

# Ueber die Parameterdarstellung der Verhältnisse der Thetafunctionen zweier Veränderlicher.

Von

OTTO STAUDE in Breslau.

## Einleitung.

Die vorliegende Arbeit ist aus dem Bedürfniss erwachsen, die *Theorie der Umkehrung der hyperelliptischen Integrale 1. Ordnung* in einer Form zu entwickeln, welche für gewisse *geometrische Anwendungen* geeigneter sei, als die bisher bekannten Darstellungen jener Theorie. Dieser Veranlassung entsprechend ist in der Arbeit vor Allem angestrebt worden, in den aufzustellenden Formelsystemen *die im Wesen derselben begründete Gruppierung* der betheiligten Elemente auch der *Anschauung* möglichst unmittelbar darzubieten. Von den verschiedenen Momenten, die diesem Zwecke dienen, seien hier die hauptsächlichsten hervorgehoben.

Es bedarf zuerst der *gleichmässigen*\*) *Bezeichnung der 6 Verzweigungspunkte* der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche vom Geschlecht 2, im Gegensatz zu der für andere Untersuchungen mitunter vortheilhaften Bezeichnungsweise, bei welcher einer der Verzweigungspunkte die ausgezeichnete Benennung  $\infty$  oder drei bezüglich die ausgezeichneten Benennungen 0, 1,  $\infty$  erhalten.

Es ist zweitens für die Behandlung des Umkehrproblems in dem geforderten Sinne von besonderer Wichtigkeit, in Gestalt und Anordnung der bezüglichen Formeln *die charakteristische Gruppierung der 16 Thetafunctionen zweier Veränderlicher mit Bezug auf die 6 Verzweigungspunkte* zum Ausdrucke zu bringen. Diese Gruppierung besteht

---

\*) Die gleichmässige Bezeichnung ist schon früher angewendet bei C. Neumann, *Die Umkehrung der Abel'schen Integrale* (Halle 1863); Thomae, *Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Functionen gebraucht werden* (Halle 1876); Cayley, *On the double Thetafunctions in connexion with a 16-nodal quartic surface*, Crelle's Journal Bd. 83, S. 216, (1877); Weber, *Ueber die Kummer'sche Fläche 4. Ordnung mit 16 Knotenpunkten und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen mit 2 Veränderlichen*, Crelle's Journal Bd. 84, S. 339, (1877), und anderwärts.

darin, dass 6 von den 16 Thetafunctionen beziehungsweise einzeln den 6 Verzweigungspunkten zugehören, während die 10 übrigen den 10 verschiedenen Eintheilungen aller 6 Verzweigungspunkte in jedesmal 2 Gruppen von je 3 entsprechen. \*)

Einen weiteren Beitrag zu der verlangten Gestaltung der Resultate bringt eine auf die erwähnte Gruppierung der 16 Thetafunctionen und der 6 Verzweigungspunkte gegründete Indicesbezeichnung der Thetafunctionen mit sich, \*\*) welche in der Arbeit eingeführt ist und sowohl mit der Weierstrass'schen Indicesbezeichnung \*\*\*) als mit der Riemann'schen Charakteristikenbezeichnung †) in engem Zusammenhang steht.

Als letztes für die Entwicklung wesentliches Moment ist die Ersetzung der 16 Thetafunctionen durch 16 andere je um einen constanten Factor von jenen verschiedene Functionen hervorzuheben. Dieselben entsprechen den, nach dem Vorgange des Herrn Weierstrass, bei der Theorie der Abel'schen Functionen dreier Veränderlicher von Herrn Schottky ††) gebrauchten *Sigmafunctionen*.

Unter gleichzeitiger und durchgreifender Verwerthung der aufgezählten Vortheile nähert sich die darzustellende Theorie der Uebersichtlichkeit, ohne welche die Anwendung auf gewisse Gebiete der Geometrie einen befriedigenden Abschluss nicht erreichen kann.

Was die analytische Behandlung des Umkehrproblems nach den angegebenen Grundsätzen angeht, so lege ich die von Herrn Rosenhain †††) verfolgte Fragestellung zu Grunde, welche in vervollständigter Form so ausgesprochen werden kann: \*†) Die Verhältnisse der

\*) Das Gesetz dieser Gruppierung liegt in den Entwicklungen bei Cayley, A memoir on the single and double Thetafunctions (Philosophical transactions of the R. society vol. 171, S. 938 ff., 1879), ausgesprochen.

\*\*) In anderer Weise ist bei Cayley, a. zuletzt a. O., die Gruppierung zur Grundlage einer Bezeichnung („single-and-double-letter notation“) verwerthet.

\*\*\*) Ueber die Grundlagen der Weierstrass'schen Bezeichnung referirt Borchardt, Crelle's Journal Bd. 87, S. 169 (1878), ferner Königsberger, Crelle's Journal Bd. 64, S. 20 (1864).

†) Vgl. Prym, Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen, Wiener Denkschriften Bd. 24, S. 43 (1864).

Tabellen zur Vergleichung der verschiedenen Bezeichnungen findet man bei Cayley, a. zuletzt a. O., S. 935 und bei Forsyth, Memoir on the thetafunctions, particularly those of two variables, Philosophical Transactions of the R. society, vol. 173, S. 788 (1881).

††) Schottky, Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen von drei Variablen (Leipzig, 1880), SS. 36, 153.

†††) Rosenhain, Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, Mémoires présentés par divers savants, Paris, 1846.

\*†) Die Formulirung entspricht der von Borchardt ausgearbeiteten Jacobi'schen Theorie der elliptischen Functionen, Jacobi's Ges. W., hrsg. von Borchardt und Weierstrass, B. I, S. 497.

16 Thetafunctionen von 2 Variablen  $v_1, v_2$  und 3 Parametern  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  sind als algebraische Functionen zweier unabhängig veränderlicher Stellen  $z_1, s_1$  und  $z_2, s_2$  eines algebraischen Gebildes von der Form  $s^2 = (a_0 - z)(a_1 - z)(a_2 - z)(a_3 - z)(a_4 - z)(a_5 - z)$  darzustellen, und das hiermit in impliciter Form gegebene Functionsverhältniss einerseits nach  $v_1, v_2$ , andererseits nach  $z_1, s_1$  und  $z_2, s_2$  aufzulösen. Ferner sind die Nullwerthe der 10 geraden Thetafunctionen und die Nullwerthe der partiellen Differentialquotienten der 6 ungeraden, endlich auch die 3 Parameter  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  der Thetafunction durch die 6 Verzweigungspunkte  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  des hyperelliptischen Gebildes auszudrücken. Hieran hat sich noch der Nachweis zu schliessen, dass das letztere ein allgemeines hyperelliptisches Gebilde 1. Ordnung ist.\*)

Die Behandlung dieser Aufgabe kann in 2 Theile gespalten werden, von denen der eine die Theorie der Thetarelationen als einzige Voraussetzung hat, der andere aber auf die Theorie der Periodicitätsmoduln der als hyperelliptische Integrale gedachten Argumente der Thetafunction sich stützt. Die schärfere Charakterisirung der beiden Theile kann erst nach Einführung einer Reihe von Bezeichnungen gegeben werden und ist in den §§ 6 und 17 nachgeholt, wo zugleich der Gedankengang der vorliegenden Arbeit im Einzelnen erläutert ist.

Von den beiden Theilen ist in der Arbeit nur der erste behandelt, der in der Ueberschrift kurz als Parameterdarstellung der Verhältnisse der Thetafunctionen bezeichnet ist, während der zweite einer andern Gelegenheit aufgespart bleibt.

## Kapitel I.

### Parameterdarstellung der Verhältnisse der geraden Thetafunctionen und der partiellen Differentialquotienten der ungeraden Thetafunctionen für verschwindende Argumente.

#### § 1.

##### Definition und Bezeichnung der Thetafunctionen.

Die Thetafunction zweier Veränderlicher wird definirt durch die Gleichung:

$$(1) \quad \vartheta \left( \begin{smallmatrix} e_1 & e_2 \\ e_1' & e_2' \end{smallmatrix} \right) (v_1, v_2) \\ = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} e^{a_{11} \left(n_1 + \frac{e_1}{2}\right)^2 + 2a_{12} \left(n_1 + \frac{e_1}{2}\right) \left(n_2 + \frac{e_2}{2}\right) + a_{22} \left(n_2 + \frac{e_2}{2}\right)^2 + 2 \left(n_1 + \frac{e_1}{2}\right) \left(v_1 + \frac{e_1' \pi i}{2}\right) + 2 \left(n_2 + \frac{e_2}{2}\right) \left(v_2 + \frac{e_2'}{2}\right)}$$

\*) Vgl. die Anmerkung von Weierstrass in der eben erwähnten Jacobi'schen Theorie, a. a. O. S. 545.

Hierin sind mit  $v_1, v_2$  die beiden Argumente der Function, mit  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  aber gegebene Constanten bezeichnet, welche der zur Convergenz der Doppelsumme (1) erforderlichen Bedingung entsprechen, dass der reelle Theil der quadratischen Form:

$$a_{11} n_1^2 + 2a_{12} n_1 n_2 + a_{22} n_2^2$$

für alle positiven und negativen ganzen Zahlen  $n_1$  und  $n_2$  negativ sei. Von den 4 Buchstaben  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1', \varepsilon_2'$  soll jeder entweder der Zahl 0 oder der Zahl 1 gleich sein, sodass der Complex der 4 Buchstaben, die Charakteristik der Thetafunction, 16 verschiedene Bedeutungen erhält.

Die Definitionsgleichung (1) umfasst daher 16 verschiedene Functionen der Variablen  $v_1, v_2$ . Diese 16 Functionen sollen im Folgenden, statt durch die 4 Indices, welche ihre Charakteristik ausmachen, in einfacherer Weise unterschieden werden. Eine von ihnen soll *keinen* Index, die 15 übrigen aber je ein *Indicespaar* bekommen; und zwar soll jedes Indicespaar aus zwei verschiedenen der 6 Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 bestehen. Im einzelnen sei die Bezeichnung durch folgende Tabelle festgesetzt:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \vartheta \left( \begin{smallmatrix} 00 \\ 00 \end{smallmatrix} \right) (v_1, v_2) = \vartheta (v_1, v_2) \\ \vartheta \left( \begin{smallmatrix} 11 \\ 01 \end{smallmatrix} \right) (v_1, v_2) = \vartheta_{24} (v_1, v_2) \quad \vartheta \left( \begin{smallmatrix} 01 \\ 01 \end{smallmatrix} \right) (v_1, v_2) = \vartheta_{35} (v_1, v_2) \\ \vartheta \left( \begin{smallmatrix} 01 \\ 11 \end{smallmatrix} \right) (v_1, v_2) = \vartheta_{40} (v_1, v_2) \quad \vartheta \left( \begin{smallmatrix} 10 \\ 11 \end{smallmatrix} \right) (v_1, v_2) = \vartheta_{51} (v_1, v_2) \\ \vartheta \left( \begin{smallmatrix} 10 \\ 10 \end{smallmatrix} \right) (v_1, v_2) = \vartheta_{02} (v_1, v_2) \quad \vartheta \left( \begin{smallmatrix} 11 \\ 10 \end{smallmatrix} \right) (v_1, v_2) = \vartheta_{13} (v_1, v_2) \\ \vartheta \left( \begin{smallmatrix} 10 \\ 00 \end{smallmatrix} \right) (v_1, v_2) = \vartheta_{01} (v_1, v_2) \quad \vartheta \left( \begin{smallmatrix} 01 \\ 10 \end{smallmatrix} \right) (v_1, v_2) = \vartheta_{03} (v_1, v_2) \\ \vartheta \left( \begin{smallmatrix} 00 \\ 10 \end{smallmatrix} \right) (v_1, v_2) = \vartheta_{21} (v_1, v_2) \quad \vartheta \left( \begin{smallmatrix} 11 \\ 00 \end{smallmatrix} \right) (v_1, v_2) = \vartheta_{23} (v_1, v_2) \\ \vartheta \left( \begin{smallmatrix} 11 \\ 11 \end{smallmatrix} \right) (v_1, v_2) = \vartheta_{41} (v_1, v_2) \quad \vartheta \left( \begin{smallmatrix} 00 \\ 01 \end{smallmatrix} \right) (v_1, v_2) = \vartheta_{43} (v_1, v_2) \\ \vartheta \left( \begin{smallmatrix} 00 \\ 11 \end{smallmatrix} \right) (v_1, v_2) = \vartheta_{05} (v_1, v_2) \\ \vartheta \left( \begin{smallmatrix} 10 \\ 01 \end{smallmatrix} \right) (v_1, v_2) = \vartheta_{25} (v_1, v_2) \\ \vartheta \left( \begin{smallmatrix} 01 \\ 00 \end{smallmatrix} \right) (v_1, v_2) = \vartheta_{45} (v_1, v_2), \end{array} \right.$$

Die Stellung der beiden Indices eines Paares wird als gleichgültig auf-

gefasst, sodass z. B.  $\vartheta_{24}(v_1, v_2)$  und  $\vartheta_{42}(v_1, v_2)$  dieselbe Function bedeuten.

Die eingeführte Aenderung in der Bezeichnung mag vorerst als eine *Abkürzung* betrachtet werden; ihre Motivirung giebt § 10.

Gegenwärtig sei nur hervorgehoben, dass die mit 2 Indices bezeichnete Thetafunction *ungerade* ist, wenn die Summe der beiden Indices gerade, und dass sie *gerade* ist, wenn die Summe der beiden Indices ungerade ist oder die Indices fehlen.

## § 2.

### Parameterdarstellung der Nullwerthe der 10 geraden Thetafunctionen.

Zwischen den Werthen, welche die 10 geraden Thetafunctionen,  $\vartheta_{i\kappa}(v_1, v_2)$  mit ungeradem  $i + \kappa$ , für die Argumente  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = 0$  annehmen und welche kurz mit  $\vartheta_{i\kappa}$  bezeichnet werden sollen, bestehen eine Reihe von identischen Relationen. Unter Benutzung derselben kann man die 9 Verhältnisse der 10 Constanten  $\vartheta_{i\kappa}$  durch eine geringere Zahl von einander unabhängiger Parameter ausdrücken. Als solche Parameter werden hier sechs mit  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  (collectiv mit  $a_i$ ) zu bezeichnende Grössen benutzt. Dieselben sind durch die gegebenen Constanten  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  der Thetafunction nicht einzeln, sondern nur in der Weise bestimmt, dass 3 von einander unabhängige Doppelverhältnisse von je 4 der 6 Parameter gegebene Werthe erhalten.

Man denke sich dementsprechend etwa  $a_0, a_2, a_4$  beliebig angenommen und definire  $a_1, a_3, a_5$  durch die Gleichungen:

$$(3) \quad \frac{(a_2 - a_0)(a_4 - a_1)}{(a_4 - a_0)(a_2 - a_1)} = \frac{\vartheta_{43}^2 \vartheta_{45}^2}{\vartheta_{23}^2 \vartheta_{25}^2}, \quad - \frac{(a_2 - a_0)(a_4 - a_3)}{(a_4 - a_0)(a_2 - a_3)} = \frac{\vartheta_{45}^2 \vartheta_{41}^2}{\vartheta_{25}^2 \vartheta_{21}^2},$$

$$\frac{(a_2 - a_0)(a_4 - a_5)}{(a_4 - a_0)(a_2 - a_5)} = \frac{\vartheta_{41}^2 \vartheta_{43}^2}{\vartheta_{21}^2 \vartheta_{23}^2} *).$$

Nimmt man hierzu die 6 identischen Gleichungen:

\*) Das negative Zeichen in der 2. Gleichung ist deshalb gewählt, damit die Formeln unmittelbar auf den Fall passen, wo die  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  sowohl wie die  $a_i$  reell sind und  $a_5 > a_4 > a_3 > a_2 > a_1 > a_0$  ist. Es liegt sonach in dem Ansatz (3) eine gewisse Beschränkung der Allgemeinheit, die für die nachherigen Formeln (5) in der Bevorzugung der natürlichen Reihenfolge der Indices 0, 1, 2, 3, 4, 5 ihren Ausdruck findet; die Differenzenproducte unter den Wurzelzeichen sind nämlich derart, dass sie alle positiv werden, sobald die  $a_i$  reell und der erwähnten Ungleichung entsprechend sind. Wollte man diese Beschränkung beseitigen und die volle Gleichberechtigung der 6 Parameter hervortreten lassen, so dürfte man nur die achten Potenzen der  $\vartheta_{i\kappa}$  in ihren Verhältnissen angeben.

$$(4) \begin{cases} \vartheta_{03}^2 \vartheta_{05}^2 + \vartheta_{23}^2 \vartheta_{25}^2 - \vartheta_{43}^2 \vartheta_{45}^2 = 0, & \vartheta^2 \vartheta_{01}^2 - \vartheta_{25}^2 \vartheta_{43}^2 - \vartheta_{23}^2 \vartheta_{45}^2 = 0, \\ \vartheta_{05}^2 \vartheta_{01}^2 - \vartheta_{25}^2 \vartheta_{21}^2 - \vartheta_{45}^2 \vartheta_{41}^2 = 0, & \vartheta^2 \vartheta_{03}^2 - \vartheta_{21}^2 \vartheta_{45}^2 + \vartheta_{25}^2 \vartheta_{41}^2 = 0, \\ \vartheta_{01}^2 \vartheta_{03}^2 - \vartheta_{21}^2 \vartheta_{23}^2 + \vartheta_{41}^2 \vartheta_{43}^2 = 0, & \vartheta^2 \vartheta_{05}^2 - \vartheta_{23}^2 \vartheta_{41}^2 - \vartheta_{21}^2 \vartheta_{43}^2 = 0^*), \end{cases}$$

so bestimmen sich aus den 9 Gleichungen (3) und (4) eindeutig die 9 Verhältnisse der Biquadrate der 10 Constanten  $\vartheta_{ix}$  in ihrer Abhängigkeit von den 6 Parametern  $a_i$ .

Indem man aus den gefundenen Ausdrücken die 4. Wurzeln auszieht und einen Proportionalitätsfactor  $\alpha$  einführt, stellt sich das Resultat folgendermaassen dar:

$$(5) \begin{cases} \vartheta = \alpha \sqrt[4]{(a_2 - a_4)(a_4 - a_0)(a_0 - a_2) \cdot (a_3 - a_5)(a_5 - a_1)(a_1 - a_3)} \\ \vartheta_{01} = \alpha \sqrt[4]{(a_2 - a_4)(a_4 - a_1)(a_1 - a_2) \cdot (a_3 - a_5)(a_5 - a_0)(a_0 - a_3)} \\ \vartheta_{03} = \alpha \sqrt[4]{(a_3 - a_1)(a_4 - a_2)(a_2 - a_3) \cdot (a_1 - a_5)(a_5 - a_0)(a_0 - a_1)} \\ \vartheta_{05} = \alpha \sqrt[4]{(a_4 - a_5)(a_5 - a_2)(a_2 - a_4) \cdot (a_1 - a_3)(a_3 - a_0)(a_0 - a_1)} \\ \vartheta_{21} = \alpha \sqrt[4]{(a_1 - a_4)(a_4 - a_0)(a_0 - a_1) \cdot (a_3 - a_5)(a_5 - a_2)(a_2 - a_3)} \\ \vartheta_{23} = \alpha \sqrt[4]{(a_3 - a_4)(a_4 - a_0)(a_0 - a_3) \cdot (a_2 - a_5)(a_5 - a_1)(a_1 - a_2)} \\ \vartheta_{25} = \alpha \sqrt[4]{(a_4 - a_5)(a_5 - a_0)(a_0 - a_4) \cdot (a_2 - a_3)(a_3 - a_1)(a_1 - a_2)} \\ \vartheta_{41} = \alpha \sqrt[4]{(a_1 - a_2)(a_2 - a_0)(a_0 - a_1) \cdot (a_4 - a_5)(a_5 - a_3)(a_3 - a_4)} \\ \vartheta_{43} = \alpha \sqrt[4]{(a_2 - a_3)(a_3 - a_0)(a_0 - a_2) \cdot (a_4 - a_5)(a_5 - a_1)(a_1 - a_4)} \\ \vartheta_{45} = \alpha \sqrt[4]{(a_2 - a_5)(a_5 - a_0)(a_0 - a_2) \cdot (a_3 - a_4)(a_4 - a_1)(a_1 - a_3)}.^{**}) \end{cases}$$

Ueber die Bedeutung der Quadrate der 4. Wurzeln lassen sich aus den Relationen (3) und (4), in welche die Quadrate der Constanten  $\vartheta_{ix}$  eingehen, noch einige Schlüsse ziehen, während die Bedeutung der 4. Wurzeln selbst aus den zwischen den Constanten  $\vartheta_{ix}$  bestehenden Relationen allein nicht vollständig ermittelt werden kann. Da aber die linken Seiten der Gleichungen (5) ihrer Definition nach als eindeutig

\*) Die Formeln giebt in anderer Bezeichnungsweise unter anderen Weber, Anwendung der Thetafunctionen zweier Veränderlicher auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit, Math. Ann. Bd. XIV, S. 182 (1878), ferner: Krazzer, Theorie der zweifach unendlichen Thetaeihen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel (Leipzig, 1882), S. 41. 42.

\*\*) Diese Form der Parameterdarstellung der Nullwerthe der geraden Thetafunctionen, findet sich bei Cayley, A memoir on the single and double Thetafunctions, Philos. Transact. of the R. society vol. 171, S. 940; die erste der 10 Formeln früher schon bei Thomae, Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Functionen gebraucht werden (Halle, 1876), S. 11.

bestimmte Constanten zu betrachten sind, so werden die Verhältnisse der 4. Wurzeln in gleichem Sinne aufzufassen sein.)\*

Um in Rücksicht hierauf mit denselben rechnen zu können, ist es zweckmässig, die 15 vierten Wurzeln  $\sqrt[4]{a_i - a_k}$ , wo  $i$  und  $\kappa$  zwei Zahlen aus der Reihe 0, 1, 2, 3, 4, 5 sind und  $i > \kappa$ , als selbständige Grössen einzuführen. Dabei soll das Symbol  $\sqrt[4]{a_i - a_k}$  immer einen bestimmten und ein für allemal denselben der 4 Werthe der 4. Wurzel aus  $a_i - a_k$  bedeuten. Unter der 4. Wurzel:

$$\sqrt[4]{(a_i - a_k)(a_{i'} - a_{k'}) \dots},$$

wo  $i > \kappa$ ,  $i' > \kappa'$ , ..., soll alsdann immer das Product:

$$\sqrt[4]{a_i - a_\kappa} \sqrt[4]{a_{i'} - a_{\kappa'}} \dots$$

und in diesem die einzelnen Factoren in dem festgesetzten Sinne verstanden sein. Um diese Auffassung auf die Formeln (5) anzuwenden, hat man vorerst das Differenzenproduct unter den einzelnen Wurzeln in (5) so zu schreiben, dass in jeder Differenz der Index des Minuenden grösser ist als der des Subtrahenden; was bei allen 10 Formeln (5) geschehen kann, ohne dass sich ein Minuszeichen unter der Wurzel einstellt; so ist z. B.:

$$\vartheta = a \sqrt[4]{(a_4 - a_2)(a_4 - a_0)(a_2 - a_0)(a_5 - a_3)(a_5 - a_1)(a_3 - a_1)}.$$

Die hierbei vorausgesetzte Festlegung der Werthe der 15 Wurzeln  $\sqrt[4]{a_i - a_\kappa}$ ,  $i > \kappa$ , ist nun nicht vollkommen willkürlich. Vielmehr hat man sich dieselben so ausgeführt zu denken, dass die Verhältnisse der 10 in (5) enthaltenen Wurzeln den Verhältnissen der durch die  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  eindeutig bestimmten Constanten  $\vartheta_{i\kappa}$  gleich werden.

### § 3.

#### Lineare Transformation der Argumente der Thetafunctionen.

Nachdem die Verhältnisse der Nullwerthe der geraden Thetafunctionen ihre algebraische Parameterdarstellung gefunden haben würde sich die Aufgabe anschliessen, die Nullwerthe der 12 partieller Differentialquotienten der 6 ungeraden Thetafunctionen in ähnlicher Weise auszudrücken. Dieselben seien zur Abkürzung mit  $\vartheta'_{i\kappa}^{(1)}$ ,  $\vartheta'_{i\kappa}^{(2)}$  ( $i + \kappa$  gerade) bezeichnet in dem Sinne, dass:

$$\vartheta'_{i\kappa}^{(1)} = \left[ \frac{\partial \vartheta_{i\kappa}(v_1, v_2)}{\partial v_1} \right]_{v_1=0, v_2=0} \quad \vartheta'_{i\kappa}^{(2)} = \left[ \frac{\partial \vartheta_{i\kappa}(v_1, v_2)}{\partial v_2} \right]_{v_1=0, v_2=0}$$

\*) Bei reellen  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  sind  $\vartheta$ ,  $\vartheta_{01}$ ,  $\vartheta_{23}$ ,  $\vartheta_{45}$  immer positiv; dagegen kann  $\vartheta_{14}$  in diesem Falle positiv oder negativ sein, weil

$$\vartheta_{14}(a_{11}, -a_{12}, a_{22}) = -\vartheta_{14}(a_{11}, a_{12}, a_{22})$$

ist, die Convergenzbedingung der Thetareihe aber durch die Umkehr des Vorzeichens von  $a_{12}$  nicht alterirt wird.

Es würde sich indessen ergeben, dass die Verhältnisse der  $\vartheta'_{i\kappa}^{(1)}$ ,  $\vartheta'_{i\kappa}^{(2)}$  nicht rein algebraisch von den Parametern  $a_i$  abhängen. Um trotzdem partielle Differentialquotienten zu gewinnen, deren Nullwerthe in ihren Verhältnissen algebraische Functionen der  $a_i$  sind, muss man die Thetafunction nicht nach den ursprünglichen Argumenten  $v_1, v_2$  differenziren, sondern statt dieser Argumente durch eine lineare Transformation neue Argumente einführen. Die letzteren seien mit  $u_1, u_2$  benannt und mit  $v_1, v_2$  durch die Relationen verknüpft:

$$(6) \quad \begin{cases} v_1 = \alpha_{11} u_1 + \alpha_{12} u_2, \\ v_2 = \alpha_{21} u_1 + \alpha_{22} u_2, \end{cases}$$

in denen  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$  (collectiv mit  $\alpha_{\mu\nu}$  bezeichnet) vorläufig disponibel bleibende Constanten von nicht verschwindender Determinante bedeuten.

Man kann hiernach die Thetafunctionen als Functionen von  $u_1, u_2$  betrachten und mag allgemein

$$(7) \quad \vartheta_{i\kappa}(v_1, v_2) = \Theta_{i\kappa}(u_1, u_2)$$

setzen.

Es ist dann für die 10 geraden Thetafunctionen (so oft  $i + \kappa$  ungerade ist):

$$(8) \quad \vartheta_{i\kappa} = \vartheta_{i\kappa}(0, 0) = \Theta_{i\kappa}(0, 0) = \Theta_{i\kappa}.$$

Dagegen wird für die 6 ungeraden Thetafunctionen (so oft  $i + \kappa$  gerade ist), wenn man:

$$\left[ \frac{\partial \Theta_{i\kappa}(u_1, u_2)}{\partial u_1} \right]_{u_1=0, u_2=0} = \Theta'_{i\kappa}^{(1)}, \quad \left[ \frac{\partial \Theta_{i\kappa}(u_1, u_2)}{\partial u_2} \right]_{u_1=0, u_2=0} = \Theta'_{i\kappa}^{(2)}$$

setzt:

$$(9) \quad \begin{cases} \Theta'_{i\kappa}^{(1)} = \alpha_{11} \vartheta'_{i\kappa}^{(1)} + \alpha_{21} \vartheta'_{i\kappa}^{(2)}, \\ \Theta'_{i\kappa}^{(2)} = \alpha_{12} \vartheta'_{i\kappa}^{(1)} + \alpha_{22} \vartheta'_{i\kappa}^{(2)}. \end{cases}$$

#### § 4.

Parameterdarstellung der Nullwerthe der partiellen Differentialquotienten der 6 ungeraden Thetafunctionen.

Die Thetafunction enthält, insofern sie als von  $u_1, u_2$  abhängig betrachtet wird, 4 disponible Constanten  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ . Ueber diese soll so verfügt werden, dass 4 von den 12 Grössen  $\Theta'_{i\kappa}^{(1)}, \Theta'_{i\kappa}^{(2)}$  ihren Verhältnissen nach gegebenen algebraischen Ausdrücken in den  $a_i$  gleich werden.

Um diese Verfügung zu treffen, führe man vorerst die 6 Constanten ein:



$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta_{24} = \alpha \sqrt[4]{(a_2 - a_4) \cdot (a_3 - a_5) (a_5 - a_1) (a_1 - a_3)} \cdot M_{24}, \\ \eta_{40} = \alpha \sqrt[4]{(a_4 - a_0) \cdot (a_3 - a_5) (a_5 - a_1) (a_1 - a_3)} \cdot M_{40}, \\ \eta_{02} = \alpha \sqrt[4]{(a_0 - a_2) \cdot (a_3 - a_5) (a_5 - a_1) (a_1 - a_3)} \cdot M_{02}, \\ \eta_{35} = \alpha \sqrt[4]{(a_3 - a_5) \cdot (a_2 - a_4) (a_4 - a_0) (a_0 - a_2)} \cdot M_{35}, \\ \eta_{51} = \alpha \sqrt[4]{(a_5 - a_1) \cdot (a_2 - a_4) (a_4 - a_0) (a_0 - a_2)} \cdot M_{51}, \\ \eta_{13} = \alpha \sqrt[4]{(a_1 - a_3) \cdot (a_2 - a_4) (a_4 - a_0) (a_0 - a_2)} \cdot M_{13}, \end{array} \right.$$

wo die  $M_{ix}$  folgende Producte bedeuten:

$$\begin{aligned} M_{24} &= (a_2 - a_1) (a_2 - a_3) (a_2 - a_5) \cdot (a_4 - a_1) (a_4 - a_3) (a_4 - a_5), \\ M_{40} &= (a_4 - a_1) (a_4 - a_3) (a_4 - a_5) \cdot (a_0 - a_1) (a_0 - a_3) (a_0 - a_5), \\ M_{02} &= (a_0 - a_1) (a_0 - a_3) (a_0 - a_5) \cdot (a_2 - a_1) (a_2 - a_3) (a_2 - a_5), \\ M_{35} &= (a_3 - a_0) (a_3 - a_2) (a_3 - a_4) \cdot (a_5 - a_0) (a_5 - a_2) (a_5 - a_4), \\ M_{51} &= (a_5 - a_0) (a_5 - a_2) (a_5 - a_4) \cdot (a_1 - a_0) (a_1 - a_2) (a_1 - a_4), \\ M_{13} &= (a_1 - a_0) (a_1 - a_2) (a_1 - a_4) \cdot (a_3 - a_0) (a_3 - a_2) (a_3 - a_4). \end{aligned}$$

Die Verhältnisse dieser 6 Constanten  $\eta_{ix}$  sind der Definition nach von denselben 6 Parametern  $a_i$  abhängig, wie die der Nullwerthe der 10 geraden Thetafunctionen; auch soll bezüglich der Bedeutung der 4. Wurzeln in (10) das zu den Formeln (5) Bemerkte gelten. Endlich soll der in den Definitionsgleichungen (10) vorkommende Factor  $\alpha$  der nämliche sein, wie in den Gleichungen (5); man kann sich denselben *vorläufig* als durch die Gleichung:

$$\alpha = \sqrt[4]{(a_2 - a_4) (a_4 - a_0) (a_0 - a_2) \cdot (a_3 - a_5) (a_5 - a_1) (a_1 - a_3)}$$

bestimmt vorstellen. Das *Bildungsgesetz* der 6 Ausdrücke (10) ist dies, dass jedes der 6 Differenzenproducte unter den 4. Wurzeln 10 von den 15 Differenzen  $a_i - a_x$  enthält und in den einzelnen Differenzenproducten beziehungsweise die Parameter  $a_0, a_2, a_4, a_1, a_3, a_5$  *fehlen*.\*)

Nach Einführung der Grössen  $\eta_{ix}$  ( $i + x$  gerade) sollen die 4 Coefficienten der linearen Substitution (6) so bestimmt werden, dass unter Annahme zweier beliebiger Constanten  $g_1$  und  $g_2$ :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Theta'_{51}^{(1)} = \frac{a_3 - g_2}{g_2 - g_1} \eta_{51}, & \Theta'_{13}^{(1)} = \frac{a_5 - g_2}{g_2 - g_1} \eta_{13}, \\ \Theta'_{51}^{(2)} = \frac{a_3 - g_1}{g_1 - g_2} \eta_{51}, & \Theta'_{13}^{(2)} = \frac{a_5 - g_1}{g_1 - g_2} \eta_{13}. \end{array} \right.$$

Sobald man diese Werthe von 4 der 12 Constanten  $\Theta'_{ix}^{(1)}$ ,  $\Theta'_{ix}^{(2)}$  annimmt,

\*) Vgl. Thomae, Sammlung von Formeln etc. S. 13.

sind die 8 übrigen bereits mit bestimmt. Es gelten nämlich für die  $\vartheta_{i\pi}$ ,  $\vartheta'_{i\pi}^{(1)}$ ,  $\vartheta'_{i\pi}^{(2)}$ , einerseits und die  $\Theta_{i\pi}$ ,  $\Theta'_{i\pi}^{(1)}$ ,  $\Theta'_{i\pi}^{(2)}$  andererseits die Relationen\*) ( $m = 1, 2$ ):

$$(12) \quad \begin{cases} \vartheta_{01} \vartheta_{21} \vartheta_{41} \vartheta'_{35}^{(m)} = \vartheta_{03} \vartheta_{23} \vartheta_{43} \vartheta'_{51}^{(m)} - \vartheta_{05} \vartheta_{25} \vartheta_{45} \vartheta'_{13}^{(m)}, \\ \vartheta_{01} \vartheta_{21} \vartheta_{41} \vartheta'_{24}^{(m)} = \vartheta_{03} \vartheta_{25} \vartheta_{45} \vartheta'_{51}^{(m)} - \vartheta_{05} \vartheta_{23} \vartheta_{43} \vartheta'_{13}^{(m)}, \\ \vartheta_{01} \vartheta_{41} \vartheta_{01} \vartheta'_{40}^{(m)} = \vartheta_{23} \vartheta_{45} \vartheta_{05} \vartheta'_{51}^{(m)} - \vartheta_{25} \vartheta_{43} \vartheta_{03} \vartheta'_{13}^{(m)}, \\ \vartheta_{01} \vartheta_{21} \vartheta_{02} \vartheta'_{02}^{(m)} = \vartheta_{43} \vartheta_{05} \vartheta_{25} \vartheta'_{51}^{(m)} + \vartheta_{45} \vartheta_{03} \vartheta_{23} \vartheta'_{13}^{(m)}, \end{cases}$$

und ebenso:

$$(13) \quad \begin{cases} \Theta_{01} \Theta_{21} \Theta_{41} \Theta'_{35}^{(m)} = \Theta_{03} \Theta_{23} \Theta_{43} \Theta'_{51}^{(m)} - \Theta_{05} \Theta_{25} \Theta_{45} \Theta'_{13}^{(m)}, \\ \Theta_{01} \Theta_{21} \Theta_{41} \Theta'_{24}^{(m)} = \Theta_{03} \Theta_{25} \Theta_{45} \Theta'_{51}^{(m)} - \Theta_{05} \Theta_{23} \Theta_{43} \Theta'_{13}^{(m)}, \\ \Theta_{01} \Theta_{41} \Theta_{01} \Theta'_{40}^{(m)} = \Theta_{23} \Theta_{45} \Theta_{05} \Theta'_{51}^{(m)} - \Theta_{25} \Theta_{43} \Theta_{03} \Theta'_{13}^{(m)}, \\ \Theta_{01} \Theta_{21} \Theta_{02} \Theta'_{02}^{(m)} = \Theta_{43} \Theta_{05} \Theta_{25} \Theta'_{51}^{(m)} + \Theta_{45} \Theta_{03} \Theta_{23} \Theta'_{13}^{(m)}. \end{cases}$$

Aus den Formeln (13) ergeben sich, unter Zugrundelegung der Werthe (11) und unter Benutzung der Darstellung (5) der  $\Theta_{i\pi} = \vartheta_{i\pi}$ , die 8 noch übrigen  $\Theta'_{i\pi}^{(m)}$ . Man erhält durch Ausführung der Rechnung:

$$(14) \quad \begin{cases} \Theta'_{24}^{(1)} = \frac{a_0 - g_2}{g_2 - g_1} \eta_{24}, & \Theta'_{40}^{(1)} = \frac{a_2 - g_2}{g_2 - g_1} \eta_{40}, & \Theta'_{02}^{(1)} = \frac{a_4 - g_2}{g_2 - g_1} \eta_{02}, \\ \Theta'_{24}^{(2)} = \frac{a_0 - g_1}{g_1 - g_2} \eta_{24}, & \Theta'_{40}^{(2)} = \frac{a_2 - g_1}{g_1 - g_2} \eta_{40}, & \Theta'_{02}^{(2)} = \frac{a_4 - g_1}{g_1 - g_2} \eta_{02}, \\ \Theta'_{35}^{(1)} = \frac{a_1 - g_2}{g_2 - g_1} \eta_{35}, & \Theta'_{51}^{(1)} = \frac{a_3 - g_2}{g_2 - g_1} \eta_{51}, & \Theta'_{13}^{(1)} = \frac{a_5 - g_2}{g_2 - g_1} \eta_{13}, \\ \Theta'_{35}^{(2)} = \frac{a_1 - g_1}{g_1 - g_2} \eta_{35}, & \Theta'_{51}^{(2)} = \frac{a_3 - g_1}{g_1 - g_2} \eta_{51}, & \Theta'_{13}^{(2)} = \frac{a_5 - g_1}{g_1 - g_2} \eta_{13}. \end{cases}$$

Hiermit sind aber die Verhältnisse der Nullwerthe der 12 partiellen Differentialquotienten der 6 ungeraden Functionen  $\Theta_{i\pi}(u_1, u_2)$  algebraisch durch die 6 Parameter  $a_i$  dargestellt. Dabei ist die Constante  $\eta_{i\pi}$  der gemeinsame Factor von  $\Theta'_{i\pi}^{(1)}$  und  $\Theta'_{i\pi}^{(2)}$  und unterscheiden die beiden Constanten  $g_1$  und  $g_2$  die nicht gemeinsamen Factoren von  $\Theta'_{i\pi}^{(1)}$  und  $\Theta'_{i\pi}^{(2)}$ .

Zufolge der Voraussetzung über den in die Definition (10) der  $\eta_{i\pi}$

\*) Dieselben ergeben sich, indem man die zwischen den Thetafunctionen bestehenden Productrelationen (vgl. Krazer, a. a. O. S. 39) einmal mit den Argumenten  $v_1, v_2$  und einmal mit den Argumenten  $u_1, u_2$  schreibt, dieselben nach  $v_1$  und  $v_2$  und beziehungsweise nach  $u_1$  und  $u_2$  partiell differentiirt und hierauf die Argumente  $v_1, v_2$  und  $u_1, u_2$  verschwinden lässt.

eingehenden Factor  $\alpha$ , kann man das erhaltene Resultat weiter dahin ausdehnen:

Durch die Formeln (5) und (14) ist das Verhältniss von irgend 2 der 22 Grössen  $\Theta_{i\kappa} (= \vartheta_{i\kappa})$  ( $i + \kappa$  ungerade),  $\Theta'_{i\kappa}^{(1)}$ ,  $\Theta'_{i\kappa}^{(2)}$  ( $i + \kappa$  gerade) rein algebraisch durch die 6 Parameter  $a_i$  dargestellt.\*)

Dabei sind allerdings in den Functionen  $\Theta_{i\kappa}(u_1, u_2)$  4 Constanten  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$  enthalten, welche die ursprüngliche Thetafunction  $\vartheta_{i\kappa}(v_1, v_2)$  nicht aufwies. Dieselben sind mit Rücksicht auf die Gleichungen (9) und (11), also durch die Gleichungen zu bestimmen:

$$(15) \quad \begin{cases} \alpha_{11} \vartheta'_{51}^{(1)} + \alpha_{21} \vartheta'_{51}^{(2)} = \frac{a_3 - g_2}{g_2 - g_1} \eta_{51}, & \alpha_{11} \vartheta'_{13}^{(1)} + \alpha_{21} \vartheta'_{13}^{(2)} = \frac{a_5 - g_2}{g_2 - g_1} \eta_{13}, \\ \alpha_{12} \vartheta'_{51}^{(1)} + \alpha_{22} \vartheta'_{51}^{(2)} = \frac{a_3 - g_1}{g_1 - g_2} \eta_{51}, & \alpha_{12} \vartheta'_{13}^{(1)} + \alpha_{22} \vartheta'_{13}^{(2)} = \frac{a_5 - g_1}{g_1 - g_2} \eta_{13}; \end{cases}$$

ihre Determinante wird dann im Allgemeinen nicht verschwinden.

Übersichtlicher kann man die Coefficienten  $\alpha_{\mu\nu}$  durch folgendes System von 12 Gleichungen definiren:

$$(16) \quad \begin{cases} \alpha_{11} \vartheta'_{24}^{(1)} + \alpha_{21} \vartheta'_{24}^{(2)} = \frac{a_0 - g_2}{g_2 - g_1} \eta_{24}, & \alpha_{12} \vartheta'_{24}^{(1)} + \alpha_{22} \vartheta'_{24}^{(2)} = \frac{a_0 - g_1}{g_1 - g_2} \eta_{24}, \\ \alpha_{11} \vartheta'_{40}^{(1)} + \alpha_{21} \vartheta'_{40}^{(2)} = \frac{a_2 - g_2}{g_2 - g_1} \eta_{40}, & \alpha_{12} \vartheta'_{40}^{(1)} + \alpha_{22} \vartheta'_{40}^{(2)} = \frac{a_2 - g_1}{g_1 - g_2} \eta_{40}, \\ \alpha_{11} \vartheta'_{02}^{(1)} + \alpha_{21} \vartheta'_{02}^{(2)} = \frac{a_4 - g_2}{g_2 - g_1} \eta_{02}, & \alpha_{12} \vartheta'_{02}^{(1)} + \alpha_{22} \vartheta'_{02}^{(2)} = \frac{a_4 - g_1}{g_1 - g_2} \eta_{02}, \\ \alpha_{11} \vartheta'_{35}^{(1)} + \alpha_{21} \vartheta'_{35}^{(2)} = \frac{a_1 - g_2}{g_2 - g_1} \eta_{35}, & \alpha_{12} \vartheta'_{35}^{(1)} + \alpha_{22} \vartheta'_{35}^{(2)} = \frac{a_1 - g_1}{g_1 - g_2} \eta_{35}, \\ \alpha_{11} \vartheta'_{51}^{(1)} + \alpha_{21} \vartheta'_{51}^{(2)} = \frac{a_3 - g_2}{g_2 - g_1} \eta_{51}, & \alpha_{12} \vartheta'_{51}^{(1)} + \alpha_{22} \vartheta'_{51}^{(2)} = \frac{a_3 - g_1}{g_1 - g_2} \eta_{51}, \\ \alpha_{11} \vartheta'_{13}^{(1)} + \alpha_{21} \vartheta'_{13}^{(2)} = \frac{a_5 - g_2}{g_2 - g_1} \eta_{13}, & \alpha_{12} \vartheta'_{13}^{(1)} + \alpha_{22} \vartheta'_{13}^{(2)} = \frac{a_5 - g_1}{g_1 - g_2} \eta_{13}. \end{cases}$$

Sobald nämlich die 4 letzten dieser Gleichungen — das sind die Gleichungen (15) — bestehen, folgen die 8 übrigen vermöge der Identitäten (12) von selbst.

## § 5.

Darstellung des Factors  $\alpha$  durch die Coefficienten  $\alpha_{\mu\nu}$ .

Um die Coefficienten  $\alpha_{\mu\nu}$  aus den Gleichungen (15) zu berechnen, würde man diese durch  $\vartheta$  dividiren und die Quotienten  $\frac{\eta_{51}}{\vartheta}$ ,  $\frac{\eta_{13}}{\vartheta}$  durch die  $a_i$  ausdrücken mittels der Formeln (5) und (10). Alsdann findet

\*) Vgl. Schottky, Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen dreier Variablen (Leipzig 1880), S. 153, Formeln (27)

man die  $\alpha_{\mu\nu}$  durch die Quotienten  $\frac{\vartheta_{51}'^{(1)}}{\vartheta}$ ,  $\frac{\vartheta_{51}'^{(2)}}{\vartheta}$ ,  $\frac{\vartheta_{13}'^{(1)}}{\vartheta}$ ,  $\frac{\vartheta_{13}'^{(2)}}{\vartheta}$  und die  $a_i$  dargestellt.

Diese nur zur Orientirung angedeutete Berechnung der  $\alpha_{\mu\nu}$  soll indessen nicht verfolgt, sondern die  $\alpha_{\mu\nu}$  zunächst als durch die Gleichungen (16) definirte Grössen weitergeführt werden.

Durch diese Coefficienten  $\alpha_{\mu\nu}$  stellt sich in einfacher Weise der Factor  $\alpha$  dar, welcher in den Gleichungen (5) und (10) auftritt.

Aus den Definitionsgleichungen (16) der  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{21}$ ,  $\alpha_{22}$  ergibt sich nämlich mit der Abkürzung

$$\begin{aligned} (17) \quad A &= \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12} \alpha_{21}, \\ A \vartheta_{51}'^{(1)} &= \frac{(a_3 - g_2) \alpha_{22} + (a_3 - g_1) \alpha_{21}}{g_2 - g_1} \eta_{51}, \\ A \vartheta_{51}'^{(2)} &= \frac{(a_3 - g_2) \alpha_{12} + (a_3 - g_1) \alpha_{11}}{g_1 - g_2} \eta_{51}, \\ A \vartheta_{13}'^{(1)} &= \frac{(a_5 - g_2) \alpha_{22} + (a_5 - g_1) \alpha_{21}}{g_2 - g_1} \eta_{13}, \\ A \vartheta_{13}'^{(2)} &= \frac{(a_5 - g_2) \alpha_{12} + (a_5 - g_1) \alpha_{11}}{g_1 - g_2} \eta_{13}. \end{aligned}$$

Hiermit erhält man:

$$A (\vartheta_{51}'^{(1)} \vartheta_{13}'^{(2)} - \vartheta_{51}'^{(2)} \vartheta_{13}'^{(1)}) = \frac{a_5 - a_3}{g_2 - g_1} \eta_{51} \eta_{13}.$$

Nun besteht aber die Relation\*):

$$(18) \quad \vartheta_{51}'^{(1)} \vartheta_{13}'^{(2)} - \vartheta_{51}'^{(2)} \vartheta_{13}'^{(1)} = \vartheta \vartheta_{10} \vartheta_{12} \vartheta_{14}$$

und ist mit Rücksicht auf (5) und (10):

$$\frac{\vartheta \vartheta_{10} \vartheta_{12} \vartheta_{14}}{(a_5 - a_3) \eta_{51} \eta_{13}} = \alpha^2.$$

Demnach ist:

$$(19) \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{A(g_2 - g_1)}}.$$

*Der in den Gleichungen (5) und (10) auftretende Factor  $\alpha$  ist also von der Determinante der Substitution (6) abhängig.*

---

\*) Vergl. über dieselbe Rosenhain, a. a. O. S. 433; Kossak, das Additionstheorem der ultraelliptischen Functionen 1. Ordnung (Berlin, 1871), S. 15. Thomae, Sammlung von Formeln etc. S. 17 (1876); Weber, Ueber die Kummer'sche Fläche 4. Ordnung mit 16 Knotenpunkten und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen mit 2 Veränderlichen, Crelle's Journal, Bd. 84, S. 338 (1877). Der Beweis der betreffenden Formeln ist nur am letztgenannten Orte angedeutet. Dagegen findet sich ein Beweis der entsprechenden Formeln für hyperelliptische Thetafunctionen von beliebig vielen Variablen bei Thomae, Beitrag zur Bestimmung von  $\vartheta(0, 0, \dots, 0)$  durch die Classenmoduln algebraischer Functionen. Crelle's J. Bd. 71, S. 201, Formel 14 (1869).

Die Abhängigkeit von  $g_1$  und  $g_2$  ist nur eine scheinbare, indem in  $A$   $g_1$  und  $g_2$  so vorkommen, dass  $A(g_2 - g_1)$  wieder von  $g_1$  und  $g_2$  frei wird.

## § 6.

### Resultate der bisherigen Paragraphen.

Indem in § 1 von der Definition der Thetafunction ausgegangen wurde, ist die Auffassung der Parameter  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  der Thetafunction als von vorn herein *gegebener* Grössen zu Grunde gelegt. Mit ihnen sind dann zufolge der Definition der Thetafunction auch die Nullwerthe  $\vartheta_{ix}$  der 10 geraden Thetafunctionen ( $i + x$  ungerade) und die Nullwerthe  $\vartheta'_{ix}^{(1)}, \vartheta'_{ix}^{(2)}$  der partiellen Differentialquotienten der 6 ungeraden Thetafunctionen ( $i + x$  gerade) als gegebene Constanten zu betrachten. Die Aufgabe, auf deren Lösung die §§ 2—5 ausgehen, besteht in der Darstellung der durch mannigfache Relationen miteinander verknüpften 22 Constanten  $\vartheta_{ix}, \vartheta'_{ix}^{(1)}, \vartheta'_{ix}^{(2)}$  durch die 6 unabhängigen Parameter  $a_i$ .

Was für die Lösung dieser Aufgabe in den §§ 2—5 geschehen ist, kann so charakterisirt werden: Es sind neben den 6 Parametern  $a_i$  4 Hilfsgrössen  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$  ( $\alpha_{\mu\nu}$ ) eingeführt worden, welche ihrer Definition (16) nach von den  $a_i$  und den Verhältnissen der  $\vartheta_{ix}, \vartheta'_{ix}^{(1)}, \vartheta'_{ix}^{(2)}$  (vgl. § 5 zu Anfang) abhängen. Alsdann ergeben sich die 22 Constanten durch die Grössen  $a_i$  und  $\alpha_{\mu\nu}$  dargestellt; es gelten nämlich die 10 Formeln:

$$(20) \quad \vartheta = \frac{1}{\sqrt{A(g_2 - g_1)}} \sqrt{(a_2 - a_4)(a_4 - a_0)(a_0 - a_2) \cdot (a_3 - a_5)(a_5 - a_1)(a_1 - a_3)}$$

u. s. w. (vgl. (5) und (10)) und ferner die 12 Formeln:

$$(21) \quad \vartheta'_{24}^{(1)} = \frac{(a_0 - g_2)\alpha_{22} + (a_0 - g_1)\alpha_{21}}{A(g_2 - g_1)\sqrt{A(g_2 - g_1)}} \sqrt{(a_2 - a_4) \cdot (a_3 - a_5)(a_5 - a_1)(a_1 - a_3)} \cdot M_{24},$$

wo wie früher:

$$M_{24} = (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_5) \cdot (a_4 - a_1)(a_4 - a_3)(a_4 - a_5)$$

u. s. w. (Auflösungen der Gleichungen (16) mit Rücksicht auf (10) und (19)), wobei  $A = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$ .

In diesen Formeln sind nun die 10 Grössen  $a_i$  und  $\alpha_{\mu\nu}$  nicht von einander unabhängig; vielmehr bleibt weiter die Aufgabe zu lösen, die 4 Coefficienten  $\alpha_{\mu\nu}$  durch die 6 Parameter  $a_i$  darzustellen, womit dann die eigentliche Aufgabe vollständig gelöst ist.

Die 4 Hilfsgrössen  $\alpha_{\mu\nu}$  haben aber noch eine weitere Bedeutung, insofern sie in die Definition der Functionen  $\Theta_{ix}(u_1, u_2)$  eingehen. Wie man sieht, sind die Formeln (20) und (21) von verschiedenem

Charakter; die Producte  $\sqrt{A(g_2 - g_1)} \cdot \vartheta_{ix}^*$  sind nämlich direct gleich algebraischen Functionen der Parameter  $a_i$ , während die Producte  $\sqrt{A(g_2 - g_1)} \cdot \vartheta_{ix}^{(m)*}$  noch von den Hilfsgrößen  $\alpha_{\mu\nu}$  abhängen. Um nun eine Thetafunction zu bilden, bei der dieses verschiedene Verhalten der Nullwerthe der geraden Thetafunctionen und der Nullwerthe der Differentialquotienten der ungeraden Thetafunctionen in Wegfall kommt, ist die Function:

$$\Theta_{ix}(u_1, u_2) = \vartheta_{ix}(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2, \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2)$$

(vgl. Formel (1)) definit werden. Unter Einführung dieser Thetafunction und geeigneter Verfügung über die Coefficienten  $\alpha_{\mu\nu}$  erhält man an Stelle von (20) und (21):

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{A(g_2 - g_1)} \cdot \Theta \\ = \sqrt{(a_2 - a_4)(a_4 - a_0)(a_0 - a_2) \cdot (a_3 - a_5)(a_5 - a_1)(a_1 - a_3)} \\ \text{und 9 weitere Formeln} \end{array} \right.$$

und:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{A(g_2 - g_1)} \cdot \Theta_{24}'^{(1)} \\ = \frac{a_0 - g_2}{g_2 - g_1} \sqrt{(a_2 - a_4) \cdot (a_3 - a_5)(a_5 - a_1)(a_1 - a_3)} \cdot M_{24}, \\ \sqrt{A(g_2 - g_1)} \cdot \Theta_{24}'^{(2)} \\ = \frac{a_0 - g_1}{g_1 - g_2} \sqrt{(a_2 - a_4) \cdot (a_3 - a_5)(a_5 - a_1)(a_1 - a_3)} \cdot M_{24} \\ \text{(wo wieder} \\ M_{24} = (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_5) \cdot (a_4 - a_1)(a_4 - a_3)(a_4 - a_5) \\ \text{gesetzt ist)} \\ \text{und 5 weitere Formelpaare.} \end{array} \right.$$

Die Thetafunctionen  $\Theta_{ix}(u_1, u_2)$  haben somit die Eigenschaft, dass die Verhältnisse der 22 Constanten  $\Theta_{ix}$ ,  $\Theta_{ix}'^{(1)}$ ,  $\Theta_{ix}'^{(2)}$  rein algebraisch von den 6 Parametern  $a_i$  abhängen.

\*) Die hier gegebene Darstellung des Factors  $\sqrt{A(g_2 - g_1)}$  gelangt, wenn die Determinante  $A$ , wie ich dies bei einer andern Gelegenheit zeigen werde, durch die Parameter  $a_i$  ausgedrückt wird, zur Uebereinstimmung mit den Darstellungen von Thomae, Beitrag zur Bestimmung von  $\vartheta(0, 0, \dots, 0)$  durch die Classenmoduln algebraischer Functionen, Crelle's J. Bd. 71, S. 201 (1869); Fuchs, Ueber die Form der Argumente der Thetafunctionen und über die Bestimmung von  $\vartheta(0, 0, \dots, 0)$  als Function der Classenmoduln, Crelle's J. Bd. 73, S. 305 (1871).

## Kapitel II.

 Parameterdarstellung der Verhältnisse der Theta- (Sigma)-  
functionen für veränderliche Argumente.

## § 7.

Ein System untereinander unabhängiger Relationen zwischen den  
16 Thetafunctionen.

Zwischen den 16 Thetafunctionen  $\Theta_{ik}(u_1, u_2)$  mit veränderlichen Argumenten bestehen zahlreiche Relationen, welchen sämtlich identisch-genügt werden kann, indem die Quotienten der 16 Thetafunctionen als algebraische Functionen zweier neuer Variabler  $z_1, z_2$  dargestellt werden. Die Möglichkeit einer solchen Darstellung beruht darauf, dass aus der Zahl der erwähnten Relationen auf mannigfache Weise 13 von einander unabhängige Relationen ausgewählt werden können. Solche 13 Relationen sind die folgenden, wobei zur Abkürzung  $\Theta_{ik}(u)$  für  $\Theta_{ik}(u_1, u_2)$  gesetzt ist:

$$\Theta^2 \Theta_{35}^2(u) = \Theta_{01}^2 \Theta_{24}^2(u) + \Theta_{21}^2 \Theta_{40}^2(u) - \Theta_{41}^2 \Theta_{02}^2(u),$$

$$\Theta^2 \Theta_{51}^2(u) = -\Theta_{03}^2 \Theta_{24}^2(u) + \Theta_{23}^2 \Theta_{40}^2(u) + \Theta_{43}^2 \Theta_{02}^2(u),$$

$$\Theta^2 \Theta_{13}^2(u) = \Theta_{05}^2 \Theta_{24}^2(u) - \Theta_{25}^2 \Theta_{40}^2(u) + \Theta_{45}^2 \Theta_{02}^2(u),$$

$$\Theta^2 \Theta_{01}^2(u) = \Theta_{01}^2 \Theta^2(u) - \Theta_{41}^2 \Theta_{40}^2(u) - \Theta_{21}^2 \Theta_{02}^2(u),$$

$$\Theta^2 \Theta_{03}^2(u) = \Theta_{03}^2 \Theta^2(u) - \Theta_{43}^2 \Theta_{40}^2(u) + \Theta_{23}^2 \Theta_{02}^2(u),$$

$$\Theta^2 \Theta_{05}^2(u) = \Theta_{05}^2 \Theta^2(u) + \Theta_{45}^2 \Theta_{40}^2(u) + \Theta_{25}^2 \Theta_{02}^2(u),$$

$$\Theta^2 \Theta_{21}^2(u) = \Theta_{21}^2 \Theta^2(u) + \Theta_{01}^2 \Theta_{02}^2(u) + \Theta_{41}^2 \Theta_{24}^2(u),$$

$$\Theta^2 \Theta_{23}^2(u) = \Theta_{23}^2 \Theta^2(u) - \Theta_{03}^2 \Theta_{02}^2(u) - \Theta_{43}^2 \Theta_{24}^2(u),$$

$$\Theta^2 \Theta_{25}^2(u) = \Theta_{25}^2 \Theta^2(u) - \Theta_{05}^2 \Theta_{02}^2(u) + \Theta_{45}^2 \Theta_{24}^2(u),$$

$$\Theta^2 \Theta_{41}^2(u) = \Theta_{41}^2 \Theta^2(u) - \Theta_{21}^2 \Theta_{24}^2(u) + \Theta_{01}^2 \Theta_{40}^2(u),$$

$$\Theta^2 \Theta_{43}^2(u) = \Theta_{43}^2 \Theta^2(u) + \Theta_{23}^2 \Theta_{24}^2(u) + \Theta_{03}^2 \Theta_{40}^2(u),$$

$$\Theta^2 \Theta_{45}^2(u) = \Theta_{45}^2 \Theta^2(u) - \Theta_{25}^2 \Theta_{24}^2(u) - \Theta_{05}^2 \Theta_{40}^2(u),$$

$$\Theta_{03} \Theta_{05} \Theta_{01}(u) \Theta_{24}(u) - \Theta_{23} \Theta_{25} \Theta_{21}(u) \Theta_{40}(u) + \Theta_{43} \Theta_{45} \Theta_{41}(u) \Theta_{02}(u) = 0.$$

Auf Grund eines solchen Systems von 13 Relationen hat Herr Krazer\*) die Rosenhain'schen Formeln in verallgemeinerter Form abgeleitet. Die Relationen nehmen aber eine für den vorliegenden

\*) Vgl. Krazer, a. a. O. S. 42 ff.

Zweck geeignetere Gestalt an, wenn man an Stelle der 16 Thetafunctionen 16 andere je um einen constanten Factor von jenen verschiedene Functionen einführt, was im folgenden Paragraphen geschehen soll.

### § 8.

#### Definition der Sigmafunctionen zweier Veränderlicher.

Neben jede der 16 Functionen  $\Theta_{i\kappa}(u_1, u_2)$  sei eine mit gleichen Indices behaftete Function  $\sigma_{i\kappa}(u_1, u_2)$  gestellt, und zwar sei\*):

für  $i + \kappa = \text{ungerade}$ :                      für  $i + \kappa = \text{gerade}$ :

$$(24) \quad \sigma_{i\kappa}(u_1, u_2) = \frac{\Theta_{i\kappa}(u_1, u_2)}{\Theta_{i\kappa}}, \quad \sigma_{i\kappa}(u_1, u_2) = - \frac{\Theta_{i\kappa}(u_1, u_2)}{\Theta'_{i\kappa}^{(1)} + \Theta'_{i\kappa}^{(2)}}.$$

Dabei ist zu beachten, dass nach (14):

$$(25) \quad -(\Theta'_{i\kappa}^{(1)} + \Theta'_{i\kappa}^{(2)}) = \eta_{i\kappa}$$

ist.

Die Nullwerthe der geraden Sigmafunctionen werden nach der Definition (24) gleich 1,

$$(26) \quad \sigma_{i\kappa} = 1 \quad (i + \kappa \text{ ungerade});$$

für die Nullwerthe der partiellen Differentialquotienten der ungeraden Sigmafunctionen hat man nach (14):

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \sigma'_{24}^{(1)} = \frac{a_0 - g_2}{g_2 - g_1}, & \sigma'_{40}^{(1)} = \frac{a_2 - g_2}{g_2 - g_1}, & \sigma'_{02}^{(1)} = \frac{a_4 - g_2}{g_2 - g_1}, \\ \sigma'_{24}^{(2)} = \frac{a_0 - g_1}{g_1 - g_2}, & \sigma'_{40}^{(2)} = \frac{a_2 - g_1}{g_1 - g_2}, & \sigma'_{02}^{(2)} = \frac{a_4 - g_1}{g_1 - g_2}, \\ \sigma'_{35}^{(1)} = \frac{a_1 - g_2}{g_2 - g_1}, & \sigma'_{51}^{(1)} = \frac{a_3 - g_2}{g_2 - g_1}, & \sigma'_{13}^{(1)} = \frac{a_5 - g_2}{g_2 - g_1}, \\ \sigma'_{35}^{(2)} = \frac{a_1 - g_1}{g_1 - g_2}, & \sigma'_{51}^{(2)} = \frac{a_3 - g_1}{g_1 - g_2}, & \sigma'_{13}^{(2)} = \frac{a_5 - g_1}{g_1 - g_2}. \end{array} \right.$$

Führt man die Functionen  $\sigma_{i\kappa}(u_1, u_2)$  unter Berücksichtigung der Werthe (5) und (10) der  $\Theta_{i\kappa}$  und  $\eta_{i\kappa}$  in die Thetarelationen des § 7 ein, so nehmen dieselben nach entsprechender Reduction die folgende Gestalt an, wobei  $\sigma_{i\kappa}(u)$  für  $\sigma_{i\kappa}(u_1, u_2)$  steht:

\*) Die Bezeichnung  $\sigma$  ist im Anschluss an Herrn Weierstrass gewählt (vgl. Schottky, a. a. O. S. 36 u. S. 153). Die hier eingeführten Sigmafunctionen unterscheiden sich von den bei Herrn Schottky benutzten wesentlich nur um einen Exponentialfactor von der Form  $e^{A_{11}u_1^2 + 2A_{12}u_1u_2 + A_{22}u_2^2}$ , der für alle 16 Functionen derselbe ist und dessen Hinzufügung für die Entwicklungen des Textes ohne Einfluss bleiben würde.



$$\begin{aligned}
 (27) \quad & \left\{ \begin{aligned} & - (a_2 - a_4)(a_4 - a_0)(a_0 - a_2) \sigma_{35}^2(u) \\ & = (a_2 - a_4)(a_2 - a_1)(a_4 - a_1) \sigma_{24}^2(u) + (a_4 - a_0)(a_4 - a_1)(a_0 - a_1) \sigma_{40}^2(u) \\ & \quad + (a_0 - a_2)(a_0 - a_1)(a_2 - a_1) \sigma_{02}^2(u), \\ & - (a_2 - a_4)(a_4 - a_0)(a_0 - a_2) \sigma_{51}^2(u) \\ & = (a_2 - a_4)(a_2 - a_3)(a_4 - a_3) \sigma_{24}^2(u) + (a_4 - a_0)(a_4 - a_3)(a_0 - a_3) \sigma_{40}^2(u) \\ & \quad + (a_0 - a_2)(a_0 - a_3)(a_2 - a_3) \sigma_{02}^2(u), \\ & - (a_2 - a_4)(a_4 - a_0)(a_0 - a_2) \sigma_{13}^2(u) \\ & = (a_2 - a_1)(a_2 - a_5)(a_4 - a_5) \sigma_{24}^2(u) + (a_4 - a_0)(a_4 - a_5)(a_0 - a_5) \sigma_{40}^2(u) \\ & \quad + (a_0 - a_2)(a_0 - a_5)(a_2 - a_5) \sigma_{02}^2(u). \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (28) \quad & \left\{ \begin{aligned} & (a_2 - a_4) \{ \sigma^2(u) - \sigma_{01}^2(u) \} \\ & = (a_0 - a_1) \{ (a_2 - a_3)(a_2 - a_5) \sigma_{02}^2(u) - (a_4 - a_3)(a_4 - a_5) \sigma_{40}^2(u) \}, \\ & (a_2 - a_4) \{ \sigma^2(u) - \sigma_{03}^2(u) \} \\ & = (a_0 - a_3) \{ (a_2 - a_5)(a_2 - a_1) \sigma_{02}^2(u) - (a_4 - a_5)(a_4 - a_1) \sigma_{40}^2(u) \}, \\ & (a_2 - a_4) \{ \sigma^2(u) - \sigma_{05}^2(u) \} \\ & = (a_0 - a_5) \{ (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \sigma_{02}^2(u) - (a_4 - a_1)(a_4 - a_3) \sigma_{40}^2(u) \}, \\ & (a_4 - a_0) \{ \sigma^2(u) - \sigma_{21}^2(u) \} \\ & = (a_2 - a_1) \{ (a_4 - a_3)(a_4 - a_5) \sigma_{24}^2(u) - (a_0 - a_3)(a_0 - a_5) \sigma_{02}^2(u) \}, \\ & (a_4 - a_0) \{ \sigma^2(u) - \sigma_{23}^2(u) \} \\ & = (a_2 - a_3) \{ (a_4 - a_5)(a_4 - a_1) \sigma_{24}^2(u) - (a_0 - a_5)(a_0 - a_1) \sigma_{02}^2(u) \}, \\ & (a_4 - a_0) \{ \sigma^2(u) - \sigma_{25}^2(u) \} \\ & = (a_2 - a_5) \{ (a_4 - a_1)(a_4 - a_3) \sigma_{24}^2(u) - (a_0 - a_1)(a_0 - a_3) \sigma_{02}^2(u) \}, \\ & (a_0 - a_2) \{ \sigma^2(u) - \sigma_{41}^2(u) \} \\ & = (a_4 - a_1) \{ (a_0 - a_3)(a_0 - a_5) \sigma_{40}^2(u) - (a_2 - a_3)(a_2 - a_5) \sigma_{24}^2(u) \}, \\ & (a_0 - a_2) \{ \sigma^2(u) - \sigma_{43}^2(u) \} \\ & = (a_4 - a_3) \{ (a_0 - a_5)(a_0 - a_1) \sigma_{40}^2(u) - (a_2 - a_5)(a_2 - a_1) \sigma_{24}^2(u) \}, \\ & (a_0 - a_2) \{ \sigma^2(u) - \sigma_{45}^2(u) \} \\ & = (a_4 - a_5) \{ (a_0 - a_1)(a_0 - a_3) \sigma_{40}^2(u) - (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \sigma_{24}^2(u) \}. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (29) \quad & (a_2 - a_4) \sigma_{24}(u) \sigma_{01}(u) + (a_4 - a_0) \sigma_{40}(u) \sigma_{21}(u) \\ & + (a_0 - a_2) \sigma_{02}(u) \sigma_{41}(u) = 0^*).
 \end{aligned}$$

\*) Auch auf die Gestaltung der Vorzeichenverhältnisse dieser Formeln ist die in § 2 geschehene Bevorzugung der natürlichen Reihenfolge der Indices 0, 1, 2, 3, 4, 5 von Einfluss geblieben.

Man erkennt, wie in diesen Formeln die Indices der Sigmafunctionen und der Parameter  $a_i$  sich in übersichtlichster Weise gruppieren. Warum überall die geraden Indices 0, 2, 4 unter sich und die ungeraden 1, 3, 5 unter sich, nicht aber die geraden und ungeraden wechselseitig, gleichberechtigt hervortreten, wird in § 10 seine volle Erklärung finden.

## § 9.

## Algebraische Darstellung der Sigmaquotienten.

Indem man die 8 algebraischen Functionen zweier unabhängiger Veränderlicher  $z_1$  und  $z_2$ :

$$(30) \begin{cases} p_i = \sqrt{(a_i - z_1)(a_i - z_2)^*}, \\ i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \\ s_\kappa = \sqrt{(a_0 - z_\kappa)(a_1 - z_\kappa)(a_2 - z_\kappa)(a_3 - z_\kappa)(a_4 - z_\kappa)(a_5 - z_\kappa)}, \\ \kappa = 1, 2, \end{cases}$$

einführt, findet man nach dem von Herrn Rosenhain\*\*) und Krazzer\*\*\* eingeschlagenen Verfahren, dass den 13 Relationen des § 8 genügt wird durch folgende Substitutionen, in welchen  $\varphi$  einen Proportionalitätsfactor bedeutet:

$$(31) \begin{cases} \sigma_{24}(u_1, u_2) = \varphi p_0, & \sigma_{40}(u_1, u_2) = \varphi p_2, & \sigma_{02}(u_1, u_2) = \varphi p_4, \\ \sigma_{35}(u_1, u_2) = \varphi p_1, & \sigma_{51}(u_1, u_2) = \varphi p_3, & \sigma_{13}(u_1, u_2) = \varphi p_5, \end{cases}$$

$$(32) \begin{cases} \sigma(u_1, u_2) = \varphi \frac{p_0 p_2 p_4}{z_1 - z_2} \left( \frac{s_1}{(a_0 - z_1)(a_2 - z_1)(a_4 - z_1)} - \frac{s_2}{(a_0 - z_2)(a_2 - z_2)(a_4 - z_2)} \right) \\ \quad = \varphi \frac{p_1 p_3 p_5}{z_1 - z_2} \left( \frac{s_1}{(a_1 - z_1)(a_3 - z_1)(a_5 - z_1)} - \frac{s_2}{(a_1 - z_2)(a_3 - z_2)(a_5 - z_2)} \right), \\ \sigma_{01}(u_1, u_2) = \varphi \frac{p_1 p_2 p_4}{z_1 - z_2} \left( \frac{s_1}{(a_1 - z_1)(a_2 - z_1)(a_4 - z_1)} - \frac{s_2}{(a_1 - z_2)(a_2 - z_2)(a_4 - z_2)} \right) \\ \quad = \varphi \frac{p_0 p_3 p_5}{z_1 - z_2} \left( \frac{s_1}{(a_0 - z_1)(a_3 - z_1)(a_5 - z_1)} - \frac{s_2}{(a_0 - z_2)(a_3 - z_2)(a_5 - z_2)} \right), \\ \sigma_{03}(u_1, u_2) = \varphi \frac{p_3 p_2 p_4}{z_1 - z_2} \left( \frac{s_1}{(a_3 - z_1)(a_2 - z_1)(a_4 - z_1)} - \frac{s_2}{(a_3 - z_2)(a_2 - z_2)(a_4 - z_2)} \right) \\ \quad = \varphi \frac{p_0 p_5 p_1}{z_1 - z_2} \left( \frac{s_1}{(a_0 - z_1)(a_5 - z_1)(a_1 - z_1)} - \frac{s_2}{(a_0 - z_2)(a_5 - z_2)(a_1 - z_2)} \right), \\ \sigma_{05}(u_1, u_2) = \varphi \frac{p_5 p_2 p_4}{z_1 - z_2} \left( \frac{s_1}{(a_5 - z_1)(a_2 - z_1)(a_4 - z_1)} - \frac{s_2}{(a_5 - z_2)(a_2 - z_2)(a_4 - z_2)} \right) \\ \quad = \varphi \frac{p_0 p_1 p_3}{z_1 - z_2} \left( \frac{s_1}{(a_0 - z_1)(a_1 - z_1)(a_3 - z_1)} - \frac{s_2}{(a_0 - z_2)(a_1 - z_2)(a_3 - z_2)} \right), \end{cases}$$

\*) Vgl. Schottky, a. a. O. S. 158.

\*\*) A. a. O. S. 421 ff.

\*\*\*) A. a. O. S. 46 ff.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{21}(u_1, u_2) &= \varphi \frac{p_1 p_4 p_0}{z_1 - z_2} \left( \frac{s_1}{(a_1 - z_1)(a_4 - z_1)(a_0 - z_1)} - \frac{s_2}{(a_1 - z_2)(a_4 - z_2)(a_0 - z_2)} \right) \\
 &= \varphi \frac{p_2 p_3 p_5}{z_1 - z_2} \left( \frac{s_1}{(a_2 - z_1)(a_3 - z_1)(a_5 - z_1)} - \frac{s_2}{(a_2 - z_2)(a_3 - z_2)(a_5 - z_2)} \right), \\
 \sigma_{23}(u_1, u_2) &= \varphi \frac{p_3 p_4 p_0}{z_1 - z_2} \left( \frac{s_1}{(a_3 - z_1)(a_1 - z_1)(a_0 - z_1)} - \frac{s_2}{(a_3 - z_2)(a_1 - z_2)(a_0 - z_2)} \right) \\
 &= \varphi \frac{p_2 p_5 p_1}{z_1 - z_2} \left( \frac{s_1}{(a_2 - z_1)(a_5 - z_1)(a_1 - z_1)} - \frac{s_2}{(a_2 - z_2)(a_5 - z_2)(a_1 - z_2)} \right), \\
 \sigma_{25}(u_1, u_2) &= \varphi \frac{p_5 p_4 p_0}{z_1 - z_2} \left( \frac{s_1}{(a_5 - z_1)(a_4 - z_1)(a_0 - z_1)} - \frac{s_2}{(a_5 - z_2)(a_4 - z_2)(a_0 - z_2)} \right) \\
 &= \varphi \frac{p_2 p_1 p_3}{z_1 - z_2} \left( \frac{s_1}{(a_2 - z_1)(a_1 - z_1)(a_3 - z_1)} - \frac{s_2}{(a_2 - z_2)(a_1 - z_2)(a_3 - z_2)} \right), \\
 \sigma_{41}(u_1, u_2) &= \varphi \frac{p_1 p_0 p_2}{z_1 - z_2} \left( \frac{s_1}{(a_1 - z_1)(a_0 - z_1)(a_2 - z_1)} - \frac{s_2}{(a_1 - z_2)(a_0 - z_2)(a_2 - z_2)} \right) \\
 &= \varphi \frac{p_4 p_3 p_5}{z_1 - z_2} \left( \frac{s_1}{(a_4 - z_1)(a_3 - z_1)(a_5 - z_1)} - \frac{s_2}{(a_4 - z_2)(a_3 - z_2)(a_5 - z_2)} \right), \\
 \sigma_{43}(u_1, u_2) &= \varphi \frac{p_3 p_0 p_2}{z_1 - z_2} \left( \frac{s_1}{(a_3 - z_1)(a_0 - z_1)(a_2 - z_1)} - \frac{s_2}{(a_3 - z_2)(a_0 - z_2)(a_2 - z_2)} \right) \\
 &= \varphi \frac{p_4 p_5 p_1}{z_1 - z_2} \left( \frac{s_1}{(a_4 - z_1)(a_5 - z_1)(a_1 - z_1)} - \frac{s_2}{(a_4 - z_2)(a_5 - z_2)(a_1 - z_2)} \right), \\
 \sigma_{45}(u_1, u_2) &= \varphi \frac{p_5 p_0 p_2}{z_1 - z_2} \left( \frac{s_1}{(a_5 - z_1)(a_0 - z_1)(a_2 - z_1)} - \frac{s_2}{(a_5 - z_2)(a_0 - z_2)(a_2 - z_2)} \right) \\
 &= \varphi \frac{p_4 p_1 p_3}{z_1 - z_2} \left( \frac{s_1}{(a_4 - z_1)(a_1 - z_1)(a_3 - z_1)} - \frac{s_2}{(a_4 - z_2)(a_1 - z_2)(a_3 - z_2)} \right)^*).
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

Was die Zweideutigkeit der Grössen  $p_i$  und  $s_x$  angeht, so denke man sich die  $p_i$  und  $s_x$  in Producte aufgelöst in der Weise:

$$p_i = \sqrt{a_i - z_1} \sqrt{a_i - z_2},$$

$$s_x = \varepsilon_x \sqrt{a_0 - z_x} \sqrt{a_1 - z_x} \sqrt{a_2 - z_x} \sqrt{a_3 - z_x} \sqrt{a_4 - z_x} \sqrt{a_5 - z_x}.$$

Dann werden alle zwischen den Sigmafunctionen bestehenden Relationen durch die Substitutionen (31), (32) erfüllt, wenn jede der Wurzeln  $\sqrt{a_i - z_1} \sqrt{a_i - z_2}$  eine beliebige, aber in allen Formeln (31), (32) dieselbe Bedeutung hat, und überdies  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  je nach Belieben, aber je gleichmässig in *allen* Formeln (32), gleich +1 oder gleich -1 genommen werden.

## § 10.

### Die algebraischen Charakteristiken der Sigmafunctionen.

Man erkennt beim Anblick der 16 Formeln (31), (32), sowie der Formeln (5), (14), (10) unmittelbar das einfache Gesetz, welches die

\*) Vgl. über diese Form Weierstrass: „Zur Theorie der Abel'schen Functionen“, Crelle's Journal Bd. 47, S. 292, Formel (7), sowie Schottky, a. a. O. S. 158, Formel (37).

Vertheilung der 6 Parameter  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  auf die algebraischen Ausdrücke in den genannten Formeln befolgt. Indem man in diesem Gesetz eine wechselseitige Zuordnung der 16 Sigmafunctionen (Thetafunctionen) und der 6 Parameter  $a_i$  begründet sieht, kann man sich dahin ausdrücken:

Jede der 6 ungeraden Sigmafunctionen (Thetafunctionen) gehört zu einem der 6 Parameter, jede der 10 geraden Sigmafunctionen (Thetafunctionen) gehört zu je einer der 10 möglichen Gruppierungen der 6 Parameter in 2 Gruppen von je dreien.

So gehört beispielsweise  $\sigma_{24}(u_1, u_2)$  zu  $a_0$ ,  $\sigma(u_1, u_2)$  zu der Gruppierung  $(a_0 a_2 a_4)(a_1 a_3 a_5)$ ; allgemein ist die Zusammengehörigkeit aus folgendem Schema zu ersehen, wo  $\sigma_{i\pi}$  für  $\sigma_{i\pi}(u_1, u_2)$  und  $i$  für  $a_i$  steht:

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \sigma_{24} : 0, & \sigma_{40} : 2, & \sigma_{02} : 4, \\ \sigma_{35} : 1, & \sigma_{51} : 3, & \sigma_{13} : 5, \\ & \sigma : \begin{Bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{Bmatrix}, \\ \sigma_{01} : \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{Bmatrix}, & \sigma_{21} : \begin{Bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{Bmatrix}, & \sigma_{41} : \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{Bmatrix}, \\ \sigma_{03} : \begin{Bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{Bmatrix}, & \sigma_{23} : \begin{Bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{Bmatrix}, & \sigma_{43} : \begin{Bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{Bmatrix}, \\ \sigma_{05} : \begin{Bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{Bmatrix}, & \sigma_{25} : \begin{Bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{Bmatrix}, & \sigma_{45} : \begin{Bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{Bmatrix}. \end{array} \right.$$

Der Reihenfolge der Indices innerhalb der einzelnen Tripel ist hierbei keine Bedeutung beizulegen.

Will man hiernach die algebraische Darstellung der Sigmaquotienten als Grundlage der Indicesbezeichnung der Sigmafunctionen wählen, so würde man jeder ungeraden Sigmafunction *einen* Index, jeder geraden aber *sechs* in 2 Gruppen zu dreien getheilte Indices beilegen. Es wäre also z. B.  $\sigma_{24}$  mit  $\sigma_0$  und  $\sigma$  mit  $\sigma_{024}$  zu bezeichnen. Diese Bezeichnung,

sie mag die der *algebraischen Charakteristiken* heissen, ist bei der vorausgesetzten Grundlage diejenige, welche keinerlei Willkür in sich schliesst. Dagegen:

*Die Zweiindicesbezeichnung, welche in der vorliegenden Arbeit gebraucht ist und den Vorzug der Einfachheit besitzt, ist nur eine von 10 gleichberechtigten Bezeichnungen.*

Man erkennt nämlich aus dem Schema (33), dass bei ihr die Gruppierung 0 2 4 . 1 3 5 der 6 Indices ausgezeichnet ist, und erkennt ebenso leicht, wie der Uebergang von der Bezeichnung der algebraischen Charakteristiken zu der Zweiindicesbezeichnung stattfindet; die beiden

Indices der ungeraden Function  $\sigma_{24}(u_1, u_2)$  beispielsweise sind die beiden Zahlen, welche mit dem einfachen Index von  $\sigma_0(u_1, u_2)$  das eine der beiden Tripel 0 2 4, 1 3 5 bilden; die beiden Indices der geraden Function  $\sigma_{01}(u_1, u_2)$  sind die beiden Zahlen, welche in der entsprechenden Gruppierung 124.035 (vgl. (33)) gegen die ausgezeichnete Gruppierung 024.135 verstellt sind.

Nach dieser Charakterisirung der Zweiindicesbezeichnung ergibt es sich als nothwendige Folge, dass bei Anwendung dieser Bezeichnung überall die Unterscheidung der geraden und ungeraden der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 eine Rolle spielt. Dies findet sich bestätigt in den Formelsystemen: (4), (12), (13), (18), (§ 7), (27), (28), (29).

Die Zweiindicesbezeichnung geht unmittelbar in die von Herrn Weierstrass\*) eingeführte Indicesbezeichnung über, wenn man die Zahl 5, wo sie unter den beiden Indices einer Function  $\sigma_{i\kappa}$  vorkommt, weglässt, dagegen statt  $\sigma$  (ohne Index) schreibt  $\sigma_5$ . Um diesen einfachen Uebergang von der Zweiindicesbezeichnung zu der Weierstrass'schen Bezeichnung zu ermöglichen, sind in der vorliegenden Arbeit die 6 Parameter  $a_i$  mit den Indices 0, 1, 2, 3, 4, 5, nicht mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 benannt, was übrigens vielleicht vorzuziehen wäre.

## § 11.

### Algebraische Darstellung gewisser Combinationen der Sigmafunctionen.

Aus den Formeln des § 9 leitet sich ohne Mühe noch folgendes System von Formeln ab, welches für die weiteren Entwicklungen gebraucht wird; es bedeutet  $g$  eine beliebige Constante und ist  $\sigma_{i\kappa}(u)$  für  $\sigma_{i\kappa}(u_1, u_2)$  geschrieben:

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{a_3 - g}{a_3 - a_5} \sigma_{13}(u) \sigma_{05}(u) + \frac{a_5 - g}{a_5 - a_3} \sigma_{51}(u) \sigma_{03}(u) \\ &= \frac{a_5 - g}{a_5 - a_1} \sigma_{35}(u) \sigma_{01}(u) + \frac{a_1 - g}{a_1 - a_5} \sigma_{13}(u) \sigma_{05}(u) \\ &= \frac{a_1 - g}{a_1 - a_3} \sigma_{51}(u) \sigma_{03}(u) + \frac{a_3 - g}{a_3 - a_1} \sigma_{35}(u) \sigma_{01}(u) \\ &= \varphi^2 \frac{p_2 p_4}{z_1 - z_2} \left\{ \frac{(g - z_2) s_1}{(a_2 - z_1)(a_4 - z_1)} - \frac{(g - z_1) s_2}{(a_2 - z_2)(a_4 - z_2)} \right\}, \end{aligned} \right.$$

\*) A. a. O. Crelle's Journal, Bd. 47, S. 291, Formel (2) und (7). Henoch, De Abelianarum functionum periodis, Berolini 1867, S. 14, wo die vollständigen Tabellen der Bezeichnung für die Thetafunctionen von 2 und 3 Variablen gegeben sind. Für 4 Variable findet man die entsprechende Tabelle bei Pringsheim, Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen, insbesondere derjenigen 3. Ordnung ( $\varphi = 4$ ), (Leipzig, 1877), S. 18. Vgl. auch die in der Einleitung oben erwähnte Notiz von Borchardt, Crelle's Journal Bd. 87, S. 169.

$$\begin{aligned}
 (34) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \frac{a_3 - g}{a_3 - a_5} \sigma_{13}(u) \sigma_{25}(u) + \frac{a_1 - g}{a_3 - a_3} \sigma_{51}(u) \sigma_{23}(u) \\ & = \frac{a_5 - g}{a_5 - a_1} \sigma_{35}(u) \sigma_{21}(u) + \frac{a_1 - g}{a_1 - a_5} \sigma_{13}(u) \sigma_{25}(u) \\ & = \frac{a_1 - g}{a_1 - a_3} \sigma_{51}(u) \sigma_{23}(u) + \frac{a_3 - g}{a_3 - a_1} \sigma_{35}(u) \sigma_{21}(u) \\ & = \varphi^2 \frac{p_4 p_0}{z_1 - z_2} \left\{ \frac{(g - z_2) s_1}{(a_4 - z_1)(a_0 - z_1)} - \frac{(g - z_1) s_2}{(a_4 - z_2)(a_0 - z_2)} \right\}, \\ & \frac{a_3 - g}{a_3 - a_5} \sigma_{13}(u) \sigma_{45}(u) + \frac{a_5 - g}{a_5 - a_3} \sigma_{51}(u) \sigma_{43}(u) \\ & = \frac{a_5 - g}{a_5 - a_1} \sigma_{35}(u) \sigma_{41}(u) + \frac{a_1 - g}{a_1 - a_5} \sigma_{13}(u) \sigma_{45}(u) \\ & = \frac{a_1 - g}{a_1 - a_3} \sigma_{51}(u) \sigma_{43}(u) + \frac{a_3 - g}{a_3 - a_1} \sigma_{35}(u) \sigma_{41}(u) \\ & = \varphi^2 \frac{p_0 p_2}{z_1 - z_2} \left\{ \frac{(g - z_2) s_1}{(a_0 - z_1)(a_2 - z_1)} - \frac{(g - z_1) s_2}{(a_0 - z_2)(a_2 - z_2)} \right\}. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

In der Gesamtheit dieser 9 Formeln treten an den Buchstaben  $\sigma$ ,  $p$ ,  $a$  die Indices 0, 2, 4 unter sich und die Indices 1, 3, 5 unter sich vollkommen gleichberechtigt auf. Es würde aber neben dieses System von 6 Formeln ein zweites zu stellen sein, in welchem im Vergleich zu jenem die Rolle der Indices 0, 2, 4 gegen die Rolle der Indices 1, 3, 5 vertauscht ist. Man hätte dann ein System von 18 Formeln, in welchem, nachdem einmal die Gruppierung 024.135 ausgezeichnet ist, übrigens volle Gleichberechtigung der 6 Indices herrscht.

### Kapitel III.

#### Auflösung der Parameterdarstellung der Verhältnisse der Theta- (Sigma-) functionen.

##### § 12.

Eine Gruppe von 18 Additionstheoremen für die Sigmafunctionen.

Für die Thetafunctionen  $\Theta_{ik}(u_1, u_2)$  gelten bekannte Additionstheoreme\*), welche sich ebenso wie die Relationen des § 7 unmittelbar auf die Sigmafunctionen übertragen lassen. Durch solche Uebertragung erhält man die folgenden Additionsformeln, in welchen  $u_1, u_2$  und  $u'_1, u'_2$  zwei beliebige Variablenpaare sind und  $u; u'; u \pm u'$  bezüglich zur Abkürzung für  $u_1, u_2; u'_1, u'_2; u_1 \pm u'_1, u_2 \pm u'_2$  geschrieben ist:

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} & (a_3 - a_5) \sigma_{40}(u + u') \sigma_{02}(u - u') \\ & = (a_3 - a_5) \{ \sigma_{21}(u') \sigma_{41}(u') \sigma_{40}(u) \sigma_{02}(u) - \sigma_{40}(u') \sigma_{02}(u') \sigma_{21}(u) \sigma_{41}(u) \} \\ & + (a_2 - a_4) \{ \sigma_{03}(u') \sigma_{51}(u') \sigma_{05}(u) \sigma_{13}(u) - \sigma_{05}(u') \sigma_{13}(u') \sigma_{03}(u) \sigma_{51}(u) \}, \end{aligned} \right.$$

\*) Vgl. Krazer, a. a. O. S. 59.

$$(35) \left\{ \begin{aligned} & (a_3 - a_5) \sigma_{02}(u + u') \sigma_{24}(u - u') \\ & = (a_3 - a_5) \{ \sigma_{41}(u') \sigma_{01}(u') \sigma_{02}(u) \sigma_{24}(u) - \sigma_{02}(u') \sigma_{24}(u') \sigma_{11}(u) \sigma_{01}(u) \} \\ & + (a_4 - a_0) \{ \sigma_{23}(u') \sigma_{51}(u') \sigma_{25}(u) \sigma_{13}(u) - \sigma_{25}(u') \sigma_{13}(u') \sigma_{23}(u) \sigma_{51}(u) \}, \\ & (a_3 - a_5) \sigma_{24}(u + u') \sigma_{40}(u - u') \\ & = (a_3 - a_5) \{ \sigma_{01}(u') \sigma_{21}(u') \sigma_{24}(u) \sigma_{40}(u) - \sigma_{24}(u') \sigma_{40}(u') \sigma_{01}(u) \sigma_{21}(u) \} \\ & + (a_0 - a_2) \{ \sigma_{43}(u') \sigma_{51}(u') \sigma_{45}(u) \sigma_{13}(u) - \sigma_{45}(u') \sigma_{13}(u') \sigma_{43}(u) \sigma_{51}(u) \}. \end{aligned} \right.$$

In der Gesamtheit dieser 3 Additionstheoreme treten die geraden Indices 0, 2, 4 völlig gleichberechtigt hervor, von den ungeraden Indices 1, 3, 5 dagegen ist der Index 1 ausgezeichnet; in 2 weiteren Tripeln von Additionstheoremen würden bezüglich 3 und 5 unter den ungeraden Indices ausgezeichnet sein, die geraden aber dieselbe Rolle spielen, wie im 1. Tripel. In der Gesamtheit der 9 so erhaltenen Additionstheoreme sind dann die geraden Indices unter sich und die ungeraden unter sich gleichberechtigt vertreten. Um endlich auch die geraden und ungeraden Indices gegeneinander gleichmässig zu stellen, sind diesen 9 Additionstheoremen 9 weitere hinzuzufügen, bei welchen gegenüber den 9 ersteren die Rollen der geraden und ungeraden Indices vertauscht sind. *Man hat alsdann eine Gruppe von 18 Additionstheoremen, welche in demselben Sinne zu der durch die Zweiindicesbezeichnung bevorzugten Gruppierung 024.135 der 6 Indices gehört, wie die Gruppe der 18 in § 11 beschriebenen Formeln.* Mit der Gesamtheit dieser 18 Additionstheoreme soll weiterhin operirt werden, wenn auch die explicite Ausführung der Rechnung auf die 3 ersten Relationen beschränkt bleibt.

### § 13.

Uebergang auf die hyperelliptischen Differentialgleichungen.

Durch partielle Differentiation der 1. Gleichung (35) nach  $u_1'$  oder  $u_2'$  und nachherige Nullsetzung der Argumente  $u_1'$ ,  $u_2'$  ergibt sich mit Rücksicht auf die Formeln (26):

$$\begin{aligned} & (a_3 - a_5) \left\{ \sigma_{02}(u) \frac{\partial \sigma_{40}(u)}{\partial u_1} - \sigma_{40}(u) \frac{\partial \sigma_{02}(u)}{\partial u_1} \right\} \\ & = \frac{a_2 - a_1}{g_2 - g_1} \left\{ (a_3 - g_2) \sigma_{13}(u) \sigma_{05}(u) - (a_5 - g_2) \sigma_{51}(u) \sigma_{03}(u) \right\}, \\ & (a_3 - a_5) \left\{ \sigma_{02}(u) \frac{\partial \sigma_{40}(u)}{\partial u_2} - \sigma_{40}(u) \frac{\partial \sigma_{02}(u)}{\partial u_2} \right\} \\ & = \frac{a_2 - a_4}{g_1 - g_2} \left\{ (a_3 - g_1) \sigma_{13}(u) \sigma_{05}(u) - (a_5 - g_1) \sigma_{51}(u) \sigma_{03}(u) \right\}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt weiter:

$$(36) \quad \begin{aligned} & \sigma_{02}(u) d\sigma_{40}(u) - \sigma_{40}(u) d\sigma_{02}(u) \\ &= \frac{a_2 - a_4}{g_2 - g_1} \left\{ \left( \frac{a_3 - g_2}{a_3 - a_5} \sigma_{13}(u) \sigma_{05}(u) + \frac{a_5 - g_2}{a_5 - a_3} \sigma_{51}(u) \sigma_{03}(u) \right) du_1 \right. \\ & \quad \left. - \left( \frac{a_3 - g_1}{a_3 - a_5} \sigma_{13}(u) \sigma_{05}(u) + \frac{a_5 - g_1}{a_5 - a_3} \sigma_{51}(u) \sigma_{03}(u) \right) du_2 \right\}; \end{aligned}$$

auf gleichem Wege ergibt sich aus den beiden andern Formeln (35):

$$(36) \quad \begin{aligned} & \sigma_{24}(u) d\sigma_{02}(u) - \sigma_{02}(u) d\sigma_{24}(u) \\ &= \frac{a_1 - a_0}{g_2 - g_1} \left\{ \left( \frac{a_3 - g_2}{a_3 - a_5} \sigma_{13}(u) \sigma_{25}(u) + \frac{a_5 - g_2}{a_5 - a_3} \sigma_{51}(u) \sigma_{23}(u) \right) du_1 \right. \\ & \quad \left. - \left( \frac{a_3 - g_1}{a_3 - a_5} \sigma_{13}(u) \sigma_{25}(u) + \frac{a_5 - g_1}{a_5 - a_3} \sigma_{51}(u) \sigma_{23}(u) \right) du_2 \right\}, \\ & \sigma_{40}(u) d\sigma_{24}(u) - \sigma_{24}(u) d\sigma_{40}(u) \\ &= \frac{a_0 - a_2}{g_2 - g_1} \left\{ \left( \frac{a_3 - g_2}{a_3 - a_5} \sigma_{13}(u) \sigma_{45}(u) + \frac{a_5 - g_2}{a_5 - a_3} \sigma_{51}(u) \sigma_{43}(u) \right) du_1 \right. \\ & \quad \left. - \left( \frac{a_3 - g_1}{a_3 - a_5} \sigma_{13}(u) \sigma_{45}(u) + \frac{a_5 - g_1}{a_5 - a_3} \sigma_{51}(u) \sigma_{43}(u) \right) du_2 \right\}. \end{aligned}$$

Diese 3 Formeln, welche nur von den Verhältnissen der Sigmafunctionen abhängen, gehen mit Benutzung der Formeln (31) und (34) über in:

$$\begin{aligned} & p_4 dp_2 - p_2 dp_4 \\ &= \frac{(a_2 - a_4) p_2 p_4}{(g_2 - g_1) (z_1 - z_2)} \left\{ \left( \frac{(g_2 - z_2) s_1}{(a_2 - z_1) (a_4 - z_1)} - \frac{(g_2 - z_1) s_2}{(a_2 - z_2) (a_4 - z_2)} \right) du_1 \right. \\ & \quad \left. - \left( \frac{(g_1 - z_2) s_1}{(a_2 - z_1) (a_4 - z_1)} - \frac{(g_1 - z_1) s_2}{(a_2 - z_2) (a_4 - z_2)} \right) du_2 \right\}, \\ & p_0 dp_4 - p_4 dp_0 \\ &= \frac{(a_4 - a_0) p_4 p_0}{(g_2 - g_1) (z_1 - z_2)} \left\{ \left( \frac{(g_2 - z_2) s_1}{(a_4 - z_1) (a_0 - z_1)} - \frac{(g_2 - z_1) s_2}{(a_4 - z_2) (a_0 - z_2)} \right) du_1 \right. \\ & \quad \left. - \left( \frac{(g_1 - z_2) s_1}{(a_4 - z_1) (a_0 - z_1)} - \frac{(g_1 - z_1) s_2}{(a_4 - z_2) (a_0 - z_2)} \right) du_2 \right\}, \\ & p_2 dp_0 - p_0 dp_2 \\ &= \frac{(a_0 - a_2) p_0 p_2}{(g_2 - g_1) (z_1 - z_2)} \left\{ \left( \frac{(g_2 - z_2) s_1}{(a_0 - z_1) (a_2 - z_1)} - \frac{(g_2 - z_1) s_2}{(a_0 - z_2) (a_2 - z_2)} \right) du_1 \right. \\ & \quad \left. - \left( \frac{(g_1 - z_2) s_1}{(a_0 - z_1) (a_2 - z_1)} - \frac{(g_1 - z_1) s_2}{(a_0 - z_2) (a_2 - z_2)} \right) du_2 \right\}. \end{aligned}$$



Führt man hier endlich für  $p_0, p_2, p_4$  die Ausdrücke (30) ein, so nehmen diese Gleichungen die Gestalt an:

$$(37) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \frac{dz_1}{(a_2 - z_1)(a_4 - z_1)} + \frac{dz_2}{(a_2 - z_2)(a_4 - z_2)} \right) \\ &= \frac{(g_2 - z_2)du_1 - (g_1 - z_2)du_2}{(g_2 - g_1)(z_1 - z_2)(a_2 - z_1)(a_4 - z_1)} s_1 - \frac{(g_2 - z_1)du_1 - (g_1 - z_1)du_2}{(g_2 - g_1)(z_1 - z_2)(a_2 - z_2)(a_4 - z_2)} s_2, \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{dz_1}{(a_4 - z_1)(a_0 - z_1)} + \frac{dz_2}{(a_4 - z_2)(a_0 - z_2)} \right) \\ &= \frac{(g_2 - z_2)du_1 - (g_1 - z_2)du_2}{(g_2 - g_1)(z_1 - z_2)(a_4 - z_1)(a_0 - z_1)} s_1 - \frac{(g_2 - z_1)du_1 - (g_1 - z_1)du_2}{(g_2 - g_1)(z_1 - z_2)(a_4 - z_2)(a_0 - z_2)} s_2, \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{dz_1}{(a_0 - z_1)(a_2 - z_1)} + \frac{dz_2}{(a_0 - z_2)(a_2 - z_2)} \right) \\ &= \frac{(g_2 - z_2)du_1 - (g_1 - z_2)du_2}{(g_2 - g_1)(z_1 - z_2)(a_0 - z_1)(a_2 - z_1)} s_1 - \frac{(g_2 - z_1)du_1 - (g_1 - z_1)du_2}{(g_2 - g_1)(z_1 - z_2)(a_0 - z_2)(a_2 - z_2)} s_2. \end{aligned} \right.$$

Auf diese 3 Differentialgleichungen führen nicht nur die 3 ersten, sondern auch die 6 übrigen der 9 in § 12 zuerst erwähnten Additionstheoreme; die 9 weiter erwähnten Additionstheoreme führen auf 3 weitere Differentialgleichungen von der Form (37), in welchen nur die  $a_0, a_2, a_4$  durch die  $a_1, a_3, a_5$  bezüglich ersetzt sind. Die erhaltenen 6 Differentialgleichungen entsprechen wiederum der Gruppierung  $(a_0 a_2 a_4)$  ( $a_1 a_3 a_5$ ) der 6 Parameter  $a_i$ . Zu jeder der 10 andern Gruppierungen würden 6 entsprechende Differentialgleichungen gehören. Von den 60 so erhaltenen sind aber je 4 identisch und bleiben daher nur 15 Differentialgleichungen von der Form (37), welche den 15 Combinationen der 6 Parameter  $a_i$  zu zweien entsprechen.

Diese 15 Differentialgleichungen liefern als gemeinsame Auflösungen nach  $dz_1$  und  $dz_2$ :

$$(38) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} (g_2 - g_1) (z_1 - z_2) \frac{dz_1}{s_1} = (g_2 - z_2)du_1 - (g_1 - z_2)du_2, \\ & \frac{1}{2} (g_2 - g_1) (z_1 - z_2) \frac{dz_2}{s_2} = -(g_2 - z_1)du_1 + (g_1 - z_1)du_2 \end{aligned} \right.$$

und als gemeinsame Auflösungen nach  $du_1$  und  $du_2$ :

$$(39) \left\{ \begin{aligned} & du_1 = \frac{1}{2} (z_1 - g_1) \frac{dz_1}{s_1} + \frac{1}{2} (z_2 - g_1) \frac{dz_2}{s_2}, \\ & du_2 = \frac{1}{2} (z_1 - g_2) \frac{dz_1}{s_1} + \frac{1}{2} (z_2 - g_2) \frac{dz_2}{s_2}. \end{aligned} \right.$$

Die Differentialgleichungen (39) geben mit Ausführung der Integration:

$$(40) \quad u_1 = \int_{z_2, -s_2}^{z_1, s_1} \frac{1}{2} (z - g_1) \frac{dz}{s} + c_1, \quad u_2 = \int_{z_2, -s_2}^{z_1, s_1} \frac{1}{2} (z - g_2) \frac{dz}{s} + c_2,$$

wo  $c_1, c_2$  2 Integrationsconstanten sind.\*) Hiermit sind die zwischen den Variablenpaaren  $u_1, u_2$  und  $z_1, z_2$  angesetzten Gleichungen (31), (32) nach  $u_1, u_2$  aufgelöst.

Die Variablen  $u_1, u_2$  ergeben sich als überall endliche Integrale, welche zu der durch die algebraische Gleichung:

$$(41) \quad s^2 = (a_0 - z)(a_1 - z)(a_2 - z)(a_3 - z)(a_4 - z)(a_5 - z)$$

definierten Riemann'schen Fläche gehören.

Das durch die Gleichungen (31), (32) definirte Functionsverhältniss ist also derartig vorzustellen, dass die Variablen  $u_1, u_2$  nicht schlecht-hin von  $z_1, z_2$ , sondern von 2 Stellen  $z_1, s_1$  und  $z_2, s_2$  der Riemann'schen Fläche (41), und zwar symmetrisch, abhängig gemacht sind.

Es bleibt nun die umgekehrte Aufgabe zu lösen übrig, die beiden Stellen  $z_1, s_1$  und  $z_2, s_2$  der Riemann'schen Fläche in ihrer Abhängigkeit von  $u_1, u_2$  darzustellen, womit zugleich das Umkehrproblem der Integrale (40) gelöst wird.

## § 14.

Aufstellung der quadratischen Gleichungen für  $z_1$  und  $z_2$ .

Aus der Theorie der Partialbruchzerlegung ist bekannt, dass man eine in  $z$  quadratische Gleichung, welche die Wurzeln  $z = z_1$  und  $z = z_2$  besitzt, in der Form darstellen kann:

$$\frac{(a_0 - z_1)(a_0 - z_2)}{(a_0 - a_2)(a_0 - a_4)(a_0 - z)} + \frac{(a_2 - z_1)(a_2 - z_2)}{(a_2 - a_4)(a_2 - a_0)(a_2 - z)} + \frac{(a_4 - z_1)(a_4 - z_2)}{(a_4 - a_0)(a_4 - a_2)(a_4 - z)} = 0.$$

Dieser Gleichung kann unter Einführung der in (30) definirten Abkürzungen  $p_i$  die Form gegeben werden:

$$\frac{(a_2 - a_4)p_0^2}{a_0 - z} + \frac{(a_4 - a_0)p_2^2}{a_2 - z} + \frac{(a_0 - a_2)p_4^2}{a_4 - z} = 0.$$

Man hat so eine quadratische Gleichung, deren Coefficienten als symmetrische Functionen ihrer beiden Wurzeln  $z_1, z_2$  dargestellt sind. Diese symmetrischen Functionen sind aber durch die Formeln (31) in

\*) Dieselben sind durch den Ansatz (31), (32) vollkommen bestimmt und haben beide den Werth 0, sofern man nur die Integrale  $u_1, u_2$  selbst in der ihnen zukommenden Vieldeutigkeit auffasst. Denn aus jenem Ansatz ergibt sich, dass für  $z_2 = z_1, -s_2 = s_1$  die ungeraden  $\sigma$ -Functionen alle 6 gleichzeitig verschwinden müssen; dies ist aber nur möglich, wenn mit Bezug auf die Periodenpaare, welche die  $\sigma$ -Functionen nach den Argumenten  $u_1, u_2$  haben, die Congruenzen  $u_1 \equiv 0, u_2 \equiv 0$  bestehen. Auf diesen bereits dem 2. Theile der vorliegenden Theorie angehörigen Punkt, denke ich anderwärts näher einzugehen.

ihrer Abhängigkeit von  $u_1, u_2$  gegeben. Es sind daher  $z_1, z_2$  die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(42) \quad \frac{(a_2 - a_4) \sigma_{24}^2(u_1, u_2)}{a_0 - z} + \frac{(a_1 - a_0) \sigma_{40}^2(u_1, u_2)}{a_2 - z} + \frac{(a_0 - a_2) \sigma_{02}^2(u_1, u_2)}{a_4 - z} = 0.$$

Ebenso würde man  $z_1, z_2$  definiren können durch die Gleichung:

$$(42) \quad \frac{(a_3 - a_5) \sigma_{35}^2(u_1, u_2)}{a_1 - z} + \frac{(a_5 - a_1) \sigma_{51}^2(u_1, u_2)}{a_3 - z} + \frac{(a_1 - a_3) \sigma_{13}^2(u_1, u_2)}{a_5 - z} = 0.$$

Beide Gleichungen zeichnen die Gruppierung der 6 Parameter  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  in die beiden Gruppen  $a_0, a_2, a_4$  und  $a_1, a_3, a_5$  aus; sie gehören in diesem Sinne zu der geraden Sigmafunction  $\sigma(u_1, u_2)$ . Zu jeder andern geraden Sigmafunction gehören aber ebenfalls 2 entsprechende Gleichungen.

Man erhält so 10 Paare quadratischer Gleichungen für  $z_1, z_2$  von der Form (42), welche den 10 geraden Sigmafunctionen bezüglich zugeordnet sind.

Jede einzelne derselben kann zur Bestimmung von  $z_1, z_2$  dienen.

## § 15.

Darstellung des Factors  $\varphi$  in (31), (32) durch Sigmafunctionen.

Jede der 20 quadratischen Gleichungen kann zur Bestimmung des in den Formeln (31), (32) auftretenden Factors  $\varphi$  verwerthet werden. Da nämlich, um an die 1. Gleichung (42) anzuknüpfen,  $z_1, z_2$  die Wurzeln derselben sind, so gilt identisch in Bezug auf  $z$ :

$$(43) \quad (a_2 - a_4)(a_2 - z)(a_4 - z) \sigma_{24}^2(u) + (a_4 - a_0)(a_4 - z)(a_0 - z) \sigma_{40}^2(u) \\ + (a_0 - a_2)(a_0 - z)(a_2 - z) \sigma_{02}^2(u) \\ = \{(a_2 - a_1) \sigma_{24}^2(u) + (a_4 - a_0) \sigma_{40}^2(u) + (a_0 - a_2) \sigma_{02}^2(u)\} (z_1 - z)(z_2 - z).$$

Setzt man daher  $z$  gleich einer beliebigen Constanten  $g$ , so erhält man:

$$(44) \quad (g - z_1)(g - z_2) = \frac{\Phi(g)}{(a_2 - a_4) \sigma_{24}^2(u) + (a_4 - a_0) \sigma_{40}^2(u) + (a_0 - a_2) \sigma_{02}^2(u)},$$

wo

$$\Phi(g) = (a_2 - a_4)(a_2 - g)(a_4 - g) \sigma_{24}^2(u) + (a_4 - a_0)(a_4 - g)(a_0 - g) \sigma_{40}^2(u) \\ + (a_0 - a_2)(a_0 - g)(a_2 - g) \sigma_{02}^2(u),$$

eine Formel, welche die 3 ersten Formeln (31) als specielle Fälle umfasst. Mit der besonderen Annahme  $g = a_0$  wird beispielsweise:

$$(a_0 - z_1)(a_0 - z_2) = \frac{-(a_2 - a_4)(a_4 - a_0)(a_0 - a_2)\sigma_{24}^2(u)}{(a_2 - a_4)\sigma_{24}^2(u) + (a_4 - a_0)\sigma_{40}^2(u) + (a_0 - a_2)\sigma_{02}^2(u)}.$$

Hieraus ergibt sich der Werth von  $\varphi^2$  durch Vergleich mit der 1. Formel (31). Zu einem analogen Resultat würde jede andere der 20 quadratischen Gleichungen, als die gerade benutzte, führen und man gelangt zusammenfassend zu dem Ergebniss:

Der Factor  $\varphi$  kann auf 10 mal 2 äquivalente Weisen dargestellt werden; je 2 Darstellungen gehören zu einer der 10 geraden Sigma-functionen; die beiden zu  $\sigma(u_1, u_2)$  gehörenden Darstellungen sind:

$$(45) \quad \varphi^2 = \frac{\sigma_{24}^2(u)}{(a_2 - a_0)(a_4 - a_0)} + \frac{\sigma_{40}^2(u)}{(a_4 - a_2)(a_0 - a_2)} + \frac{\sigma_{02}^2(u)}{(a_0 - a_4)(a_2 - a_4)} \\ = \frac{\sigma_{35}^2(u)}{(a_3 - a_1)(a_5 - a_1)} + \frac{\sigma_{51}^2(u)}{(a_5 - a_3)(a_1 - a_3)} + \frac{\sigma_{13}^2(u)}{(a_1 - a_5)(a_3 - a_5)}.$$

Die Gleichheit beider Ausdrücke geht unmittelbar aus den Formeln (27) hervor.

### § 16.

#### Bildung der Function zur Bestimmung von $s_1$ und $s_2$ .

Um die Abhängigkeit der beiden Stellen  $z_1, s_1$  und  $z_2, s_2$  von  $u_1, u_2$  anzugeben, bedarf es ausser der quadratischen Gleichung, deren Wurzeln  $z_1$  und  $z_2$  sind, noch der eindeutigen Bestimmung der beiden Grössen  $s_1$  und  $s_2$ , deren jede durch  $z_1$  und  $z_2$  erst zweideutig bestimmt ist.

Man differentiire zu dem Ende die Identität (43), indem man  $z_1$  und  $z_2$  als Functionen von  $u_1, u_2$  betrachtet, partiell nach  $u_1$ ; mit der Abkürzung:

$$S = (a_2 - a_4)\sigma_{24}^2(u) + (a_4 - a_0)\sigma_{40}^2(u) + (a_0 - a_2)\sigma_{02}^2(u)$$

ergiebt sich:

$$(a_2 - a_4)(a_2 - z)(a_4 - z) \frac{\partial \sigma_{24}^2(u)}{\partial u_1} \\ + (a_4 - a_0)(a_4 - z)(a_0 - z) \frac{\partial \sigma_{40}^2(u)}{\partial u_1} \\ + (a_0 - a_2)(a_0 - z)(a_2 - z) \frac{\partial \sigma_{02}^2(u)}{\partial u_1} \\ = (z_1 - z)(z_2 - z) \frac{\partial S}{\partial u_1} + S \left\{ (z_1 - z) \frac{\partial z_2}{\partial u_1} + (z_2 - z) \frac{\partial z_1}{\partial u_1} \right\}.$$

Setzt man in dieser in Bezug auf  $z$  identischen Gleichung  $z = z_1$  oder  $z = z_2$ , so folgt:

$$\begin{aligned}
 & (a_2 - a_4)(a_2 - z_1)(a_4 - z_1) \frac{\partial \sigma_{24}^2(u)}{\partial u_1} \\
 & + (a_4 - a_0)(a_4 - z_1)(a_0 - z_1) \frac{\partial \sigma_{40}^2(u)}{\partial u_1} \\
 & + (a_0 - a_2)(a_0 - z_1)(a_2 - z_1) \frac{\partial \sigma_{02}^2(u)}{\partial u_1} = S(z_2 - z_1) \frac{\partial z_1}{\partial u_1}, \\
 & (a_2 - a_4)(a_2 - z_2)(a_4 - z_2) \frac{\partial \sigma_{24}^2(u)}{\partial u_1} \\
 & + (a_4 - a_0)(a_4 - z_2)(a_0 - z_2) \frac{\partial \sigma_{40}^2(u)}{\partial u_1} \\
 & + (a_0 - a_2)(a_0 - z_2)(a_2 - z_2) \frac{\partial \sigma_{02}^2(u)}{\partial u_1} = S(z_1 - z_2) \frac{\partial z_2}{\partial u_1}.
 \end{aligned}$$

Substituirt man hier die aus (38) folgenden Werthe der partiellen Differentialquotienten von  $z_1, z_2$  nach  $u_1$ :

$$(z_2 - z_1) \frac{\partial z_1}{\partial u_1} = 2 \frac{g_2 - z_2}{g_1 - g_2} s_1, \quad (z_1 - z_2) \frac{\partial z_2}{\partial u_1} = 2 \frac{g_2 - z_1}{g_1 - g_2} s_2$$

und löst noch  $s_1$  und  $s_2$  auf, so erhält man unter gleichzeitiger Benutzung der Formel (44):

$$s_1 = \frac{1}{2} (g_2 - g_1) (z_1 - g_2) \cdot \frac{\Psi(z_1)}{\Phi(g_2)},$$

$$s_2 = \frac{1}{2} (g_2 - g_1) (z_2 - g_2) \cdot \frac{\Psi(z_2)}{\Phi(g_2)}$$

wo  $\Phi$  die in § 15 eingeführte Function ist und  $\Psi(z)$  folgenden Ausdruck bedeutet:

$$\begin{aligned}
 \Psi(z) = & (a_2 - a_4)(a_2 - z)(a_4 - z) \frac{\partial \sigma_{24}^2(u_1, u_2)}{\partial u_1} \\
 & + (a_4 - a_0)(a_4 - z)(a_0 - z) \frac{\partial \sigma_{40}^2(u_1, u_2)}{\partial u_1} \\
 & + (a_0 - a_2)(a_0 - z)(a_2 - z) \frac{\partial \sigma_{02}^2(u_1, u_2)}{\partial u_1}.
 \end{aligned}$$

Die rechten Seiten der beiden Gleichungen für  $s_1$  und  $s_2$  gehen durch Vertauschung von  $z_1$  und  $z_2$  ineinander über.

Man kann daher das Resultat in Verbindung mit dem des § 14 so aussprechen:

Um die beiden Stellen  $z_1, s_1$  und  $z_2, s_2$  des algebraischen Gebildes (41) als Functionen von  $u_1, u_2$  darzustellen, dient die in  $z$  quadratische Gleichung:

$$(42) \quad \frac{(a_2 - a_4) \sigma_{24}^2(u_1, u_2)}{a_0 - z} + \frac{(a_4 - a_0) \sigma_{40}^2(u_1, u_2)}{a_2 - z} + \frac{(a_1 - a_2) \sigma_{02}^2(u_1, u_2)}{a_4 - z} = 0,$$

welche  $z_1$  und  $z_2$  als Wurzeln hat, und die Function von  $z$ :

$$(46) \quad s = \frac{1}{2} (g_1 - g_2) (g_2 - z) \cdot \frac{\Psi(z)}{\Phi(g_2)}, *$$

mit:

$$\begin{aligned} \Psi(z) = & (a_2 - a_4) (a_2 - z) (a_4 - z) \frac{\partial \sigma_{24}^2(u_1, u_2)}{\partial u_1} \\ & + (a_4 - a_0) (a_4 - z) (a_0 - z) \frac{\partial \sigma_{40}^2(u_1, u_2)}{\partial u_1} \\ & + (a_0 - a_2) (a_0 - z) (a_2 - z) \frac{\partial \sigma_{02}^2(u_1, u_2)}{\partial u_1} \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} \Phi(g) = & (a_2 - a_4) (a_2 - g) (a_4 - g) \sigma_{24}^2(u_1, u_2) \\ & + (a_4 - a_0) (a_4 - g) (a_0 - g) \sigma_{40}^2(u_1, u_2) \\ & + (a_0 - a_2) (a_0 - g) (a_2 - g) \sigma_{02}^2(u_1, u_2), \end{aligned}$$

welche mit  $z = z_1$  den Werth  $s_1$  und mit  $z = z_2$  den Werth  $s_2$  bestimmt.

Die Function  $s$  könnte man auch ersetzen durch diejenige, welche aus ihr durch Vertauschung der Differentiation nach  $u_1$  mit der nach  $u_2$  und gleichzeitige Vertauschung von  $g_1$  und  $g_2$  hervorgeht. Man erhält so zu jeder der 20 quadratischen Gleichungen des § 14 je 2 Functionen von der Form (46).

Die Function  $s$ , gebildet für  $z = z_1$  und  $z = z_2$ , hängt ebenso wie die quadratische Gleichung (42) nur von den Verhältnissen der Functionen  $\sigma_{ix}^2(u_1, u_2)$  ab, da der Ausdruck:

$$\begin{aligned} & (a_2 - a_4) (a_2 - z) (a_4 - z) \sigma_{24}^2(u_1, u_2) \\ & + (a_4 - a_0) (a_4 - z) (a_0 - z) \sigma_{40}^2(u_1, u_2) \\ & + (a_0 - a_2) (a_0 - z) (a_2 - z) \sigma_{02}^2(u_1, u_2) \end{aligned}$$

mit  $z = z_1$  oder  $z = z_2$  identisch verschwindet.

---

\*) Die Formel entspricht der von Herrn Weierstrass (Crelle's Journal, Bd. 47, S. 292) gegebenen Formel (6); letztere erscheint deshalb in etwas verkürzter Form, weil in ihr für die im vorliegenden Text beliebig gelassenen Constanten  $g_1, g_2$  zwei von den 6 Parametern  $a_i$  gewählt sind, wodurch zwei von den 3 Gliedern im Nenner der Function  $s$  in Wegfall gebracht werden können.

## § 17.

## Uebersicht über die Entwicklung der §§ 7—16.

Die Betrachtungen des II. und III. Kapitels, welche wie die des I. von der Definition der Thetafunction ausgehen, waren ursprünglich von folgenden Gesichtspunkten geleitet.

Die 15 Quotienten aus den 16 Thetafunctionen  $\Theta_{ix}(v_1, v_2)$  kann man sich als 15 Variable denken, zwischen denen 13 von einander unabhängige Relationen bestehen. Aus der Natur der letzteren erwuchs die Aufgabe, jene 15 Variablen sämmtlich als algebraische Functionen zweier unabhängiger Veränderlicher  $z_1$  und  $z_2$  darzustellen.

Als weitere Aufgabe schloss sich die Auflösung der gefundenen algebraischen Parameterdarstellung einerseits nach  $v_1, v_2$ , andererseits nach  $z_1, z_2$  an.

Diese ursprünglichen Fragestellungen haben aber im Laufe der Betrachtung eine *doppelte Modification* erfahren, indem die *Argumente*  $v_1, v_2$  durch die *Argumente*  $u_1, u_2$  und die *Thetafunctionen* durch die *Sigmafunctionen* ersetzt worden sind.

Das letztere ist geschehen, um in die Parameterdarstellung (31), (32) keine andern Irrationalitäten explicite einzuführen als die Quadratwurzeln  $p_i$  und  $s_x$  und in den Formeln (42), (46) jede Irrationalität zu vermeiden. Unter Beibehaltung der Thetafunctionen würden die algebraischen Ausdrücke in (31), (32) mit gewissen vierten Wurzeln und die Gleichungen (42), (46) mit gewissen Quadratwurzeln aus Differenzenproducten der  $a_i$  behaftet sein. Diese Irrationalitäten sind in die Thetafunction aufgenommen worden, welche dadurch in die Sigmafunction überging. Zugleich werden durch die Einführung der Sigmafunctionen in die Thetarelationen, diese besonders in Ansehung der Vorzeichen, welche die einzelnen Glieder verbinden, wesentlich übersichtlicher, wie ein Vergleich der Formeln des § 7 mit denen des § 8 erkennen lässt.

Was die Ersetzung der Argumente  $v_1, v_2$  durch die Argumente  $u_1, u_2$  betrifft, so wird dieselbe weniger für die algebraische Parameterdarstellung der Thetaquotienten als vielmehr für den Uebergang von den Thetafunctionen auf die hyperelliptischen Differentialgleichungen von Bedeutung. Würde man die Argumente  $v_1, v_2$  beibehalten haben, so würden die Coefficienten von  $dz_1$  und  $dz_2$  in den Differentialgleichungen (39) nicht algebraisch von den Constanten  $a_i$  abhängig geworden sein. Die rein algebraische Form der Coefficienten ist erreicht durch eine geeignete Bestimmung der Coefficienten der Substitution (6), ähnlich wie früher (vgl. § 6) durch denselben Schritt erreicht wurde, dass die Verhältnisse der  $\Theta'_{ix}^{(1)}, \Theta'_{ix}^{(2)}$  rein algebraisch von den  $a_i$  abhängig wurden. —

Was von der am Schluss der Einleitung erwähnten und in 2 Theile gespaltenen Aufgabe nach den vorstehenden Entwicklungen noch als 2. Theil zu lösen übrig bleibt, lässt sich kurz dahin aussprechen: *Es sind die 4 Constanten  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{21}$ ,  $\alpha_{22}$  der Substitution (6) und die 3 Constanten  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  der Thetafunction durch die 6 Verzweigungspunkte  $a_i$  der Riemann'schen Fläche auszudrücken*; woran sich beiläufig die Bestimmung der Constanten  $c_1$ ,  $c_2$  in (40) anschliesst. Die Erledigung dieser weiteren Fragestellung bildet ebenso wie die Parameterdarstellung der Verhältnisse der Thetafunctionen ein für sich abgerundetes Ganze: die Entwicklungen der vorstehenden Paragraphen sind mehr algebraischer Natur; die Darstellung der fraglichen Elemente durch die  $a_i$ , welche ich einer andern Gelegenheit aufspare, stützt sich wesentlich auf die Theorie der transcendenten Moduln der hyperelliptischen Functionen. Diese Theorie führt gleichzeitig auf eine äusserst einfache Beziehung der Zweiindicesbezeichnung der Thetafunctionen zu der Charakteristikenbezeichnung, womit sich der bisher entwickelten *algebraischen* Bedeutung eine *transcendente* Bedeutung der Indicespaare der Thetafunctionen zur Seite stellt.

Breslau, im April 1884.

---