

Das Berührungsproblem für die allgemeine Regelschraubenfläche.

Von Karl Mack in Wien.

Es sei eine Regelschraubenfläche durch ihre zur Grundebene senkrechte Achse A , die Erzeugende E , die reduzierte Ganghöhe h_0 und den Sinn B der nach aufwärts gerichteten Schraubenbewegung gegeben. (Siehe Figur). R bezeichne den Grundkreis jenes Richtkegels der Regelschraubenfläche, dessen Spitze s in A liegt und um h_0 von der Grundebene absteht. Handelt es sich um die Aufgabe, zu der beliebig durch E gelegten Ebene τ mit der Spur T den Grundriß t' des Berührungspunktes t zu finden, so hat man nur das aus dem Punkte A' auf die Gerade E' gefällte Lot mit dem Kreise R im Punkte e' zu schneiden und das Lot aus e' auf T mit E' zum Schnitte zu bringen. Diese Konstruktion ist auf verschiedene Arten bewiesen worden.

J. de la Gournerie¹⁾ leitete sie als erster auf drei verschiedenen Wegen her. L. Burmester²⁾ gelangte zu demselben Resultate gelegentlich der Bestimmung der Selbstschatten auf kinematisch-geometrischem Wege. A. Mannheim³⁾ liefert den Beweis mit Hilfe des zu E gehörigen Normalenparaboloides, K. Pelz⁴⁾ mittels eines längs E berührenden hyperbolischen Paraboloides und Th. Schmid⁵⁾ zeigt mit Hilfe der metrischen Beziehungen zwischen dem Parameter der Erzeugenden, der reduzierten Ganghöhe, dem Radius des Kehlkreises und der Neigung der Erzeugenden gegen die Schraubenachse, auf welche Weise sich das Büschel der durch eine Erzeugende gehenden Tangentialebenen mit dem Grundrisse ihrer Berührungspunkte in perspektive Lage bringen läßt.

Von dem Chaslesschen Fundamentalsatze über Regelflächen ausgehend, soll die obige Konstruktion im Nachfolgenden auf völlig anschauliche Weise bewiesen werden.⁶⁾

¹⁾ Journal de l'École Polyt. XXXIV, Paris 1851, Art. 46 sowie Art. 47 und „Traité de géométrie descriptive“, Paris 1864, Art. 1023.

²⁾ Zeitschrift f. Math. und Physik, 18. Jahrg., Leipzig, 1873, p. 195.

³⁾ Cours de géométrie descriptive, Paris 1886, p. 366.

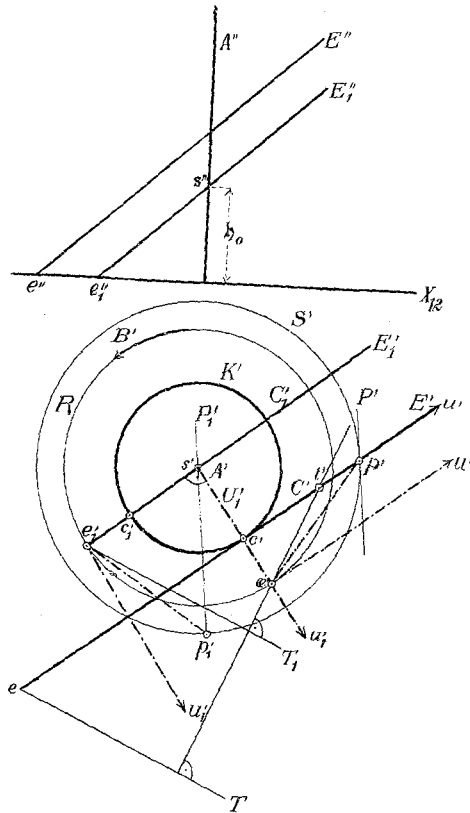
⁴⁾ Wiener Sitzungsber. math. naturw. Kl. 1883, LXXXVII, p. 473.

⁵⁾ Wiener Sitzungsber. math. naturw. Kl. 1890, XCIX, p. 952.

⁶⁾ Damit ist eine von Prof. Dr. E. Müller im Seminar für darstellende Geometrie an der k. k. technischen Hochschule in Wien im Studienjahre 1904/05 gestellte Aufgabe gelöst.

Zuvor sei noch an die Eigenschaft jeder auf der gegebenen Fläche liegenden Schraubenlinie S erinnert, daß die Grundspur des durch s gelegten Richtkegels ihrer abwickelbaren Fläche mit dem Grundrisse S' der Schraubenlinie zusammenfällt.

Es sei nun auf E p ein beliebiger Punkt, c der Punkt der Kehlschraubenlinie K und u der unendlich ferne Punkt. Bezeichnen P, C die Tangenten in p, c an die durch sie gehenden Schraubenlinien S und K , und U die Tangente in u an den unendlich



fernen Kegelschnitt der Schraubenfläche, so bestimmen die Geradenpaare EP, EC , und EU die Tangentialebenen in den drei genannten Punkten von E an die Regelschraubenfläche. Durch s werde nun ein zu dem Ebenenbüschel $E[PCU]$ paralleles Ebenenbüschel $E_1[P_1C_1U_1]$ gelegt.

Zieht man durch s die zu E, P, C bzw. parallelen Geraden E_1, P_1, C_1 , so liegt der Spurpunkt e_1 von E_1 auf R und die Spurpunkte p_1, c_1 von P_1 und C_1 , wegen der oben angeführten Eigenschaft der Schraubenlinien, auf den Kreisen S' und K' . Legt man noch durch s die Gerade U_1 , die zur asymptotischen Ebene $[EU]$

parallel ist und senkrecht steht zu E , so liegt ihr Spurpunkt u_1 unendlich fern in der zu E' senkrechten Richtung und die Ebene $[E_1 U_1]$ ist zur asymptotischen Ebene $[EU]$ parallel.

Die Strahlen des Büschels $e_1(p_1 c_1 u_1)$, das die Spuren von $E_1 [P_1 C_1 U_1]$ bilden, gehen aber nach einer Drehung um 90° im Sinne von B' bzw. durch die Punkte p', c', u' ; denn die Punkte p_1, c_1, u_1 werden durch diese Drehung in die Punkte p', c', u' übergeführt, da $p_1 c_1$ die Endpunkte jener Kreisradien sind, die zu den Tangenten in den Punkten p', c' an die Kreise S', K' parallel sind und $[e_1 u_1]$, wegen des Parallelismus mit U'_1 , zu E' senkrecht steht. Der Scheitel e_1 geht durch diese Drehung in den eingangs erwähnten Punkt e' über.

Da aber das Ebenenbüschel $E_1 (P_1 C_1 U_1) = E_1 [p_1 c_1 u_1]$ zu dem Büschel $E(PCU)$ parallel ist und dieses nach dem Chaslesschen Fundamentalsatze über Regelflächen zur Reihe der Punkte pcu projektiv ist, so ist das Strahlbüschel $e_1(p_1 c_1 u_1)$ der Grundspuren des ersteren zur Punktreihe $p' c' u'$ projektiv. Durch die eben erwähnte Drehung um 90° geht das Büschel $e_1(p_1 c_1 u_1)$ in das Büschel $e'(p' c' u')$, das mit der Punktreihe $p' c' u'$ perspektiv liegt, über. Daraus folgt aber die eingangs erwähnte Konstruktion.
