2, \dots, (m-1)(\xi + 1)^{m-2},$$

che, per  $\xi = -1$ , valgono tutte zero, all'infuori della seconda che è uguale a 1, ottengo:

$$D'_i(-1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \alpha_i & \alpha_{i-1} & 1 & \alpha_{i+1} & \alpha_m \\ \alpha_i^2 & \alpha_{i-1}^2 & 0 & \alpha_{i+1}^2 & \alpha_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_i^{m-1} & \alpha_{i-1}^{m-1} & 0 & \alpha_{i+1}^{m-1} & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^i \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_i^2 & \dots & \alpha_{i-1}^2 & \alpha_{i+1}^2 & \dots & \alpha_m^2 \\ \alpha_i^3 & \dots & \alpha_{i-1}^3 & \alpha_{i+1}^3 & \dots & \alpha_m^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_i^{m-1} & \dots & \alpha_{i-1}^{m-1} & \alpha_{i+1}^{m-1} & \dots & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix}.$$

Se in quest'ultimo determinante una delle  $\alpha$ , per es.  $\alpha_s$ , va allo zero, otteniamo:

$$D'_i(-1) = (-1)^{i+s+1} \alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_{i-1}^2 \alpha_{i+1}^2 \dots \alpha_{s-1}^2 \alpha_{s+1}^2 \dots \alpha_m^2 \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{i-1} & \alpha_{i+1} & \dots & \alpha_{s-1} & \alpha_{s+1} & \dots & \alpha_m \\ \alpha_1^2 & \dots & \alpha_{i-1}^2 & \alpha_{i+1}^2 & \dots & \alpha_{s-1}^2 & \alpha_{s+1}^2 & \dots & \alpha_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{m-3} & \dots & \alpha_{i-1}^{m-3} & \alpha_{i+1}^{m-3} & \dots & \alpha_{s-1}^{m-3} & \alpha_{s+1}^{m-3} & \dots & \alpha_m^{m-3} \end{vmatrix}.$$

Nel nostro caso, in cui è

$$p = 2\mu \leq 2m \quad \text{e} \quad \alpha_s = 2(m - \mu - s + 1),$$

è

$$\alpha_s = 0$$

quando

$$m - \mu + 1 = s \quad (s \neq i);$$

e l'espressione precedente, se sostituiamo al posto delle  $\alpha_i$  i loro valori, si riduce all'altra:

$$D'_i(-1) = (-1)^{i+m-\mu} 2^{2(m-2)} \frac{[(m-\mu)!(\mu-1)!]^2}{(m-\mu-i+1)^2} 2^{\frac{(m-2)(m-3)}{2}} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ (m-\mu) & \dots & (m-\mu-i+2) & (m-\mu-i) & \dots & 1 & (-1) & \dots & (-\mu+1) \\ (m-\mu)^2 & \dots & (m-\mu-i+2)^2 & (m-\mu-i)^2 & \dots & 1 & (-1)^2 & \dots & (-\mu+1)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (m-\mu)^{m-3} & \dots & (m-\mu-i+2)^{m-3} & (m-\mu-i)^{m-3} & \dots & 1 & (-1)^{m-3} & \dots & (-\mu+1)^{m-3} \end{vmatrix}.$$

Ma il determinante che figura come fattore nel secondo membro è del tipo di quelli già considerati precedentemente, e quindi, con calcoli molto semplici, otteniamo per  $D'_i$  l'espressione:

$$(7) \quad D'_i = (-1)^{i+m-\mu+\frac{(m-2)(m-3)}{2}} 2^{\frac{(m+1)(m-2)}{2}} \frac{1! 2! \dots (m-1)!}{(m-i)!(i-1)!} \cdot \frac{(m-\mu)!(\mu-1)!}{m-\mu-i+1}.$$

È chiaro dunque come per  $i \neq m - \mu + 1$  la quantità  $a'_i = \frac{D'_i}{D}$  è espressa dalla relazione:

$$(8) \quad a'_i = (-1)^{i+m-\mu} \frac{(m-\mu)!(\mu-1)!}{(m-i)!(i-1)!2(m-\mu-i+1)}.$$

Calcoliamo ora il coefficiente  $a'_{m-\mu+1}$  di  $r^{2m-2\mu}$  nella funzione  $G_{m,2\mu}$ .

Per osservazioni già fatte, vediamo subito come il determinante  $D'_{m-\mu+1}$ , si riduca facilmente al tipo:

$$D'_{m-\mu+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{m-\mu} & 1 & \alpha_{m-\mu+2} & \dots & \alpha_m \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_{m-\mu}^2 & 0 & \alpha_{m-\mu+2}^2 & \dots & \alpha_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{m-1} & \alpha_2^{m-1} & \dots & \alpha_{m-\mu}^{m-1} & 0 & \alpha_{m-\mu+2}^{m-1} & \dots & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

Ma essendo

$$\alpha_i = 2(m - \mu - i + 1),$$

ricaviamo:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} D'_{m-\mu+1} = (-1)^{m-\mu+1} \times \\ \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ [2(m-\mu)]^2 & [2(m-\mu-1)]^2 & \dots & 2^2 & [2(-1)]^2 & [2(-2)]^2 & \dots & [2(-\mu+1)]^2 \\ [2(m-\mu)]^3 & [2(m-\mu-1)]^3 & \dots & 2^3 & [2(-1)]^3 & [2(-2)]^3 & \dots & [2(-\mu+1)]^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [2(m-\mu)]^{m-1} & [2(m-\mu-1)]^{m-1} & \dots & 2^{m-1} & [2(-1)]^{m-1} & [2(-2)]^{m-1} & \dots & [2(-\mu+1)]^{m-1} \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

Per calcolare questo determinante, consideriamo l'altro:

$$(10) \quad K = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_v^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \dots & \lambda_v^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^v & \lambda_2^v & \dots & \lambda_v^v \end{vmatrix}.$$

È evidente che, se poniamo:

$$K' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_v \\ \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_v^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_0^v & \lambda_1^v & \dots & \lambda_v^v \end{vmatrix},$$

si ottiene la relazione:

$$K = - \left( \frac{dK'}{d\lambda_0} \right)_{\lambda_0=0}$$

e quindi, molto semplicemente, la formula:

$$(11) \quad K = \prod_{i=1}^v (\lambda_r - \lambda_s) \prod_{i=1}^v \lambda_i \sum_{i=1}^v \frac{1}{\lambda_i} \quad (r > s),$$

che possiamo ora applicare, nel nostro caso, al determinante  $D'_{m-\mu+1}$ .

Si ha dunque, eseguendo calcoli facilissimi, la relazione:

$$(12) \quad D'_{m-\mu+1} = (-1)^{m+\frac{(m-1)(m-2)}{2}} \frac{m(m-1)}{2} 1! 2! \dots (m-1)! \sum_{i=1}^m \frac{1}{2(m-\mu-i+1)},$$

dove con  $\Sigma'$  s'intende che la sommatoria va fatta escludendo il valore  $i = m - \mu + 1$ .

Ma essendo  $a'_{m-\mu+1} = \frac{D'_{m-\mu+1}}{D}$ , otteniamo subito:

$$(13) \quad a'_{m-\mu+1} = - \sum_{i=1}^m \frac{1}{2(m-\mu-i+1)}.$$

Noti così i coefficienti  $a'_i$ , per la funzione  $G_{m,2\mu}$  avremo l'espressione:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} G_{m,2\mu} &= r^{2m-2\mu} \log \frac{1}{r_i} + \sum_{i=1}^m (-1)^{m+i-\mu} \frac{(m-\mu)!(\mu-1)!}{(m-i)!(i-1)! 2[m-\mu-i+1]} r_i^{2m-2\mu-2i+2} r^{2i-2} \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \frac{r^{2m-2\mu}}{2(m-\mu-i+1)}, \end{aligned} \right.$$

che ci rappresenta l' $m^{\text{ma}}$  funzione di GREEN per una sfera di  $p$  dimensioni, supposto  $p = 2\mu$  e  $\leq 2m$ .

Per  $\mu = 1$  otteniamo la nota funzione di GREEN di grado  $m$  per il cerchio:

$$G_{m,2} = r^{2m-2} \log \frac{1}{r_i} + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i+m-1} \frac{(m-1)!}{(m-i)!(i-1)!} \cdot \frac{r_i^{2m-2i} r^{2i-2}}{2(m-i)} - r^{2m-2} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{2(m-i)}$$

a cui possiamo dare la forma:

$$(15) \quad G_{m,2} = r^{2(m-1)} \log \frac{1}{r_i} + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i+m-1} \binom{m-1}{i-1} \frac{r_i^{2(m-i)} r^{2(i-1)}}{2(m-i)} - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{r^{2(m-1)}}{2(m-i)}.$$

Determinate dunque, rispettivamente, le due funzioni (4) e (14) sarà risoluto il problema dell'integrazione dell'equazione:

$$(1) \quad \Delta^{2m} u = F$$

in un campo sferico di  $p$  dimensioni (se  $p$  indica un numero intero  $> 1$ ) mediante le formule:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} h_{m,p} u(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_p^{(0)}) &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\sigma} \left[ \Delta^{2i} u \frac{d}{dn} \Delta^{2(m-i-1)} (r^{2m-p} - G_{m,p}) \right. \\ &\quad \left. - \Delta^{2(m-i-1)} (r^{2m-p} - G_{m,p}) \frac{d}{dn} \Delta^{2i} u \right] d\sigma - \int_S (r^{2m-p} - G_{m,p}) \Delta^{2m} u dS, \end{aligned} \right.$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} k_{m,2\mu} u(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{2\mu}^{(0)}) &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\sigma} \left[ \Delta^{2i} u \frac{d}{dn} \Delta^{2(m-i-1)} \left( r^{2m-2\mu} \log \frac{1}{r} - G_{m,2\mu} \right) \right. \\ &\quad \left. - \Delta^{2(m-i-1)} \left( r^{2m-2\mu} \log \frac{1}{r} - G_{m,2\mu} \right) \frac{d}{dn} \Delta^{2i} u \right] d\sigma - \int_S \left( r^{2m-2\mu} \log \frac{1}{r} - G_{m,2\mu} \right) \Delta^{2m} u dS, \end{aligned} \right.$$

dove  $h_{m,p}$  e  $k_{m,2\mu}$  sono costanti dipendenti dal numero di dimensioni. Determinata dunque, come abbiamo fatto, la funzione generale di GREEN, noi potremmo, estendendo un noto procedimento \*), costruire una formula che, per le funzioni poliarmoniche in una sfera

\*) MARCOLONGO, *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici* (Milano, 1904), pp. 35 e 36.

di  $p$  dimensioni, avesse l'ufficio che, per le funzioni biarmoniche, ha nel cerchio la seguente:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} u' &= \frac{R^2 - \rho'^2}{2R} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{R^2 - \rho'^2}{R[R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos(\theta - \theta')]} d\sigma \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} u \frac{(R^2 - \rho'^2)[R - \rho' \cos(\theta - \theta')]}{R^2[R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos(\theta - \theta')]^2} d\sigma \end{aligned} \right.$$

data dal Prof. LAURICELLA \*). Ciò mostrerebbe la coincidenza dei risultati, ottenuti col metodo del prof. VOLTERRA esteso dall'Ing. ALMANI, con quelli contenuti nel presente lavoro, ma i calcoli, destinati a verificare la coincidenza di questi risultati, sarebbero, in generale, lunghi e penosi.

Roma, maggio 1906.

PIERINA QUINTILI.

---

\*) Loco citato.