Ein neues Fundamentalsystem für symmetrische Funktionen.

Von

Bernhard von Ludwig in Berlin.

Hinsichtlich der Potenzsummen $s_\lambda = \sum_{k=1}^{n} x_k^\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ beliebiger n Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ weiß man seit Newton, daß die n ersten derselben ein Fundamentalsystem für symmetrische Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilden, d. h., daß sich jede rationale symmetrische Funktion dieser Größen durch $s_1, s_2, \ldots, s_n$ rational darstellen läßt.

In neuester Zeit erst ist durch eine im 23. Bande der „Acta Mathematica“ (1900) veröffentlichte Arbeit von Vahlen bekannt geworden, daß nach beliebiger Wahl einer der Zahlen $m = 2, 3, \ldots, n$ und nach Beseitigung aller Potenzsummen $s_m, s_{2m}, s_{3m}, \ldots$ auch noch von den übrig bleibenden Potenzsummen die ersten n zu einem Fundamentalsystem vereinigt werden können.

Ich will jetzt zeigen, *daß, wenn man unter g irgendeine ganze positive Zahl versteht, welche die Bedingung*

$$(1) \qquad n \geqq g \geqq \frac{n-1}{2}$$

erfüllt und sich aus den $g+1$ Potenzsummen $s_{g+1}, s_{g+2}, \ldots, s_{2g+1}$ ganz beliebig $n-g$ Potenzsummen $s_{\lambda_1}, s_{\lambda_2}, \ldots, s_{\lambda_{n-g}}$ herausgegriffen denkt, notwendig auch $s_1, s_2, \ldots, s_g, s_{\lambda_1}, s_{\lambda_2}, \ldots, s_{\lambda_{n-g}}$ ein Fundamentalsystem bilden. (Zufolge (1) ist stets $g+1 \geqq n-g$, und Gleichheit kann nur bestehen, wenn die zu nichts Neuem führende Wahl $g = \frac{n-1}{2}$, vorausgesetzt, daß n ungerade ist, getroffen wurde.)

Zum Beweise ist es am einfachsten, von der Girardschen Formel auszugehen, durch welche die Potenzsummen in independenter Form als ganze rationale Funktionen der elementaren symmetrischen Funktionen dargestellt werden. Versteht man unter f_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$ die elementare symmetrische Funktion λ-ter Dimension von $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so besteht die Girardsche Formel in dem Gleichungssystem

$$(2)\quad s_\lambda = (-1)^\lambda \cdot \lambda \cdot \sum_{(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)} \frac{(-1)^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n}(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{n-1}+\mu_n-1)!}{\mu_1!\,\mu_2!\ldots!\,\mu_n!} f_1^{\mu_1} f_2^{\mu_2}\cdots f_n^{\mu_n}$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots),$$

worin sich die Summation auf alle diejenigen Werte

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n = 0, 1, 2, \ldots$$

zu erstrecken hat, welche die Bedingung

$$(3)\qquad \mu_1 + 2\mu_2 + \ldots + n\mu_n = \lambda$$

erfüllen. Die analogen Formeln, durch welche die elementaren symmetrischen Funktionen durch die ersten Potenzsummen ausgedrückt werden, lauten bekanntlich:

$$(4)\qquad f_\lambda = (-1)^\lambda \sum_{(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\lambda)} \frac{(-1)^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\lambda}}{1^{\mu_1}\cdot 2^{\mu_2}\cdots\lambda^{\mu_\lambda}\,\mu_1!\,\mu_2!\ldots\mu_\lambda!} s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2}\ldots s_\lambda^{\mu_\lambda}$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei über alle $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ summiert werden muß, für welche $\mu_1 + 2\mu_2 + \ldots + \lambda\mu_\lambda = \lambda$ ist.

Das Entscheidende ist nun, daß für alle $\lambda = g+1, g+2, \ldots, 2g+1$ die rechten Seiten von (2), wenn sie als ganze rationale Funktionen von $f_{g+1}, f_{g+2}, \ldots, f_n$ allein betrachtet werden, stets *lineare* Funktionen dieser Ausdrücke sein müssen. Gesetzt nämlich, es kämen in einem der Produkte $f_1^{\mu_1} f_2^{\mu_2} \ldots f_n^{\mu_n}$ *mehrere* Faktoren $f_\varrho^{\mu_\varrho}, f_\sigma^{\mu_\sigma}, \ldots$ vor, für welche $g < \varrho < \sigma < \ldots$ und $\mu_\varrho > 0$, $\mu_\sigma > 0, \ldots$ ist, oder, wenn dies nicht der Fall, doch ein Faktor $f_\varrho^{\mu_\varrho}$, der die Bedingungen $g < \varrho$, $\mu_\varrho > 1$ erfüllt, so wäre im ersten Falle $\varrho\mu_\varrho + \sigma\mu_\sigma + \ldots \geqq 2g+3$ und im zweiten $\varrho\mu_\varrho \geqq 2g+2$, in beiden Fällen also a fortiori $\mu_1 + 2\mu_2 + \ldots + n\mu_n > 2g+1$, was wegen (3) für alle $\lambda = g+1, g+2, \ldots, 2g+1$ nie eintreten darf. Da wir nun die Werte $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-g}$ den Zahlen $g+1, g+2, \ldots, 2g+1$ beliebig entnommen haben, so gehen die betreffenden Gleichungen (2), wenn man für $f_1, f_2, \ldots, f_g$ die nach (4) zu bildenden ganzen rationalen Funktionen von $s_1, s_2, \ldots, s_g$ einsetzt, über in ein System von der Form

$$(5)\qquad s_{\lambda_i} = C_{\lambda_i,1} f_{g+1} + C_{\lambda_i,2} f_{g+2} + \cdots + C_{\lambda_i,n-g} f_n + C_{\lambda_i,n-g+1}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-g),$$

worin die Größen C in der angegebenen Weise von $s_1, s_2, \ldots, s_g$ abhängen. Träte dabei der Fall ein, daß die Determinante $(n-g)$-ten Grades $\left|C_{\lambda_i,\varrho}\right|_{(i,\varrho=1,2,\ldots,n-g)}$ verschwindet, so ergäbe sich hieraus eine lineare Abhängigkeit zwischen den $n-g$ Ausdrücken $s_{\lambda_i} - C_{\lambda_i,n-g+1}$ $(i=1, 2, \ldots, n-g)$

mit Koeffizienten, die rational in $s_1, s_2, \ldots, s_g$ sind, also eine Beziehung zwischen $s_1, s_2, \ldots, s_g, s_{\lambda_1}, s_{\lambda_2}, \ldots, s_{\lambda_{n-g}}$. Mithin müßte die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(s_1, s_2, \ldots, s_g, s_{\lambda_1}, s_{\lambda_2}, \ldots, s_{\lambda_{n-g}})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

identisch verschwinden und folglich auch die bis auf einen von Null verschiedenen numerischen Faktor mit ihr identische Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{g-1}, & x_2^{g-1}, & \ldots, & x_n^{g-1} \\ x_1^{\lambda_1-1}, & x_2^{\lambda_1-1}, & \ldots, & x_n^{\lambda_1-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{\lambda_{n-g}-1}, & x_2^{\lambda_{n-g}-1}, & \ldots, & x_n^{\lambda_{n-g}-1} \end{vmatrix}.$$

Nach den für Determinanten geltenden Grundbegriffen erhält man aber, abgesehen von den Koeffizienten, die sämtlichen $n!$ Glieder von D, wenn man in $x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ das System $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ alle aus den n Elementen $0, 1, \ldots, g-1, \lambda_1 - 1, \ldots, \lambda_{n-g} - 1$ gebildeten Permutationen durchlaufen läßt. Da nun von diesen Elementen keine zwei einander gleich sind, also die auf die angegebene Weise aus $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gebildeten Terme sämtlich voneinander verschieden sind, so müßte wegen der Unabhängigkeit dieser Größen das identische Verschwinden von D durch das Verschwinden sämtlicher $n!$ Koeffizienten bedingt sein, im Widerspruch zu der Tatsache, daß diese Koeffizienten bekanntlich alle den Wert ± 1 haben. Die Annahme, von der wir ausgingen, es sei $\underset{(i, \varrho=1, 2, \ldots, n-g)}{|C_{\lambda_i, \varrho}|} = 0$, ist also auszuschließen, und diese Determinante hat somit einen von Null verschiedenen Wert; folglich lassen sich die Gleichungen (5), d. h. die Gleichungen

$$C_{\lambda_i, 1} f_{g+1} + C_{\lambda_i, 2} f_{g+2} + \ldots + C_{\lambda_i, n-g} f_n = s_{\lambda_i} - C_{\lambda_i, n-g+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-g)$$

in bezug auf $f_{g+1}, f_{g+2}, \ldots, f_n$ eindeutig auflösen, was unmittelbar zu einer Darstellung dieser Ausdrücke als rationale Funktionen von s_1, $s_2, \ldots, s_g, s_{\lambda_1}, s_{\lambda_2}, \ldots, s_{\lambda_{n-g}}$ führt. Da nun die analoge Aufgabe hinsichtlich $f_1, f_2, \ldots, f_g$ schon durch (4) gelöst wird, da also sämtliche elementaren symmetrischen Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rational durch s_1, $s_2, \ldots, s_g, s_{\lambda_1}, s_{\lambda_2}, \ldots, s_{\lambda_{n-g}}$ darstellbar sind, so müssen diese Potenzsummen in der Tat, wie behauptet, ein Fundamentalsystem sein.

(Eingegangen am 2. 7. 1920.)