Sur la fonction $z-[z]$.

(*Par* Ernest Cesàro, *étudiant, à Torre Annunziata.*)

---

1. Par des opérations définies, effectuées sur les nombres d'un certain système, on engendre un nouvel ensemble Ω de quantités, dont la distribution, dans le système des valeurs réelles, n'est pas, généralement, *uniforme.* Soit $D(z)$ la *densité* des quantités de Ω, autour de la valeur z. Il est évident que la moyenne arithmétique des valeurs d'une fonction $f(z)$, relatives à tous les nombres de Ω, est

$$\mathfrak{M}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)D(z)dz. \tag{1}$$

Nous avons déjà donné des applications de cette formule en supposant le système primitif constitué par tous les *nombres entiers,* et le système Ω par toutes les *quantités commensurables,* considérées comme engendrées par la division de deux nombres, pris au hasard dans le premier système. D'autres modes de génération sont possibles; mais c'est en adoptant celui qui vient d'être indiqué que l'on a trouvé, dans la Note « *Sur la distribution des quantités commensurables* » que la densité $D(z)$, égale à $\frac{1}{2}$, lorsque z est compris entre 0 et 1, est $\frac{1}{2z^2}$ pour z supérieur à l'unité. C'est ainsi que nous avons pu établir l'importante formule

$$\mathfrak{M}=\frac{1}{2}\int_0^1 f(z)dz+\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{f(z)}{z^2}dz. \tag{2}$$

Nous allons faire une nouvelle application de la formule (1) aux quantités $z-[z]$, représentant les *excès des fractions z sur les plus grands nombres entiers qu'elles renferment.* On continuera à concevoir z comme engendré par la division de deux nombres entiers, pris au hasard, de sorte que $z-[z]$ représente aussi le *rapport du reste au diviseur,* dans une division quelconque.

2. Soit $L(\varepsilon)$ la *fréquence* des valeurs inférieures à ε, dans la suite

$$\frac{n}{1}-\left[\frac{n}{1}\right], \quad \frac{n}{2}-\left[\frac{n}{2}\right], \quad \frac{n}{3}-\left[\frac{n}{3}\right], \dots, \quad \frac{n}{n}-\left[\frac{n}{n}\right]. \tag{3}$$

Naturellement, ε est une fraction proprement dite. D'après une remarque, due à DIRICHLET, on a

$$[z]-[z-\varepsilon]=\left|\begin{array}{l} 1, \text{ si } z-[z]<\varepsilon \\ 0, \;\; \text{»} \quad \text{»} \quad \geqq \varepsilon. \end{array}\right.$$

Le nombre des quantités (3), inférieures à ε, est donc

$$nL(\varepsilon)=\sum_{p=1}^{p=n}\left\{\left[\frac{n}{p}\right]-\left[\frac{n}{p}-\varepsilon\right]\right\}.$$

Il suffit d'évaluer, de deux manières différentes, la quotité des couples de nombres x, y, entiers et positifs, satisfaisant à la condition $x(y+\varepsilon)\leqq n$, pour se convaincre immédiatement que l'on peut aussi écrire

$$nL(\varepsilon)=\sum_{p=1}^{p=n}\left\{\left[\frac{n}{p}\right]-\left[\frac{n}{p+\varepsilon}\right]\right\}.$$

Par conséquent, pour n infini,

$$L(\varepsilon)=1-\frac{1}{1+\varepsilon}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2+\varepsilon}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3+\varepsilon}+\cdots \tag{4}$$

En conservant les notations habituelles on a donc

$$L(\varepsilon)=H(\varepsilon)=\int_0^1\frac{1-\varphi^\varepsilon}{1-\varphi}\,d\varphi.$$

3. Remarquons, en passant, que les propriétés de la *fonction harmonique* donnent

$$L\left(\frac{1+x}{2}\right)-L\left(\frac{1-x}{2}\right)=\pi\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}-\frac{4x}{1-x^2}.$$

Par exemple, pour $x=\frac{1}{2}$,

$$L\left(\frac{3}{4}\right)-L\left(\frac{1}{4}\right)=\pi-\frac{8}{3}.$$

Telle est, pour n indéfiniment grand, la fréquence, dans la série (3), des valeurs comprises entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$. Comme l'a montré M. BERGER, dans ses « *Applica-*

tions de la fonction gamma à la théorie des nombres », on peut employer ces formules pour le calcul de certaines transcendantes. Ainsi, la dernière formule permet de calculer π, et il est remarquable que les valeurs obtenues par cette voie sont précisément celles qui résultent du calcul des réduites successives, dans le développement de π en fraction continue. En effet, pour $n=21$, la série (3) devient

$$0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{5}{8},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{10},\ \frac{10}{11},$$
$$\frac{3}{4},\ \frac{8}{13},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{5}{16},\ \frac{4}{17},\ \frac{1}{6},\ \frac{2}{19},\ \frac{1}{20},\ 0.$$

Parmi ces fractions, il y en a *dix* qui sont comprises entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}\cdot$ Donc, approximativement,

$$\pi=\frac{8}{3}+\frac{10}{21}=\frac{22}{7}\cdot$$

C'est le *rapport d'Archimède.* Pour $n=339$, M. Berger trouve le *rapport de Métius*

$$\pi=\frac{8}{3}+\frac{161}{339}=\frac{355}{113};$$

etc., etc....

4. Quelle est, dans la série

$$\frac{1}{n}-\left[\frac{1}{n}\right],\qquad \frac{2}{n}-\left[\frac{2}{n}\right],\qquad \frac{3}{n}-\left[\frac{3}{n}\right],\dots\qquad \frac{n}{n}-\left[\frac{n}{n}\right],$$

la fréquence $\Lambda(\varepsilon)$ des termes non supérieurs à ε? Il est évident que

$$n\Lambda(\varepsilon)=[n\varepsilon]+1.$$

Par suite, n augmentant indéfiniment,

$$\Lambda(\varepsilon)=\varepsilon. \tag{5}$$

Cela posé, appelons $\mathfrak{p}(\alpha,\beta)$ la *probabilité que l'excès d'une fraction quelconque sur le plus grand nombre entier qu'elle renferme soit compris entre* α *et* β. D'après ce que nous avons dit dans la Note « *Sur les éventualités de la division arithmétique* », et en ayant égard aux formules (4) et (5), on a:

$$\mathfrak{p}(0,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2}H(\varepsilon). \tag{6}$$

Plus généralement:

$$\mathfrak{p}(\alpha, \beta) = \frac{\beta-\alpha}{2}\left\{1 + \frac{1}{(1+\alpha)(1+\beta)} + \frac{1}{(2+\alpha)(2+\beta)} + \frac{1}{(3+\alpha)(3+\beta)} + \cdots\right\}.$$

En particulier:

$$\mathfrak{p}\left(\frac{1-x}{2}, \frac{1+x}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2} - \frac{x}{2}\cdot\frac{3+x^2}{1-x^2}.$$

Par exemple, pour $x=\frac{1}{2}$,

$$\mathfrak{p}\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{13}{12} = 0{,}4874\ldots$$

Conséquemment: « *Il y a* 43 *à parier, contre* 41 *environ, que, dans une division quelconque, le rapport du reste au diviseur n'est pas compris entre* $\frac{1}{4}$ *et* $\frac{3}{4}$ ».

5. Par dérivation de (6) nous obtenons

$$D(\varepsilon) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}H'(\varepsilon). \tag{7}$$

Sous une autre forme

$$D(\varepsilon) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\varphi}{e^\varphi - 1}\cdot\frac{d\varphi}{e^{\varepsilon\varphi}}.$$

En particulier:

$$D(0) = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2} = 1{,}3224\ldots, \qquad D(1) = \frac{\pi^2}{12} = 0{,}8224\ldots,$$

$$D\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{3}{2} = 0{,}9674\ldots$$

À chaque propriété de la fonction harmonique correspond une propriété de la fonction D. C'est ainsi que l'on trouve

$$D\left(\frac{1-x}{2}\right) + D\left(\frac{1+x}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2\cos^2\frac{\pi x}{2}} + 1 - 4\frac{1-x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Par exemple:

$$D\left(\frac{1}{4}\right) + D\left(\frac{3}{4}\right) = \pi^2 - \frac{71}{9} = 1{,}9807\ldots$$

On a aussi

$$\sum_{p=1}^{p=n} D\left(\frac{p}{n}\right) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{n}{n+2}\right)^2 + \left(\frac{n}{n+3}\right)^2 + \cdots\right\};$$

etc., etc....

6. En vertu de (7), la formule (1) devient

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2}\int_0^1 f(z)\,dz + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty}\int_0^1 \frac{f(z)\,dz}{(z+p)^2}. \tag{8}$$

Si la fonction f admet la période 1, on a

$$f(z-[z]) = f(z),$$

et, par conséquent, sa valeur moyenne, relative au système des quantités $z-[z]$, ne diffère pas de celle qui se rapporte aux quantités z. En d'autres termes, les formules (2) et (8) doivent coïncider. C'est ce qu'il est aisé de vérifier. En effet

$$\sum_{p=1}^{p=\infty}\int_0^1 \frac{f(z)\,dz}{(z+p)^2} = \sum_{p=1}^{p=\infty}\int_p^{p+1} \frac{f(z-p)\,dz}{z^2} = \int_1^\infty \frac{f(z)\,dz}{z^2}.$$

Il est donc superflu de s'occuper de ces formes particulières de la fonction f: elles nous reconduiraient aux résultats obtenus dans la Note « *Sur la distribution des quantités commensurables* ».

7. Veut-on la moyenne valeur de $z-[z]$? Pour $f(z)=z$, la formule (8) devient

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p+1}\right\},$$

et l'on trouve ainsi l'égalité *moyenne* connue

$$z-[z] = \frac{3}{4} - \frac{C}{2} = 0{,}4613\ldots$$

De même, pour $f(z)=z^2$,

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\infty}\left\{2 - \frac{1}{p+1} - 2p\log\left(1+\frac{1}{p}\right)\right\}.$$

Donc, en moyenne,

$$\{z-[z]\}^2 = \frac{5}{3} - \frac{C}{2} - \log\sqrt{2\pi} = 0{,}4591\ldots$$

D'ailleurs, la formule (8), à laquelle nous sommes parvenus *directement*, n'est qu'un cas particulier de (2). Il suffit de changer, dans celle-ci, $f(z)$ en $f(z - [z])$, pour obtenir (8). Cela devait être, puisque les fonctions de $z - [z]$ ne sont, après tout, que des fonctions particulières de z. Il est inutile de multiplier les exemples: il nous suffit d'avoir montré que toutes les difficultés de la recherche de la valeur moyenne d'une fonction quelconque, par rapport au système des quantités $z - [z]$, se réduisent au calcul de certaines intégrales, et à la sommation d'une série. Il en est ainsi de toute recherche asymptotique, concernant un système Ω quelconque, et capable de conduire à un résultat constant, pourvu que l'on ait eu soin de calculer, préalablement, la densité des éléments de Ω aux environs de toute valeur, dont ces éléments soient susceptibles.